Mix

Emanuel Tukač

12.1.2024.

Uvodni zadaci

1. U ravnini su neke točke označene. Na svakoj dužini s označenim krajevima, označena je barem još jedna točka. Dokažite da je označeno beskonačno točaka.

2. Nađite pozitivne realne brojeve a, b, c, d takve da: $a+b=c^2$, $b+c=d^2$, $c+d=a^2$, $d+a=b^2$.

3. Dan je paran broj točaka u ravnini. Dokažite da ih je moguće upariti tako da se odgovarajuće dužine ne sijeku.

4. Nađite realne brojeve (x, y, z) takve da: $(x+y)^3 = z$, $(y+z)^3 = x$, $(z+x)^3 = y$.

Zadaci

5. Nađite sve cijelie brojeve x, y, a, b takve da $x^2 + y^2 = 3(a^2 + b^2)$

6. Dan je konačan broj crvenih i plavih točaka u ravnini. Polovište dužine s crvenim krajevima je plava točka, a polovište dužine s plavim krajevima je crvena točka. Dokažite da svu sve zadane točke na jednom pravcu.

7. Dano je n realnih brojeva a_i koji su pridruženi vrhovima pravilnog n-terokuta. Ako krenemo od vrha i prema vrhu j preko stranica mnogokuta postojat će vrh s brojem $\frac{a_i+a_j}{2}$. Dokažite da su svi a-ovi jednaki.

8. Dana je $n \times n$ tablica u koju su upisani svi brojevi od 1 do n^2. Polja smatramo susjednima ako dijele vrh. Dokažite da postoje susjedi s razlikom većom od n.

9. Dan je određen broj gradova. Svi su međusobno povezani cestama, ali ceste su jednosmjerne. Dokažite da postoji grad takav da svaki grad ima put prema njemu koji je direktan ili preko samo jednog drugog grada.

10. Dano je nekoliko realnih brojeva. Zapišemo umnoške svih mogućih parova tih brojeva i zbrojimo te umnoške. Ta vrijednost je manja od 1. Dokažite da je moguće izbrisati jedan broj tako da suma preostalih bude manja od $\sqrt{2}$.

Teži zadaci

11. Zadan je pravilan 2024-erokut i u svaki vrh je upisan neki cijeli broj. Suma svih upisanih vrijednosti je pozitivna. Dokažite da je moguće odabrati vrh od kojega krenuvši pozitivnom smjeru svaki podniz ima pozitivnu sumu.

12. Dano je n crvenih i n plavih točka u ravnini. Dokažite da možemo upariti točke različitih boja tako da se odgovarajuće dužine ne sijeku.

13. Unutar kruga polumjera 1 nalazi se n različitih točaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ neka d_i označava udaljenost od A_i do najbliže od preostalih točaka. Dokaži da vrijedi

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \leq 16.$$

14. Dano je $n \geq 3$ realnih brojeva a_i neka je $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ za sve i (indekse gledamo ciklički). Vrijedi: $a_i \leq a_j$ ako i samo ako $b_i \leq b_j$. Dokažite da su svi a-ovi jednaki.