Spiralna sličnost

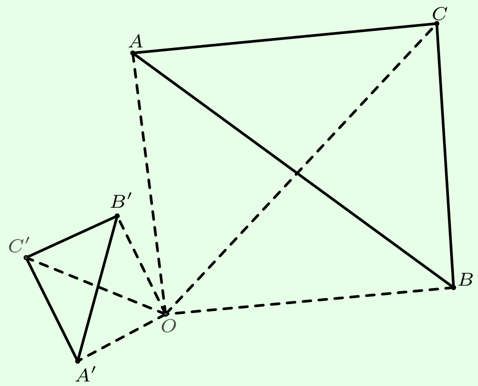
Luka Milačić

19. siječnja 2024.

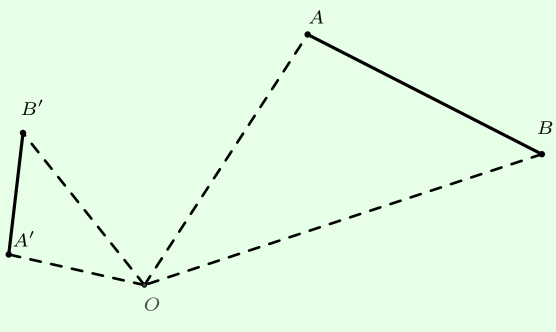
Prvo naučimo što je spiralna sličnost.

Definicija 1: Spiralna sličnost

Spiralna sličnost sa središtem O definirana je kao transformacija koja je kompozicija rotacije oko centra i homotetije iz njega.



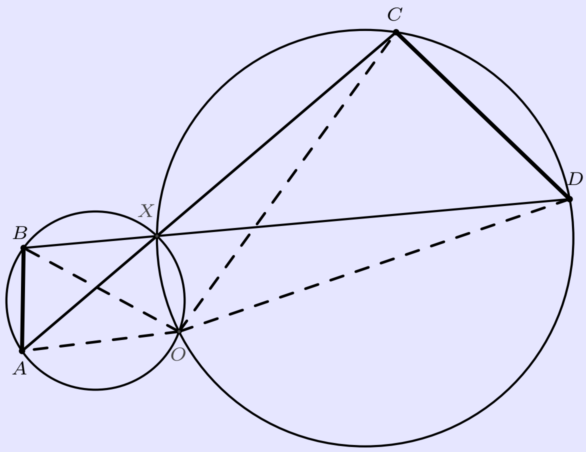
Jedna on najčešćih primjena spiralne sličnosti je rotiranje jedne dužine oko središta O te je nakon toga homotetirati s određenim koeficijentom.



Slijedi par lemma o tome kako naći spiralno središte te kako prepoznati tu konstrukciju u raznim geometrijskim zadacima. Uz to slijede i dvije bitne lemme koje su baza za sve zadatke u ovakvim konstrukcijama.

Teorem 1: Konstrukcija spiralnog središta

Neka su segmenti $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, i neka je X presjek pravaca AC i BD. Onda presjek kružnica (ABX) i (CDX) jedinstveno središte spiralne simetrije koja šalje $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$.



Zapravo je dovoljno dokazati $\triangle AOB \sim \triangle COD$. Za dokaz jedinstvenosti od O se koristi kompleksni koordinatni sustav.

Lemma 1

Centar spiralne sličnosti koji šalje $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$ isto tako šalje $\overline{AC}$ u $\overline{BD}$.

Lemma 2: Miquelova točka četverokuta

Dan je konveksan četverokut $ABCD$, neka se AB i CD sijeku u E, te neka se AC i BD sijeku u F. Dokaži da se kružnice opisane $\triangle ABF$, $\triangle CDF$, $\triangle ADE$ i $\triangle BCE$ sijeku u jednoj točki M.
Ako je četverokut tetivan onda su E,F i M kolinearne.

Zadaci

1. **AOPS Spiral similarity - Explicit spiral similarity**
   Dana su 2 trokuta $\triangle ABC \sim \triangle XYC$ (pazite na redoslijed točaka) i vrijedi $\angle ACB = 90^o$ (kod vrha C) te $\dfrac{AC}{BC} = k$. Definirajmo D kao presjek pravaca AX i BY. Odredi $\angle ADB$ i $\dfrac{AX}{BY}$.
2. **Salmon teorem + moj dodatak**
   Dan je $\triangle ABC$ i točka P na stranici $\overline{BC}$. Neka su O_1 i O_2 središta kružnica (APB) i (APC) redom. Neka je presjek BO_1 i CO_2 točka X. Dokaži da je A središte spiralne sličnosti koja šalje $\overline{BC}$ u $\overline{O_1O_2}$ i da je AXO_1O_2 tetivan četverokut.

3. **IMO 2005 P5**
Neka je $ABCD$ konveksan i fiksan četverokut takav da vrijedi $|BC| = |AD|$ i da iste dužine nisu paralelne. Neka su E i F dvije varijabilne točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ redom, za koje vrijedi $|BE| = |DF|$. Pravci AC i BD sijeku se u P, BD i EF u Q te EF i AC u R. Dokaži da kružnica opisana $\triangle PQR$ prolazi kroz fiksnu točku koja nije P, neovisno o izboru E i F.

4. **AOPS Spiral similarity - Hidden spiral similarity**
Dan je pravokutan jednakokračan $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$) s pravim kutom u C. Točka S se nalazi na kružnici čiji je promjer BC. Pravac simetričan pravcu SC s obzirom na AB siječe BC u D. Dokaži da je $DS \perp AS$.

5. **USAMO 2013/1**
U $\triangle ABC$, točke P, Q i R leže redom na BC, CA i AB. Neka su ω_A, ω_B i ω_C su redom kružnice opisane trokutima $\triangle AQR$, $\triangle BRP$ i $\triangle CPQ$. Neka pravac AP siječe ω_A, ω_B i ω_C redom u X, Y i Z. Dokaži da vrijedi $|YX|/|XZ| = |BP|/|PC|$.

6. **NIMO 2014**
Dan je $\triangle ABC$ s ortocentrom H. Neka je polovište stranice $\overline{BC}$ točka M. Kružnice ω_B i ω_C su kružnice (BMH) i (BMC). Kružnice ω_B i ω_C sijeku AB i AC redom u P i Q. Pravci PH i QH sijeku ω_C i ω_B u R i S redom. Dokaži da $\triangle BRS$ i $\triangle CRS$ imaju iste površine.

7. **USA TST 2007**
Kružnice ω_1 i ω_2 sijeku se u P i Q. Pravac kroz P siječe ω_1 i ω_2 u A i B redom. Pravac kroz Q siječe ω_1 i ω_2 u C i D redom. Neka je X presjek AC i BD. Neka su Y i Z točke takve da je $PY||BX$ i $PZ||AX$. Dokaži da Q,X,Y i Z leže na istom pravcu.