<u>Zimska radionica - Polinomi u TB</u>

Patrick Pavić

14. siječnja 2024.

(prevedeno i blago promijenjeno predavanje Alexandera Remorova)

https://alexanderrem.weebly.com/uploads/7/2/5/6/72566533/polynomials.pdf

Definicije

- Neka $\mathbb{Z}[x]$ označava skup polinoma s koeficijentima u cijelim brojevima. Taj skup ima dodatnu strukturu prstena.
- Polinom $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ je <u>ireducibilan</u> ako ne postoje polinomi $Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ pozitivnog stupnja, takvi da je $P(x) = Q(x)R(x)$.

Korisne tvrdnje

1. (Eisensteinov kriterij) Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinom te p prost broj koji dijeli $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, te $p \nmid a_n$ i $p^2 \nmid a_0$. Tada je $P(x)$ ireducibilan.
2. (Schur) Neka je $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom pozitivnog stupnja. Tada postoji beskonačno mnogo prostih brojeva koji dijele barem jedan od članova niza $P(1), P(2), P(3), \ldots$ različitih od nula.

Lakši zadatci

1. Neka je p prost broj. Dokažite da je $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ ireducibilan.
2. Postoji li niz cijelih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takav da je $\gcd(a_i, a_j) = 1$ za svake $i \neq j$, i za svaki prirodan broj n, polinom $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ je ireducibilan.
3. (Bezout) Neka su $P(x), Q(x)$ polinom s cijelim koeficijentima takvi da $P(x)$ i $Q(x)$ nemaju zajedničke nultočke. Dokažite da postoje cijeli polinom $A(x), B(x)$ i cijeli broj N takav da vrijedi $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = N$.
4. Neka su $P(x), Q(x)$ cijeli monični polinomi pozitivnog stupnja. Neka za dovoljno veliki n, brojevi $P(n)$ i $Q(n)$ imaju isti skup prostih djelitelja. Dokažite $P(x) \equiv Q(x)$.

Teži zadatci

1. (USAMO 1974) Neka su a, b, c tri različita cijela broja. Dokaži da ne postoji polinom $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ takav da vrijedi $P(a) = b$, $P(b) = c$ i $P(c) = a$.
2. (IMO 2006) Neka je $P(x)$ cijeli polinom stupnja $n > 1$ i neka je k prirodan broj. Neka je $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ gdje je polinom P komponiran k puta. Dokaži da postoji najviše n cijeli brojeva t takvih da vrijedi $Q(t) = t$.

3. (Rumunjski ispit, 2007) Neka je $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom stupnja $n \geq 3$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(m)$ paran za sve parne brojeve m. Nadalje, neka je a_0 paran, i $a_k + a_{n-k}$ paran za svaki $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Neka je $P(x) = Q(x)R(x)$ gdje su $Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg Q \leq \deg R$ i svi koeficijenti od $R(x)$ su neparni. Pokaži da P ima cjelobrojni korijen.

4. (SAD, ispit, 2010) Neka je $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ takav da je $P(0) = 0$ i $\gcd(P(0), P(1), \ldots,) = 1$. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $\gcd(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), P(n+2) - P(2), \ldots) = n$.

5. (Rusija, 2006.) Polinom $(x+1)^n - 1$ djeljiv je polinomom $P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ parnog stupnja k, takvog da su mu svi koeficijenti neparni cijeli brojevi. Dokažite da je n djeljiv s $k+1$.