Inverzija

Stella Čolo

13.1.2024.

1. Uvod

Inverzija je transformacija ravine koju koristimo kako bi konfiguraciju pretvorili u neku jednostavniju ili poznatiju ili kako bi kombinirajući svojstva i zajedničke stvari s obje konfiguracije došli do nekih zaključaka.

Definicija 1.1: Inverzija

Neka je ω kružnica sa središtem u O i polumjerom r. Inverzija s obzirom na kružnicu ω je transformacija ravnine koja svaku točku ravnine A šalje u točku A' na polupravcu OA takvu da vrijedi $OA \cdot OA' = r^2$. Posebno, točku O šalje u točku u beskonačnosti, a točku u beskonačnosti u točku O.

Sliku točke T nakon inverzije ćemo označavati s T' ili $f(T)$. Iz toga direktno vidimo da za svake dvije točke A, B vrijedi

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB',$$

odnosno točke A, A', B, B' su konciklične.

Lema 1.2

Točka O je središte inverzije, vrijedi

$$\angle OAB = \angle OB'A'.$$

Iz sličnost $\triangle OAB$ i $\triangle OA'B'$ slijedi:

Lema 1.3

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$$

Generalno nam je korisnije promatrati što se događa s objektima poput pravaca i kružnica nego s pojedinim točkama.

Lema 1.4

Pravac koji prolazi kroz točku O se preslikava u samog sebe

Dokaz. Nazovimo taj pravac p i neka je A točka koja leži na njemu, znamo da točka A' leži na polupravcu OA, odnosno leži na pravcu p.

□

Lema 1.5

Pravac koji ne prolazi kroz točku O se šalje u kružnicu koja prolazi kroz O.

Dokaz. Ako je P nožište visine iz O na naš pravac ℓ, za bilo koju točku Q na pravcu ℓ vrijedi $\angle OPQ = 90°$. No, zbog gore opisane tetivnosti, imamo da je onda i $\angle OQ'P' = 90°$, dakle, točka Q' se nalazi na kružnici promjera OP'. Dakle, slika pravca ℓ koji ne prolazi kroz središte inverzije je kružnica koja prolazi kroz središte inverzije. $\square$

Funkcija inverzije je **involucija**, što znači da $f(f(T)) = T$, odnosno slika točke T' je točka T. Isto to vrijedi i za objekata pod inverzijom pa iz prethodne leme zaključujemo sljedeću:

Lema 1.6

Kružnica koja prolazi kroz O se preslikava u pravac koji ne prolazi kroz O.

Lema 1.7

Kružnica koja ne prolazi kroz točku O se preslikava u drugu kružnicu koja ne prolazi kroz točku O.

Sljedeći primjer koristi bitno svojstvo inverzije, očuvanje presjeka i tangentnosti, ali prošireno tako da smatramo dva pravca "tangentima" ako se sijeku u točki u beskonačnosti, tj. ako su paralelni.

Primjer 1. (IMO 2003 G4)Neka su $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ različite kružnice takve da se Γ_1, Γ_3 diraju s vanjske strane u točki P, kao i Γ_2, Γ_4. Neka se kružnice Γ_1, Γ_2 sijeku u točki A, kružnice Γ_2, Γ_3 u točki B, kružnice Γ_3, Γ_4 u točki C i kružnice Γ_4, Γ_1 u točki D. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Rješenje 1. Primjenimo inverziju sa središtem u točki P radijusa r. Kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ se slikaju u pravce l_1, l_2, l_3, l_4 talve da $l_1 \parallel l_3$ i $l_2 \parallel l_4$ iz čega slijedi da je $ABCD$ paralelogram. Znamo da $AB = \frac{r^2}{PA' \cdot PB'} A'B'$ i $PB = \frac{r^2}{PB'}$ i analogno za ostale točke pa tražena jednakost postaje

$$\frac{PD'^2}{PB'^2} \cdot \frac{A'B' \cdot B'C'}{A'D' \cdot D'C'} = \frac{PD'^2}{PB'^2},$$

a to vrijedi jer $A'B' = C'D'$ i $B'C' = D'A'$.

Neka je H ortocentar $\triangle ABC$, točka M polovište luka BC koji ne sadrži točku A, D nožište visine iz vrha A. Najčešće promatramo inverzije koje šalju točke u poznate elemente trokuta ili objekte iz početne konfiguracije u druge objekte iz te konfiguracije, neke od takvih općenitih inverzija su:

- Kompozicija inverzije iz točke A radijusa $\sqrt{AB \cdot AC}$ s osnom simetrijom preko simetrale $\angle BAC$ ("$\sqrt{bc}$ inverzija")
- Inverzija iz M radijusa MA ("Trozubac inverzija")
- Inverzija iz A radijusa $\sqrt{AH \cdot AD}$
- Inverzija sa središtem u H radijusa $\sqrt{HA \cdot HD}$

2. Zadaci

1. Neka su A, B i C tri kolinearne točke i neka je P bilo koja točka u ravnini koja nije na tome istome pravcu. Dokažite da su središta opisanih kružnica trokutima $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ i $\triangle PCA$ te točka P na istoj kružnici.

2. Dan je četverokut $ABCD$ čije su dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ okomite te se sijeku u E. Dokažite da preslike točke E preko stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ leže na jednoj kružnici.

3. Dokaži da za bilo koje četiri točke A, B, C, D vrijedi $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako su konciklične. (Ptolomej)

4. Dan je trokut $\triangle ABC$, I centar upisane kružnice, a M polovište luka BC koji ne sadrži A. Neka je X bilo koja točka na $\overline{BC}$ i Y drugi presjek pravca MX s kružnicom (ABC). Dokažite da je MI tangenta na kružnicu (IXY).

5. (EGMO 2013. 5.)Neka je Ω kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$. Kružnica ω dira stranice AC i BC te dira kružnicu Ω iznutra u točki P. Pravac paralelan s AB koji siječe unutrašnjost trokutta $\triangle ABC$ tangentan je na ω u točki Q. Dokažite da je $\angle ACP = \angle QCB$.

6. (HMO 2017 prvi dan) U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC|$. Točka I je središte kružnice upisane tom trokutu. Neka je M polovište stranice $\overline{AC}$, a N polovište luka $\widehat{AC}$ opisane kružnice tog trokuta koji sadrži točku B. Dokaži da je

$$\angle IMA = \angle INB$$

7. (HMO 2018 drugi dan)Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem je $|AB| < |AC|$. Točka D je polovište kraćeg luka $\widehat{BC}$ njegove opisane kružnice. Točka I je središte njegove upisane kružnice, a točka J je osnosimetrična točki I u odnosu na pravac BC. Pravac DJ siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točki E koja pripada luku $\widehat{AB}$. Dokaži da vrijedi $|AI| = |IE|$.

8. (IMO 2015 3.) Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $AB > AC$. Neka je Γ opisana kružnica tog trokuta, H njegov ortocentar, a F nožište visine iz A na BC. Neka je M polovište od $\overline{BC}$. Neka je Q točka na Γ takva da je $\angle HQA = 90°$ i neka je K točka na Γ tako da je $\angle HKQ = 90°$. Pretpostavimo da su točke A, B, C, K i Q sve različite i leže na Γ ovim redom. Dokažite da su opisane kružnice trokuta $\triangle KQH$ i $\triangle FKM$ tangencijalne.