Nejednakosti

~~Adven~~ Zimska radionica

1 Homogenizacija

1.1 Uvod

Znamo što je stupanj nekog polinoma u jednoj varijabli. Recimo, stupanj izraza a^3 je točno 3. Trenutno će nam biti korisno definiriati stupanj nekog izraza u više varijabli. Ako imamo izraz oblika $a^x b^y c^z$, kažemo da je njegov stupanj $x+y+z$. Dakle, samo zbrojimo stupnjeve varijabli koje se množe. Općenito bismo ovo mogli proširiti i na proizvoljan broj varijabli na analogan način. Sada imamo, na primjer, da je stupanj od a^3b^2c jednak 6, a^3c jednak 4 i b^5 jednak 5.

Još preostaje definirati što se događa sa stupnjem kada takve izraze zbrajamo. Općenito **nećemo** definiriati stupanj zbroja izraza različitog stupnja. Jedino ćemo pričati o zbroju stupnja ako je stupanj svakog člana zbroja jednak. Tada je stupanj jednak stupnju svakog člana. Na primjer, stupanj od a^3b+ac^3 jednak je 4, a stupanj od a^3+b nedefiniran je. Stupanj razlike određujemo na isti način.

Kada neka dva izraza stupnja m i n podijelimo, kažemo da je rezultat stupnja $m-n$. Na primjer, stupanj od $\frac{a^3b+a^2c^2}{ab}$ jednak je 2 jer je stupanj gornjeg izraza jednak 4, a donjeg 2. Sada promotrimo nama poznatu AG nejednakost:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

Primijetite da je stupanj lijeve strane 1. Stupanj desne strane jednak je $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\frac{1}{n}=1$, dakle stupanj je očuvan. Isto vrijedi i za ostakle KAGH nejednakosti. Promotrimo sada CSB nejednakost:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

Stupanj izraza $a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2$ i $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$ jednaki su 2. Dakle, njihov umnožak jednak je 4. Stupanj izraza $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ jednak je 2 pa je stupanj njegovog kvadrata jednak 4. Vidimo da su opet stupnjevi očuvani.

Općenito će za svaku poznatu nejednakost vrijediti takva jednakost stupnjeva. Ako je stupanj lijeve strane jednak stupnju desne, kažemo da je nejednakost *homogena*.

1.2 Homogenizacija

Recimo da želimo dokazati da je

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4(ab + bc + ac)$$

za sve $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takve da je $a + b + c = 1$. Vidimo da gornja nejednakost *nije* homogena jer je stupanj desne strane 2, a lijeve nije definiran. Kako svaka poznata nejednakost čuva stupanj, konačnim primjenama takvih nejednakosti nećemo nikad doći od lijeve strane do desne.

Ideja je isforsirati nejednakost do neke homogene nejednakosti koristeći uvjet. Vidimo da, ako 1 na lijevoj strani zamijenimo nekim izrazom stupnja 2, dobijamo homogenu nejednakost. Imamo da je $a+b+c = 1$, ali to je izraz stupnja 1. Ipak, možemo samo uvrstiti $(a + b + c)^2 = 1$. Sada je nejednakost ekvivalentna sa

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \geq 4(ab + bc + ac)$$

Intuitivno, ovakva nejednakost "mora" biti rješiva koristeći nama poznate nejednakosti. Nadalje, uvjet $a+b+c = 1$ nam sada "mora" biti potpuno beskoristan. Dakle, kada svedemo nejednakost na homogenu, ignoriramo uvjet i koristimo poznate nejednakosti. Ova se nejednakost sada svodi na

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \\ \iff \; & \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ab + bc + ac \end{aligned}$$

što slijedi iz AG nejednakosti.

2 Nejednakost o monotonom preuređenju vektora

Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nizovi realnih brojeva takvih da je $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ ili $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$$

gdje je σ bilo koja permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3 Jensenova nejednakost

Funkcija f je *konveksna* na intervalu $\mathbf{I}$ ako i samo ako za sve $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ vrijedi $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Za konkavne funkcije vrijedi suprotna nejednakost.

Neka je f funkcija. Ako je f konveksna na intervalu $\mathbf{I}$, onda za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{I}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Za konkavne funkcije vrijedi suprotna nejednakost. Ako je funkcija strogo konveksna ili strogo konkavna (tj. u gornjoj definiciji vrijedi stroga nejednakost), onda jednakost u ovom teoremu vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4 Derivacije

Definiramo *derivaciju* polinoma $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ kao $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

Derivacije racionalne funkcije $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ za polinome P, Q definira se kao

$$R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}$$

Druga derivacija je derivacija derivacije, tj. nju dobijemo tako da deriviramo derivaciju polinoma. Drugu derivaciju funkcije $f(x)$ označujemo sa $f''(x)$.

Sljedeća činjenica vrlo je korisna uz Jensenovu nejednakost: funkcija f je konveksna na intervalu $\mathbf{I}$ ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbf{I}$.

5 Normalizacija

Uz Jensenovu nejednakost će možda biti korisna ideja normalizacije. Normalizacija je u principu suprotan proces od homogenizacije. Ako nam je dana homogena nejednakost u a, b, c, možemo poslati (a, b, c) u (ka, kb, kc) za bilo koji $k \in \mathbb{R}^+$ i primijetit ćemo da se nejednakost neće promijeniti. Ako odaberemo $k = \frac{1}{a}$, šaljemo (a, b, c) u $(1, \beta, \gamma)$ pa vidimo da možemo pretpostaviti da je $a = 1$. Ako odaberemo $k = \frac{1}{a+b+c}$, šaljemo (a, b, c) u (α, β, γ) takve da je $\alpha + \beta + \gamma = 1$ pa možemo pretpostaviti da je $a + b + c = 1$. Dakle, u homogenoj nejednakosti možemo skalirati varijable po volji i tako uvesti dodatnu pretpostavku.

6 Zadatci

Zadatak 1. Za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takve da je $abc = 1$, dokažite

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$$

Zadatak 2. Za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, dokažite

$$a^7 + b^7 + c^7 \geq a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3$$

Zadatak 3. Za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takve da je $abc = 1$, dokažite

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Zadatak 4. Za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takve da je $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, dokažite

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$$

Zadatak 5. Za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takve da je $a + b + c = 2$, dokažite

$$\frac{(a-1)^2}{b} + \frac{(b-1)^2}{c} + \frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{a^2+c^2}{a+c}\right)$$

Zadatak 6. Za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, dokažite

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{a+c} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$$

Zadatak 7. Za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, dokažite

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$