Funkcijske

Luka Milačić

19. siječnja 2024.

U duhu rješavanja funkcijskih jednadžbi htio bi citirati jednog velemajstora:

"Jesi li ikad igrao šah za 'ludnicu' u troje i bio na srednjoj ploči? Više manje, najbolja i najefektivnija strategija je da samo stavljaš figure skoro nasumično dok ne dobiješ nešto što radi - doslovno, samo probaj prvu stvar koja ti dođe napamet. Neki drugi put, ovo neće raditi i ponestajat će ti figura (i određeni ljudi će ti govoriti da prestaneš pjevušiti), onda moraš iskoristiti ono što imaš i izvesti nešto maštovitije, no ovo je rijetkost. Inače samo zakucavanjem figura na ploču radi, jako dobro protiv slabijih protivnika."
— **Max Schindler**

Idemo sada vidjeti što je funkcijska jednadžba.

Definicija 1: Što su funkcijske jednadžbe

Funkcijska jednadžba jest jednadžba gdje su nepoznanice same funkcije. Najčešći primjeri su s jednom funkcijom, ali ih može biti više. Recimo:

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x) + xy = f(y)f(x) + x.$$

Ovo znači da možemo uvrštavati bilo koje x i y koji su realni brojevi, to mogu biti recimo $x = 1$ ili $y = \pi$, no to mogu biti i tipa $x = f(0)$ ili čak $x = f(y)$. Poanta je da nam ovi tipovi jednadžbi daju veliki stupanj slobode i treba ga iskoristiti.

Napomena 1

Kada dobijete neko rješenje funkcijske jednadžbe,uvijek ga **uvrstite** natrag u početni uvjet. U prošlom primjeru bi to recimo bilo $f(x) = x$, a to bi davalo $xy + x = x + xy$ što uistinu i je rješenje.

Vrijeme je za upoznati sa par bitnih svojstava funkcija: **injekcija** , **surjekcija** i **bijekcija**.

Definicija 2: Injekcija

Funkcija $f : A \to B$ je **injektivna** ako vrijedi:

$$f(x) = f(y) \iff x = y$$

Ovo svojstvo najčešće dokazujemo tako da pretpostavimo da je $f(a) = f(b)$ pa dokažemo $a = b$, jer je drugi smjer trivijalan.

Definicija 3: Surjekcija

Funkcija $f : A \to B$ je **surjektivna** ako vrijedi:

$$\forall b \in B \;\; \exists a \in A \text{ t.d. } f(a) = b$$

Ovo svojstvo najčešće dokazujemo nekom konstrukcijom ili imamo neki uvjet tipa $f(f(x+y)) = x^3$, budući da desna strana može postići sve realne brojeve onda je i f surjekcija.

Definicija 4: Bijekcija

Funkcija $f : A \to B$ je **bijektivna** ako je **injektivna** i **surjektivna**.

Ovaj uvjet se dokazuje tako da se dokažu **injekcija** i **surjekcija**.

Primjer Kyrgyzstan 2012

Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Takve da za sve $x,y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Primijetimo da kada uvrstimo $x = 0$ dobivamo $f(f(0)^2 + f(y)) = y$, ovo nam daje surjekciju jer za svaki y postoji $x = f(0)^2 + f(y) \in R$ takav da je $f(x) = y$.

Općenito nam je 0 jako korisna u funkcijskim jednadžbama, pa sljedeće što pokušavamo je uvrstiti $a = f(0)^2 + f(0)$ jer je tada $f(a) = 0$. Uvrštavanjem $x = a$ te dobivamo da vrijedi $f(f(a)^2 + f(y)) = f(f(y)) = af(a) + y = y$.

Dobili smo $f(f(y)) = y$, ovakva funkcija se inače zove **involucija**. Za nju je sada lagano dobiti surjekciju. Pretpostavimo da je $f(a) = f(b)$, onda je $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$, dakle funkcija je injektivna.

Također, kada imamo involuciju korisno je imati i uvrštavanje $x = f(t)$. Primijetimo da ovo uvrštavanje možemo napraviti jer je $x \in \mathbb{R}$ te se f slika u $\mathbb{R}$.

Sada imamo $f(f(f(t))^2 + f(y)) = f(t^2 + f(y)) = f(t)f(f(t)) + y = f(t)t + y = f(f(t)^2 + f(y))$, zadnja jednakost je samo početni uvjet zadatka samo za $x = t$.

Imamo $f(t^2+f(y))=f(f(t)^2+y)$, sada zbog **injekcije** imamo $t^2+f(y)=f(t)^2+f(y)$ tj. $f(t)^2=t^2$ što nam daje rješenje $f(x)=\pm x$

Što još treba napraviti?

Kao što majmuni imaju svoj zov divljine prepoznatljiv po "UuUu AaAaa", matematičar koji rješavaju funkcijske jednadžbe imaju sličan zov "DURR WE WANT STUFF TO CANCEL" ili po naški "Durr želimo da se nešto pokrati". Sljedeći primjer će pokazati korist matematičkog urlikanja.

Primjer Luka Milačić

Nađi sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Takve da za sve x,$y\in\mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x^6+y)=f(x^{69}+2y)+f(x^{420})$$

Iako ove potencije izgledaju strašno naš zov divljine će ih sve izbezumiti. Primjenjujemo "DURR WE WANT STUFF TO CANCEL" i pokušavamo namjestiti da se prve dvije funkcije pokrate, pa pokušavamo izjednačiti izraze $x^6+y=x^{69}+2y$ iz čega dobivamo $y=x^{69}-x^6$, dakle uvrštavanjem $y=x^{69}-x^6$ u danu jednadžbu tada vrijedi $f(x^{420})=0$ i to za svaki $x\in\mathbb{R}$, tj. za svaki $x\geq 0$ imamo $f(x)=0$, jer je 420 parna potencija.

Sada uvrštavanjem $y=0$, dobivamo $f(x^6)=f(x^{69})+f(x^{420})$ tj. $f(x^{69})=0$, jer je $f(x^6)=0$ zbog $x^6\geq 0$, dakle $f(x)=0$ je jedino rješenje, to se i lako vidi kada vratimo to u početan uvjet.

Zadaci

1. **Functional Equations - Andreescu, Boreico (2007), P104**
   Nađi sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Takve da za sve x,y,$z\in\mathbb{R}$ vrijedi:
   $$f(f(x)+yz)=x+f(y)f(z).$$
2. **Bugarska, 1996**
   Nađi sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Takve da za sve x,$y\in\mathbb{R}$ vrijedi:
   $$f(f(x)+xf(y))=xf(y+1.)$$
3. **BMO 2000, P1**
   Nađi sve parove funkcija $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Takve da za sve x,$y\in\mathbb{R}$ vrijedi:
   $$f(xf(x)+f(y))=f(x)^2+y.$$
4. **Iran TST 1996**
   Nađi sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Takve da za sve x,$y\in\mathbb{R}$ vrijedi:
   $$f(x^2+y)=f(f(x)-y)+4f(x)y.$$

5. **HMO 2018 D2 P1**
Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(xf(y)) = (1-y)f(xy) + x^2y^2f(y).$$

6. **Functional Equations - Andreescu, Boreico (2007), P69**
Nađi sve parove funkcija $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Takve da je g injekcija i za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(g(x) + y) = g(x + f(y)).$$

7. **IMO 2017 P2**
Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$