

## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 17. svibnja 2023.

1. Neka su  $a, b, c$  i  $d$  realni brojevi takvi da je

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da + 8.$$

Odredi najmanji mogući iznos najveće vrijednosti u skupu  $\{|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|\}$ .

2. Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje se elementi skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  mogu raspodijeliti u tri neprazna skupa tako da za svaka dva od tih skupova vrijede sljedeći uvjeti:
- (i) skupovi nemaju zajedničkih elemenata,
  - (ii) skupovi imaju različit broj elemenata,
  - (iii) zbroj elemenata skupa s većim brojem elemenata manji je od zbroja elemenata skupa s manjim brojem elemenata.

3. Neka su  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  i  $\overline{CF}$  visine šiljastokutnog trokuta  $ABC$  i neka je  $H$  ortocentar tog trokuta. Točka  $P$  je polovište dužine  $\overline{AH}$ , točka  $Q$  sjecište pravca  $EP$  i dužine  $\overline{AB}$ , a točka  $R$  sjecište dužina  $\overline{DF}$  i  $\overline{BE}$ .

Dokaži da su pravci  $QR$  i  $BC$  međusobno okomiti.

4. Odredi sve parove  $(k, n)$  prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

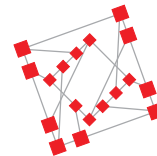
$$1! + 2! + \dots + k! = 1 + 2 + \dots + n.$$

(Sa  $b!$  označavamo umnožak prvih  $b$  prirodnih brojeva. Npr.  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .)

**Vrijeme rješavanja: 4 sata**

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.**



## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 18. svibnja 2023.

1. Neka su  $x$ ,  $y$  i  $z$  realni brojevi takvi da vrijedi

$$x + y + z = 12 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokaži da vrijedi  $9 \leq xy \leq 25$ .

2. U svako polje tablice  $17 \times 17$  upisan je po jedan od brojeva od 1 do 17, a svaki je broj upisan točno 17 puta. Dokaži da u tablici postoji redak ili stupac u koji je upisano barem 5 različitih brojeva.
3. Dan je četverokut  $ABCD$ . Točka  $E$  je sjecište stranice  $\overline{AD}$  i pravca paralelnog s  $AB$  kroz  $C$ . Ako vrijedi  $|AB| = |BC| = 3$ ,  $|CD| = |AD| = 5$  te  $|AE| = 3$ , odredi  $|EC|$ .
4. Odredi sve trojke  $(a, b, c)$  prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a \mid (b + 1), \quad b \mid (c + 1) \quad \text{i} \quad c \mid (a + 1).$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.