HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 17. svibnja 2023.

Zadatak 1.

Neka su a, b, c i d realni brojevi takvi da je

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da + 8.$$

Odredi najmanji mogući iznos najveće vrijednosti u skupu $\{|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|\}$.

Rješenje.

Pomnožimo li polaznu jednakost s 2 dobivamo

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 = 2ab + 2bc + 2cd + 2da + 16,$$

što je redom ekvivalentno s

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 + d^2 - 2da + d^2 = 16,$$

odnosno

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 = 16.$$

Pretpostavimo li da je najveća vrijednost među brojevima $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-d|$ i $|d-a|$ strogo manja od 2, imamo $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 < 16$, što je kontradikcija.

Zato je najveća vrijednost među brojevima $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-d|$ i $|d-a|$ veća ili jednaka 2.

Ona najmanje zaista može iznositi 2, na primjer za $(a,b,c,d) = (2,0,2,0)$ imamo

$$|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-a| = 2.$$

Zadatak 2.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje se elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ mogu raspodijeliti u tri neprazna skupa tako da za svaka dva od tih skupova vrijede sljedeći uvjeti:

(i) skupovi nemaju zajedničkih elemenata,

(ii) skupovi imaju različit broj elemenata,

(iii) zbroj elemenata skupa s većim brojem elemenata manji je od zbroja elemenata skupa s manjim brojem elemenata.

Rješenje.

Da bismo imali tri skupa s različitim brojevima elemenata mora vrijediti $n \geqslant 1+2+3=6$.

Ako skup s najmanje elemenata ima samo jedan element, onda taj element mora biti veći od zbrojeva elemenata preostala dva skupa. Označimo li taj element s M, slijedi

$$2M > [1+2+...+n] - M,$$

odnosno

$$3n \geqslant 3M > \frac{n(n+1)}{2},$$

što je u kontradikciji s $n \geqslant 6$. Dakle, sva tri skupa moraju imati barem dva elementa, pa je $n \geqslant 2+3+4=9$.

Za $n=9$ imamo podjelu na skupove:

$$\{8,9\},\ \{3,6,7\} \text{ i } \{1,2,4,5\}.$$

Pretpostavimo da je $n=10$. Zbroj svih elemenata iznosi 55. Skup s najmanje elemenata mora imati točno dva elementa i zbroj ta dva elementa mora biti barem 19. Dakle, to moraju biti brojevi 9 i 10. Zbroj preostalih elemenata je 36, te će ili oba skupa imati zbroj elemenata jednak 18 ili će jedan od njih imati zbroj barem 19, što je u oba slučaja suprotno uvjetima zadatka.

Ako je $n=11$, onda opet možemo zaključiti da najmanji skup mora imati točno dva elementa jer je $3+4+5=12>11$. Zbroj svih brojeva 66, pa bi zbroj elemenata najmanjeg skupa trebao biti barem 23, što je nemoguće jer su dva najveća elementa 10 i 11 čiji zbroj je 21.

Konačno, za $n \geqslant 12$ konstruiramo podjelu na tri podskupa.

Zapišimo $n=3k+r$, pri čemu je $r \in \{0,1,2\}$ i $k \geqslant 4$.

U prvi skup ćemo staviti $k-1$ najvećih elemenata, u drugi skup sljedećih k elemenata po veličini, te u treći skup $k+r+1$ najmanjih elemenata.

Pogledajmo razliku zbrojeva elemenata u prva dva skupa:

$$((3k+r)+\ldots+(2k+r+2)) - ((2k+r+1)+\ldots+(k+r+2)).$$

Uočimo da za svaki od $k-1$ brojeva iz prvog skupa imamo broj u drugom skupu koji je točno za $k-1$ manji, pa razlika iznosi

$$=(k-1)+(k-1)+\ldots+(k-1)-(k+r+2)=(k-1)^2-(k+r+2).$$

Za $k \geqslant 4$ i $r \leqslant 2$ vrijedi

$$(k-1)^2-(k+r+2)=k^2-3k-r-1 \geqslant k^2-3k-3=k(k-3)-3 \geqslant 4\cdot 1-3=1.$$

Na sličan način možemo promotriti razliku zbrojeve elemenata u druga dva skupa:

$$((2k+r+1)+\ldots+(k+r+2)) - ((k+r+1)+\ldots+2+1),$$

što iznosi

$$k+k+\ldots+k-((r+1)+\ldots+1)=k^2-\frac{r(r+1)}{2} \geqslant 1.$$

Napomena: U svakom od slučajeva možemo eksplicitno zapisati elemente i izračunati zbrojeve. U slučaju kada je $n = 3k$, $k \geqslant 4$ možemo odabrati skupove

$$A = \{3k, 3k-1, ..., 2k+2\}, \quad B = \{2k+1, 2k, ..., k+2\} \quad \text{i} \quad C = \{k+1, k, ..., 1\}.$$

Primijetimo da skupovi A, B i C redom imaju $k-1$, k i $k+1$ elemenata. Zbrojevi elemenata ovih skupova su redom

$$\frac{5k^2-3k+2}{2}, \qquad \frac{3k^2+3k}{2} \qquad \text{i} \qquad \frac{k^2+3k+2}{2}$$

te se lako provjeri da za $k \geqslant 4$ zaista vrijedi

$$\frac{5k^2-3k+2}{2} > \frac{3k^2+3k}{2} > \frac{k^2+3k+2}{2}.$$

U slučaju kada je $n = 3k+1$ i $k \geqslant 4$, možemo odabrati skupove

$$A = \{3k+1, 3k, ..., 2k+3\}, \quad B = \{2k+2, 2k+1 ..., k+3\} \quad \text{i} \quad C = \{k+2, k+1, ..., 1\}.$$

Skupovi A, B i C redom imaju $k-1, k$ i $k+2$ elemenata. Za njihove zbrojeve elemenata vrijedi

$$\frac{5k^2-k-4}{2} > \frac{3k^2+5k}{2} > \frac{k^2+5k+6}{2}.$$

Konačno, u slučaju kada je $n = 3k+2$ i $k \geqslant 4$, možemo odabrati skupove

$$A = \{3k+2, 3k+1, ..., 2k+4\}, \quad B = \{2k+3, 2k+2, ..., k+4\} \quad \text{i} \quad C = \{k+3, k+2, ..., 1\}.$$

Skupovi A, B i C redom imaju $k-1, k$ i $k+3$ člana, a za njihove zbrojeve elemenata se lako provjeri da za $k \geqslant 4$ zaista vrijedi

$$\frac{5k^2+k-6}{2} > \frac{3k^2+7k}{2} > \frac{k^2+7k+12}{2}.$$

Zadatak 3.

Neka su $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC i neka je H ortocentar tog trokuta. Točka P je polovište dužine $\overline{AH}$, točka Q sjecište pravca EP i dužine $\overline{AB}$, a točka R sjecište dužina $\overline{DF}$ i $\overline{BE}$.

Dokaži da su pravci QR i BC međusobno okomiti.

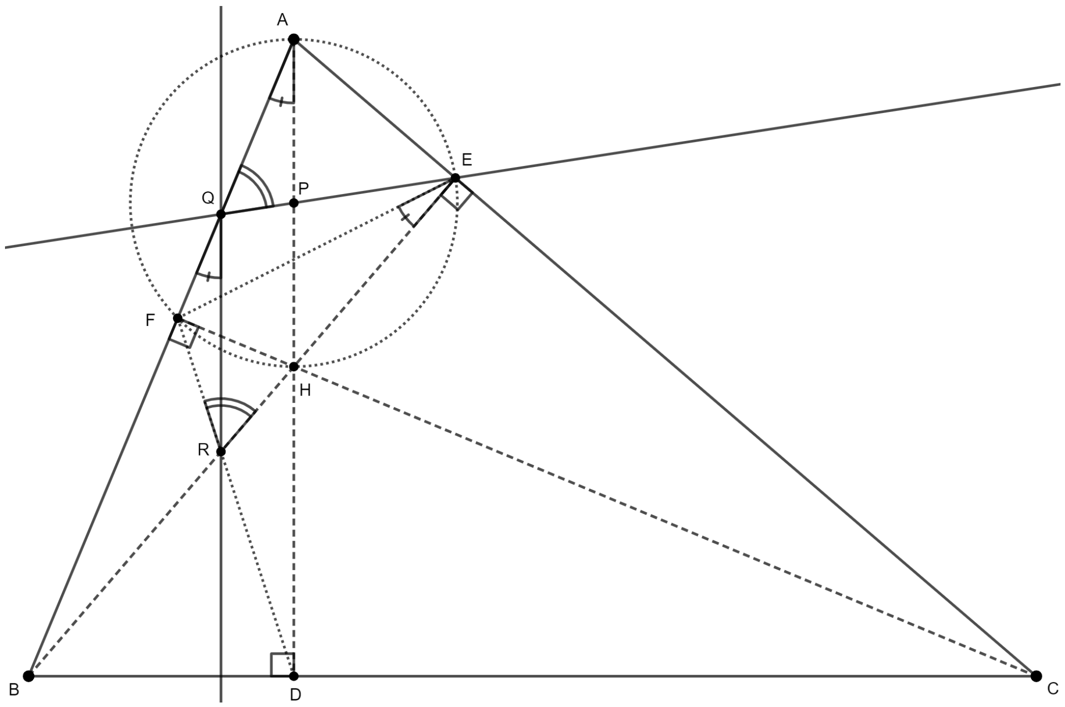
Rješenje.

Označimo s α, β i γ redom mjere kutova trokuta ABC u vrhovima A, B i C.

Budući da su kutovi $\sphericalangle BEC$ i $\sphericalangle BFC$ pravi, točke E i F leže na kružnici promjera $\overline{BC}$ i četverokut $BCEF$ je tetivan. Odavde slijedi $\sphericalangle EFA = 180° - \sphericalangle BFE = \sphericalangle BCE = \gamma$.

Slično, budući da su kutovi $\sphericalangle AEH$ i $\sphericalangle AFH$ pravi, četverokut $AEHF$ je tetivan i P je središte njegove opisane kružnice. Zato iz odnosa obodnog i središnjeg kuta nad tetivom $\overline{AE}$ dobivamo $\sphericalangle APE = 2\sphericalangle AFE = 2\gamma$. Iz jednakokračnog trokuta APE zaključujemo da vrijedi $\sphericalangle PEA = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle APE) = 90° - \gamma$, a iz trokuta AQE slijedi

$$\sphericalangle EQA = 180° - \sphericalangle QAB - \sphericalangle QEA = 180° - \sphericalangle QAB - \sphericalangle PEA = 180° - \alpha - (90° - \gamma) = 90° + \gamma - \alpha.$$



S druge strane, budući da su kutovi $\sphericalangle BFH$ i $\sphericalangle BDH$ pravi, slijedi da je četverokut $BDHF$ također tetivan. Odavde iz odnosa obodnih kutova nad tetivama $\overline{DH}$ i $\overline{BF}$ imamo

$$\sphericalangle RFH = \sphericalangle AFH = \sphericalangle DBH = \sphericalangle CBE = 90° - \gamma,$$

$$\sphericalangle RHF = \sphericalangle BHF = \sphericalangle BDF = 180° - \sphericalangle CDF = \sphericalangle FAC = \sphericalangle BAC = \alpha,$$

pri čemu smo u drugoj produženoj jednakosti iskoristili činjenicu da je i četverokut $CDFA$ tetivan. Sada iz trokuta RFH slijedi

$$\sphericalangle FRH = 180° - (\sphericalangle RHF + \sphericalangle RFH) = 180° - \alpha - (90° - \gamma) = 90° + \gamma - \alpha.$$

Kao posljedicu u četverokutu $REQF$ dobivamo

$$\sphericalangle FRE + \sphericalangle EQF = \sphericalangle FRH + 180° - \sphericalangle EQA = 90° + \gamma - \alpha + 180° - (90° + \gamma - \alpha) = 180°,$$

pa slijedi da je i taj četverokut tetivan. Iz jednakosti obodnih kutova nad tetivom $\overline{RF}$ imamo $\sphericalangle FQR = \sphericalangle FER$, a iz činjenice da je četverokut $HEAF$ tetivan (i odnosa obodnih kutova nad tetivom $\overline{FH}$) slijedi $\sphericalangle FER = \sphericalangle FEH = \sphericalangle FAH = \sphericalangle BAD = 90° - \beta$.

Konačno,

$$\sphericalangle FQR = \sphericalangle FAH = 90^\circ - \beta,$$

odakle slijedi da su pravci QR i AH paralelni. Budući da je pravac AH okomit na BC, zbog prethodno navedene paralelnosti slijedi da su i QR i BC okomiti, čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 4.

Odredi sve parove (k, n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$1! + 2! + ... + k! = 1 + 2 + ... + n.$$

(Sa $b!$ označavamo umnožak prvih b prirodnih brojeva. Npr. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

Prvo rješenje.

Promotrimo ostatke pri dijeljenju lijeve i desne strane jednadžbe sa 7.

Za lijevu stranu možemo uočiti:

k	1	2	3	4	5	6	7	...
$k!$ (mod 7)	1	2	6	3	1	6	0	...
$1! + ... + k!$ (mod 7)	1	3	2	5	6	5	5	...

Za $k \geqslant 7$ je $k!$ djeljivo sa 7, pa $1! + ... + k!$ daje ostatak 5 pri dijeljenju sa 7.

Također imamo sljedeće ostatke pri dijeljenju sa 7:

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$1 + ... + n$ (mod 7)	1	3	6	3	1	0	0	...

Ostatci pri dijeljenju sa 7 se ponavljaju periodički s periodom 7, pa zaključujemo da će se s istim periodom ponavljati ostatci koje daju zbrojevi prvih n brojeva.

Da bismo za neke k i n imali jednakost, očito su jedine mogućnosti da lijeva i desna strana jednadžbe daju ostatke 1, 3 i 6 pri dijeljenju sa 7.

To će se dogoditi za $k = 1, 2, 5$. Za svaki k imamo samo jedno moguće rješenje za n, jer porastom broja n raste zbroj prvih n prirodnih brojeva.

Za $k = 1$ imamo rješenje $n = 1$, za $k = 2$ rješenje je $n = 2$, a za $k = 5$ rješenje je $n = 17$.

Dakle, sva su rješenja dana s $(k, n) = (1, 1)$, $(k, n) = (2, 2)$ i $(k, n) = (5, 17)$.

Drugo rješenje.

Iz $1! + ... + k! = \dfrac{n(n+1)}{2}$ množenjem s 8 i dodavanjem 1 dobivamo

$$8(1! + ... + k!) + 1 = (2n + 1)^2.$$

Za $k \geqslant 10$ je $k!$ djeljivo s 25, pa za $k \geqslant 9$ imamo

$$8(1! + ... + k!) + 1 \equiv 8(1! + 2! + ... + 9!) + 1 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Kvadrat prirodnog broja ne može dati ostatak 5 pri dijeljenju sa 25 jer čim je djeljiv s 5 mora biti djeljiv i s 25. Stoga nemamo rješenja za $k \geqslant 9$.

Slučajeve za koje je $k < 9$ provjeravamo izravno i dobivamo da su sva rješenja dana s $(k, n) = (1, 1)$, $(k, n) = (2, 2)$ i $(k, n) = (5, 17)$.

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 18. svibnja 2023.

Zadatak 1.

Neka su x, y i z realni brojevi takvi da vrijedi

$$x + y + z = 12 \qquad \text{i} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokaži da vrijedi $9 \leqslant xy \leqslant 25$.

Rješenje.

Izrazimo

$$x + y = 12 - z, \qquad \text{i} \qquad x^2 + y^2 = 54 - z^2.$$

Tada je

$$xy = \frac{1}{2}((x+y)^2 - (x^2 + y^2)) = \frac{1}{2}(12 - z - 54 + z^2) = (z-6)^2 + 9.$$

Budući da je $(z-6)^2 \geqslant 0$, slijedi $xy \geqslant 9$.

Uočimo da vrijedi $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$, tj.

$$(12 - z)^2 \leqslant 108 - 2z^2.$$

Nadopunjavanjem na potpun kvadrat možemo uočiti da je nejednakost ekvivalentna nejednakosti

$$(z-4)^2 \leqslant 4,$$

iz čega zaključujemo da je $|z - 4| \leqslant 2$, tj. $2 \leqslant z \leqslant 6$.

Iz dobivenog vidimo da je $-4 \geqslant z - 6 \geqslant 0$, pa vrijedi

$$xy = (z-6)^2 + 9 \leqslant 16 + 9 = 25.$$

Zadatak 2.

U svako polje tablice 17×17 upisan je po jedan od brojeva od 1 do 17, a svaki je broj upisan točno 17 puta. Dokaži da u tablici postoji redak ili stupac u koji je upisano barem 5 različitih brojeva.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno da se u svakom retku i svakom stupcu nalaze najviše četiri različita broja. Prebrojimo koliko ima parova (R, b) i (S, b) pri čemu se broj b nalazi u retku R, tj. stupcu S. Prema pretpostavci takvih parova ima najviše $17 \cdot 4 + 17 \cdot 4 = 17 \cdot 8$.

S druge strane, za pojedini broj b neka je broj redaka u kojima se pojavljuje točno r, a broj stupaca s. Mora vrijediti

$$r \cdot s \geqslant 17$$

jer bi inače bilo manje od 17 pojavljivanja tog broja na ploči.

Broj b daje $r + s$ parova i vrijedi

$$r + s \geqslant 2 \cdot \sqrt{rs} = 2\sqrt{17} > 2 \cdot 4 = 8.$$

Dakle, svaki broj se pojavljuje u barem 9 redaka i stupaca, pa je ukupni broj parova barem $17 \cdot 9$, što je kontradikcija.

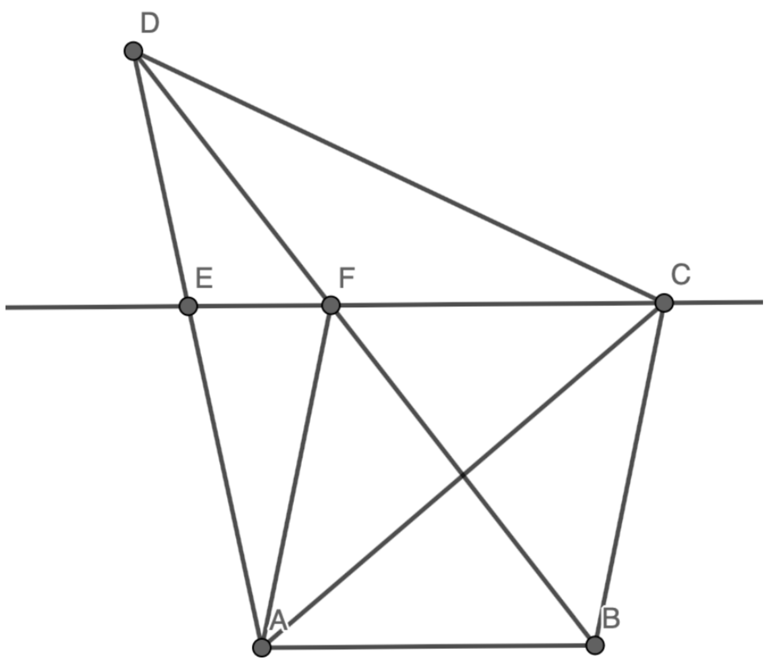
Zadatak 3.

Dan je četverokut $ABCD$. Točka E je sjecište stranice $\overline{AD}$ i pravca paralelnog s AB kroz C. Ako vrijedi $|AB| = |BC| = 3$, $|CD| = |AD| = 5$ te $|AE| = 3$, odredi $|EC|$.

Rješenje.

Točke B i D su jednako udaljene od točaka A i C, pa je BD simetrala dužine $\overline{AC}$, tj. točke A i C su osnosimetrične obzirom na pravac BC. Neka je P polovište dužine $\overline{AC}$.

Neka je F sjecište pravaca CE i BD. Vrijedi $|AF| = |CF|$ jer je BC simetrala dužine $\overline{AC}$.



Budući da su pravci CE i AB paralelni, vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$. Iz toga zaključujemo da jednakokračni trokuti ABC i ACF imaju zajedničku osnovicu i jednake kutove, pa su po K–S–K poučku sukladni. Zato je $|AF| = |FC| = 3$.

Također, zbog paralelnosti pravaca EF i AB slijedi da su trokuti DEF i DAB slični, te vrijedi

$$|DE| : |EF| = |DA| : |AB|.$$

Budući da je $|DE| = |AD| - |AE| = 5 - 3 = 2$, slijedi da je $|EF| = \frac{6}{5}$.

Dakle, vrijedi

$$|EC| = |EF| + |FC| = \frac{6}{5} + 3 = \frac{21}{5}.$$

Zadatak 4.

Odredi sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a \mid (b+1), \qquad b \mid (c+1) \qquad \text{i} \qquad c \mid (a+1).$$

Prvo rješenje.

Promotrimo prvo slučaj kad je a najmanji od tri promatrana broja, tj. $a \leqslant b$ i $a \leqslant c$.

Budući da b dijeli $c+1$, slijedi $b \leqslant c+1$, te analogno $c \leqslant a+1$. Iz toga zaključujemo

$$a \leqslant b \leqslant c+1 \leqslant a+2.$$

Razlikujemo tri slučaja: $b = a$, $b = a+1$ i $b = 2$.

Ako je $b = a$, onda iz $a|(a+1)$ slijedi $a|1$, pa je $a = 1$ i $b = 1$. Iz $c|(a+1)$ slijedi $c|2$, tj. $c = 1$ i $c = 2$. Provjerom vidimo da trojke $(1, 1, 1)$ i $(1, 1, 2)$ zadovoljavaju sva tri uvjeta.

Ako je $b = a+1$, onda iz $a|(a+2)$ slijedi $a|2$, pa je $a = 1$ ili $a = 2$. Ako je $a = 1$, onda je $b = 2$ i vrijedi $c|2$, tj. $c = 1$ ili $c = 2$. Trojka $(1, 2, 1)$ je rješenje, ali trojka $(1, 2, 2)$ ne zadovoljava uvjet $b|(c+1)$. Ako je $a = 2$, onda je $b = 3$ i vrijedi $c|3$, tj. $c = 1$ ili $c = 3$. U trojki $(2, 3, 1)$ prvi broj nije najmanji, ali ni trojka $(2, 3, 3)$ nije rješenje jer ne zadovoljava uvjet $b|(c+1)$.

Ako je $b = a+2$, onda iz $a|(a+3)$ slijedi $a|3$, pa je $a = 1$ ili $a = 3$. Ako je $a = 1$, onda je $b = 3$ i opet vrijedi $c|2$. Trojka $(1, 3, 1)$ nije rješenje, ali trojka $(1, 3, 2)$ je rješenje. Ako je $a = 3$, onda je $b = 5$ i vrijedi $c|4$. Budući da je $a \leqslant c$, mora biti $c = 4$. Trojka $(3, 5, 4)$ zaista je rješenje.

Analogno dobivamo rješenja u slučajevima kad je b ili c najmanji. Sva rješenja su $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 5, 4)$, $(4, 3, 5)$ i $(5, 4, 3)$.

Napomena: Rješenje možemo započeti na sličan način tako da prvo zaključimo da iz $c|(a+1)$ slijedi $c \leqslant a+1$, tj. vrijedi

$$a \leqslant c \leqslant a+1.$$

Tada razlikujemo dva slučaja: $c = a$ i $c = a+1$, te u drugom slučaju promatramo mogućnosti $b = a$, $b = a+1$ i $b = a+2$.

Drugo rješenje.

Prema uvjetima zadatka postoje prirodni brojevi k i ℓ takvi da je

$$b+1=ka, \qquad \text{i} \qquad c+1=\ell b=\ell(ka-1).$$

Još imamo i treći uvjet $c \mid a+1$, iz kojeg slijedi $c \leqslant a+1$, tj. $\ell(ka-1)-1 \leqslant a+1$. Zaključujemo da vrijedi

$$a(\ell k-1) \leqslant \ell+2.$$

Ako je $k \geqslant 2$, onda je

$$2\ell-1 \leqslant (\ell k-1)a \leqslant \ell+2,$$

iz čega slijedi $\ell \leqslant 3$.

Za $\ell=1$, imamo uvjet $(k-1)a \leqslant 3$, pa je $k \leqslant 4$.

Za $k=2$, imamo mogućnosti $a=1$, $a=2$ i $a=3$. U tim slučajevima dobivamo redom trojke $(a,b,c)=(1,1,1)$, $(a,b,c)=(2,3,2)$ i $(a,b,c)=(3,5,4)$. Provjerom utvrđujemo da su $(1,1,1)$ i $(3,5,4)$ rješenja, ali $(2,3,2)$ nije.

Za $k=3$ i $k=4$ mora vrijediti $a=1$. Tako dobivamo trojke $(1,2,1)$ i $(1,3,2)$, za koje možemo direktno utvrditi da su rješenja.

Za $\ell=2$, imamo uvjet $(2k-1)a \leqslant 4$, pa je $k=2$ i $a=1$. To opet daje trojku $(1,1,1)$.

Za $\ell=3$, imamo uvjet $(3k-1)a \leqslant 5$, pa je $k=2$ i $a=1$. To daje trojku $(1,1,2)$, što je još jedno rješenje.

Ako je $k=1$, onda je

$$(\ell-1)a \leqslant \ell+2,$$

pa mora vrijediti $a=1$ ili

$$\ell \leqslant \frac{a+2}{a-1}=1+\frac{3}{a-1}.$$

No, $a=1$ i $k=1$ povlače da je $b=0$, što nije moguće.

Za $a=2$, dobivamo $b=1$ i $\ell \leqslant 4$. Nije moguće da je $\ell=1$ jer je $c+1=\ell b$. Za $\ell=2,\ 3,\ 4$ redom imamo $c=1,\ 2,\ 3$. Provjerom utvrđujemo da $(2,1,1)$ i $(2,1,3)$ jesu rješenja, a $(2,1,2)$ nije.

Za $a=3$ i $a=4$, slijedi $\ell \leqslant 2$. Tako dobivamo trojke $(3,2,1)$, $(3,2,3)$, $(4,3,2)$ i $(4,3,5)$, od kojih prva i zadnja trojka zadovojaju uvjete, ali ostale ne.

Za $a \geqslant 5$, slijedi $\ell=1$. U tom slučaju je $b+1=a$ i $c+1=b$, iz čega zaključujemo da je $a=c+2$. Iz trećeg uvjeta slijedi $c|(c+3)$, odnosno $c|3$. Ako je $c=1$, onda je $b=2$ i $a=3$, što je rješenje koje smo već pronašli. Ako je $c=3$, onda je $b=4$ i $a=5$, što je također rješenje.

Napomena: Možemo započeti rješenje i uvođenjem prirodnih brojeva k i ℓ takvih da vrijedi $b+1=ak$ i $a+1=c\ell$.

Tada $(c\ell-1)k+1$ dijeli $c+1$, iz čega slijedi $(cl-1)k+1 \leqslant c+1$, tj. $ck \leqslant clk \leqslant c+k$.

Ova nejednakost vrijedi samo za $\ell=1$, te mora vrijediti $(c-1)(k-1) \leqslant 1$. Dakle, ili je $c=1$ ili je $k=1$ ili je $c=k=2$. Ti slučajevi nam daju svih deset trojki kao u prethodnim rješenjima.