Zimska radionica - Optimizacija

Azra Tafro

13. siječnja 2024.

Problemi oblika "Odredi najveći/najmanji broj n za koji je moguće....", rješenje se obično sastoji od dva dijela.

1. Pronađi i dokaži ogradu.

- Koristimo razne poznate kombinatorne alate i ideje (Dirichletov princip, invarijante, "pametna" bojanja itd.)
- Ako želimo pronaći najveći mogući n tj. naći što više objekata (točaka, brojeva, boja itd.) uz određeno ograničenje, pokušavamo pronaći neku podjelu na kategorije tako da svaka kategorija sadrži najviše jedan objekt.
- Ako tražimo najmanji mogući broj "regija" koji pokrivaju neke "objekte", tražimo specifične objekte koje može pokriti najviše jedna "regija".
- Prava ideja je najčešće vrlo jednostavna i elegantna (ne i lagana!) - ako ste se zapleli u neki kompliciran račun, vjerojatno niste na pravom putu.

2. Pronađi primjer. Treba i pokazati da za pronađeni n postoji primjer/konstrukcija - ovaj dio može biti iste ili veće težine nego prvi dio zadatka!

Primjer: Na stranicama i u unutrašnjosti jednakostraničnog trokuta stranice 1 označeno je n točaka tako da su svake dvije točke udaljene više od 0.5. Odredi najveći mogući n.

Zadaci:

1. Neka je A najveći podskup skupa $\{1, 2, \ldots, 100\}$ takav da A ne sadrži brojeve a, b takve da $a \mid b$. Odredi najveći mogući $|A|$.
2. Koliko najviše elemenata može imati podskup skupa $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ tako da za svaka dva elementa a i b tog podskupa broj $a + b$ nije djeljiv brojem $a - b$?
3. Na kvadratnu mrežu ravnomjerno je raspoređeno 16 točaka u 4 reda i 4 stupca, tako da čine vrhove devet 1×1 kvadrata, četiri 2×2 kvadrata i jednog 3×3 kvadrata, tj. ukupno 14 kvadrata čije stranice su paralelne stranicama mreže. Koji je najmanji mogući broj točaka koje moramo ukloniti kako bi svakom od kvadrata nedostajao barem jedan vrh?
4. Polje se sastoji od 2020×2021 jediničnih kvadrata. U svaki kvadrat upisan je prirodan broj tako da se brojevi ne ponavljaju ni u retku ni u stupcu. "Mrkva" se sastoji od četiri uzastopna kvadrata u nekom retku ili stupcu čija ukupna suma je $4 \cdot 2021$. Nađite najveći mogući broj mrkvi u polju. Napomena: Moguće je da neke mrkve dijele zajedničke kvadrate.

5. U nekoj državi postoji 2024 grada i N cesti, tako da svaka cesta spaja točno dva grada i svaka dva grada spaja najviše jedna cesta. Putovanje je moguće samo cestama. Koji je najmanji mogući N takav da smo, neovisno o rasporedu cesti, sigurni da možemo iz svakog grada putovati u bilo koji drugi? (Nap: Jezikom teorije grafova – odredi najmanji broj bridova potreban da graf sa n vrhova bude povezan.)

6. Odredi najmanji broj polja na 8×8 ploči kako bi svako polje (neovisno o tome je li i samo označeno ili ne) imalo barem jednog označenog susjeda. (Polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu.)

7. Na kružnici je označeno 3000 točaka. U jednoj od tih točaka nalazi se skakavac. Skakavac svakim skokom preskače jednu ili dvije označene točke u smjeru kazaljke na satu i staje na sljedeću označenu točku. Odredi koliko je najmanje skokova skakavac napravio ako je na svaku označenu točku stao barem jednom i vratio se u točku iz koje je krenuo.

8. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m crvenih kvadratića, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

9. Dana je 10×10 ploča i na njoj "brodovi" - svaki brod je figura sastavljena od jediničnih kvadratića spojenih bridovima. "Flota" je skupina brodova koji nemaju zajedničke bridove ni vrhove. Veličina broda je ukupan broj kvadratića koje sadrži, a veličina flote je ukupan broj kvadratića svih brodova.

   - Odredi najmanju moguću veličinu flote kojoj se ne može dodati niti jedan brod.
   - Odredi najveći mogući broj n takav da za svaki rastav broja n na k pribrojnika postoji flota od k brodova čija veličina odgovara svakom od pribrojnika.

10. U ravnini se nalazi n točaka u općem položaju. Točke su obojane crveno i plavo tako da svaki trokut s istobojnim vrhovima sadrži u unutrašnjosti barem jednu točku druge boje. Odredite najveći mogući n.

Rješenja i upute:

1. $|A| = 50$

2. 675 elemenata; Zadatak 2.5 s Županijskog natjecanja 2017.

3. Uputa: promatramo kvadrate s disjunktnim vrhovima, tako da uklanjanje vrha jednog kvadrata ne utječe na ostale. Rj: 4 točke.

4. Rješenje:

Answer: $1009 \cdot 4041$.

Solution: In a column of length 2020 there are 2017 potential onions. However there cannot be two consecutive onions, as they share 3 cells, meaning their fourth numbers would have to be equal. So a column can have at most 1009 onions. Analogously a row of length 2021 can also have at most 1009 onions. As there are $2020 + 2021 = 4041$ rows and columns in total, there can be at most $1009 \cdot 4041$ onions.

We will show there exists a field with $1009 \cdot 4041$ onions. We will first construct a 2020×2020 grid, choosing the first two rows to be

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots, & \ldots, & 1009, & -1009, & 1010, & -1010, \\ -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & \ldots, & \ldots, & -1009, & 1009, & -1010, & 1010. \end{array}$$

The next two rows will be shifted the cells to the left:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots, & \ldots, & 1009, & -1009, & 1010, & -1010, & 1, & -1, \\ -2, & 2, & -3, & 3, & \ldots, & \ldots, & -1009, & 1009, & -1010, & 1010, & -1, & 1. \end{array}$$

Similarly we construct the other rows. Finally we add the rightmost column consisting of the numbers

$$1011, -1011, 1012, -1012, \ldots, 2019, -2019, 2020, -2020.$$

We obtain the desired field by adding $2 \cdot 2021$ to all negative numbers in the grid.

5. Rj: $\binom{n-1}{2} + 1$

6. $k = 20$. Prilagođeni Problem 3 s IMO 1999.

7. $k = 3001$. Zadatak 4.5 s Županijskog natjecanja 2017.

8. Rj: $m = \lfloor \frac{n+p+1}{2} \rfloor$. Zadatak 3.5 s Državnog natjecanja 2008.

9. Rješenje:

Answer: 16.
Solution. Call a fleet *full* if no new ships can be added. We have to find the least number of squares in a full fleet.
First we show that a full fleet covering 16 unit squares exists. Put on the grid 16 one-square ships as shown in Figure 11. Note that then each square of the grid has a common vertex with one of those ships and thus no ship can be added.
Second we prove that there can not be fewer than 16 unit squares in a full fleet. Suppose a full fleet is fixed. Consider the set of 16 unit squares painted gray in Figure 11. For each of these 16 squares, there is a square of the full fleet that shares (at least) a common

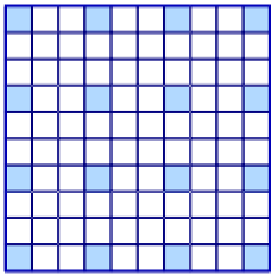

Figure 11

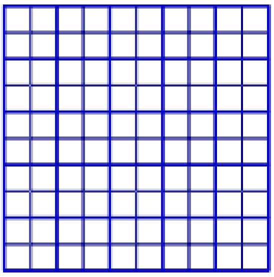

Figure 12

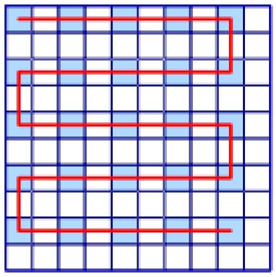

Figure 13

vertex with it. All these squares of the fleet must be different. Hence there are at least 16 squares in the fleet.

Answer: 25.
Solution. First we prove that, for all $n > 25$, we can divide n into summands so that a fleet with respective ship sizes can not be put on the grid. In particular, we prove that one can not put more than 25 ships of size 1 on the grid. Let us divide the grid into squares of 2×2 (as in Figure 12), there are 25 of them. As each 2×2 square can contain at most one ship of size 1, then the total number of such ships is at most 25.
Second we show that, for any representation of 25 as a sum of positive integers, there is a fleet with respective ship sizes. Let us initially put 25 ships of size 1 on the grid as shown in Figure 13. Then, starting from the upper left corner, shift along the line together as many ships as the first summand of the representation tells; then shift together as many ships as the second summand tells etc. The fleet obtained this way satisfies the conditions of the problem.

10. $k = 8$. Zadatak T-4, MEMO 2013.