HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 13. svibnja 2023.

Zadatak 1.

Neka je c prirodan broj. Pretpostavimo da je $x_1, x_2, \ldots$ (beskonačan) strogo rastući niz prirodnih brojeva takav da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$x_n \mid n^2 + c.$$

Dokaži da postoji prirodan broj M takav da je $x_n = n^2 + c$ za svaki $n \geqslant M$.

Rješenje.

Za prirodan broj n, definiramo

$$y_n = \frac{n^2 + c}{x_n}.$$

Dokažimo da vrijedi $y_{n+1} \leqslant y_n$ za svaki prirodan broj n.

Pretpostavimo da je $y_{n+1} > y_n$ za neki n. Tada je

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + c &= x_{n+1} y_{n+1} \\
&\geqslant (x_n + 1)(y_n + 1) \\
&= x_n y_n + x_n + y_n + 1 \\
&= n^2 + c + x_n + y_n + 1 \\
&\geqslant n^2 + c + 2\sqrt{n^2 + c} + 1 \\
&> n^2 + c + 2n + 1,
\end{aligned}$$

što je kontradikcija. U četvrtom redu smo koristili AG nejednakost,

$$x_n + y_n \geqslant 2\sqrt{x_n y_n} = 2\sqrt{n^2 + c}.$$

Dakle, $y_{n+1} \leqslant y_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Onda je $(y_n)_n$ padajući niz prirodnih brojeva, pa postoje prirodni brojevi K i M takvi da je $y_n = K$ i $x_n = \frac{n^2+c}{K}$ za svaki $n \geqslant M$.

Onda $K \mid n^2 + c$ za sve osim konačno mnogo n, ali tada za sve osim konačno mnogo n vrijedi i

$$\begin{aligned}
K &\mid ((n+1)^2 + c) - (n^2 + c) = 2n + 1, \\
K &\mid ((n+2)^2 + c) - ((n+1)^2 + c) = 2n + 3.
\end{aligned}$$

Kako su $2n + 1$ i $2n + 3$ relativno prosti za sve n, iz toga slijedi $K = 1$.

Zaključujemo da je $x_n = n^2 + c$ za sve $n \geqslant M$.

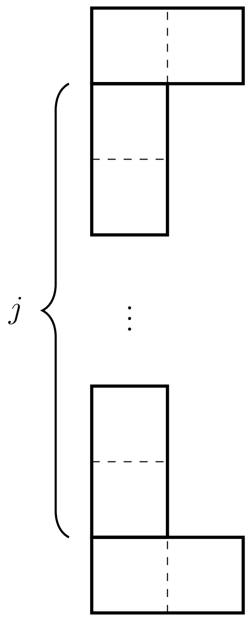
Zadatak 2.

Za prirodne brojeve n i k, promatramo popločavanja ploče dimenzija $2n \times k$ dominima dimenzija 2×1. U jednom potezu je dopušteno izabrati 2×2 kvadrat na ploči koji je potpuno prekriven s dva domina, te okrenuti ga za $90°$ oko središta. Kažemo da su dva popločavanja *ekvivalentna* ako je od jednog moguće dobiti drugog primjenom konačno mnogo dopuštenih poteza. Za koje parove (n, k) su sva popločavanja ekvivalentna?

Rješenje.

Dokazat ćemo da je moguće nizom poteza iz svakog popločavanja doći do popločavanja u kojem su sve pločice vertikalno orijentirane. Iz toga odmah slijedi da su svaka dva popločavanja ekvivalentna jer je svaki niz poteza invertibilan.

Definiramo potkovu veličine j kao dio popločavanja koji se sastoji od horizontalno orijentirane pločice A koja pokriva po jedno polje u i-tom stupcu i jedno polje u $i+1$-tom stupcu, j vertikalno orijentiranih pločica koje su jedna ispod druge u i-tom stupcu direktno ispod pločice A, i horizontalno orijentirane pločice B koja je direktno ispod spomenutih vertikalno orijentiranih pločica i pokriva po jedno polje u i-tom stupcu i jedno polje u $i + 1$-tom stupcu.



Dokažimo prvo da je jedino popločavanje bez potkova ono u kojem su sve pločice vertikalne.

Pretpostavimo da postoji horizontalna pločica u popločavanju bez potkova i promotrimo najlijeviju takvu pločicu, recimo da pokriva polja u i-tom i $i + 1$-tom stupcu. Tada u i-tom stupcu mora postojati još jedna takva pločica jer ima parno polja u svakom stupcu. Ta pločica zbog minimalnosti od i pokriva i jedno polje u $i + 1$-tom stupcu.

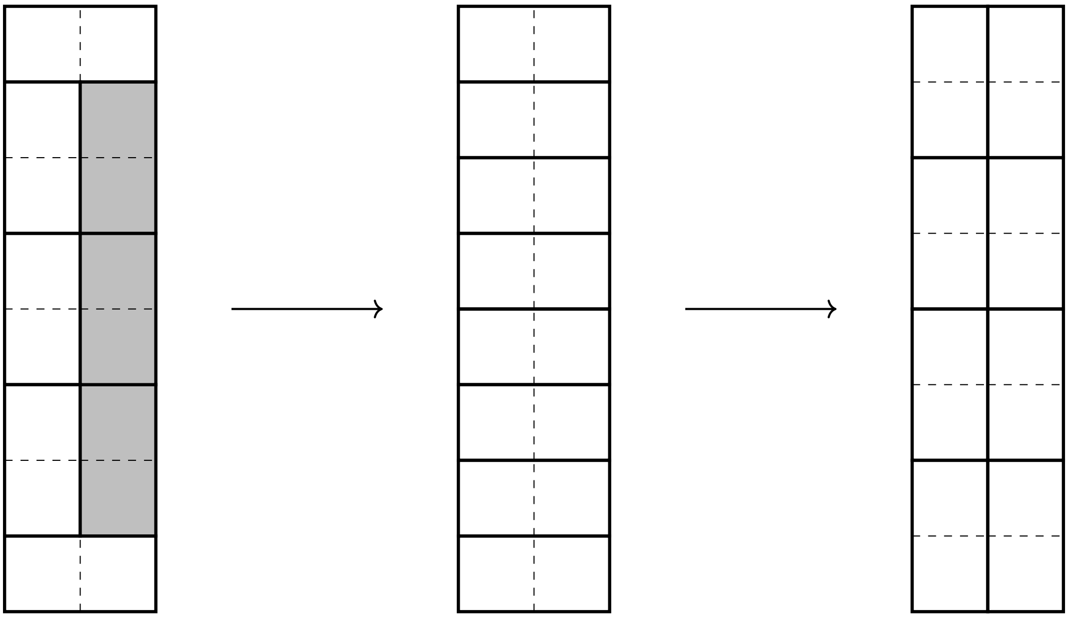
Tada dvije horizontalne pločice koje pokrivaju polja u i-tom i $i + 1$-tom stupcu između kojih nema drugih horizontalnih pločica čine potkovu zajedno s vertikalnim pločicama u i-tom stupcu između njih, pa je tvrdnja dokazana.

Pretpostavimo sada da postoji popločavanje koje nije ekvivalentno popločavanju samo s vertikalnim pločicama, i promotrimo takvo popločavanje koje ima minimalan broj horizontalnih pločica.

U takvom popločavanju, promotrimo najmanju potkovu, recimo da je veličine j, i recimo da se nalazi u i-tom i $i+1$-tom stupcu, te da su A i B horizontalne pločice te potkove.

Tada su sve pločice u $i+1$-tom stupcu koje su između A i B nužno vertikalne, jer bismo inače imali manju potkovu u $i+1$-tom i $i+2$-tom stupcu. Onda između A i B imamo j vertikalno popločanih 2×2 podkvadrata.

Prvo promijenimo orijentaciju tih podkvadrata. Onda A, B i novopromijenjene pločice čine $j+1$ horizontalno popločanih podkvadrata. Sada promijenimo orijentaciju svih tih podkvadrata i dobili smo $j+1$ vertikalno popločanih podkvadrata. Na slici ispod su prikazani spomenuti potezi za $j=3$.



Time smo smanjili broj horizontalnih pločica u popločavanju. To je kontradikcija s minimalnošću, pa zaključujemo da ne postoji popločavanje koje nije ekvivalentno popločavanju samo s vertikalnim pločicama.

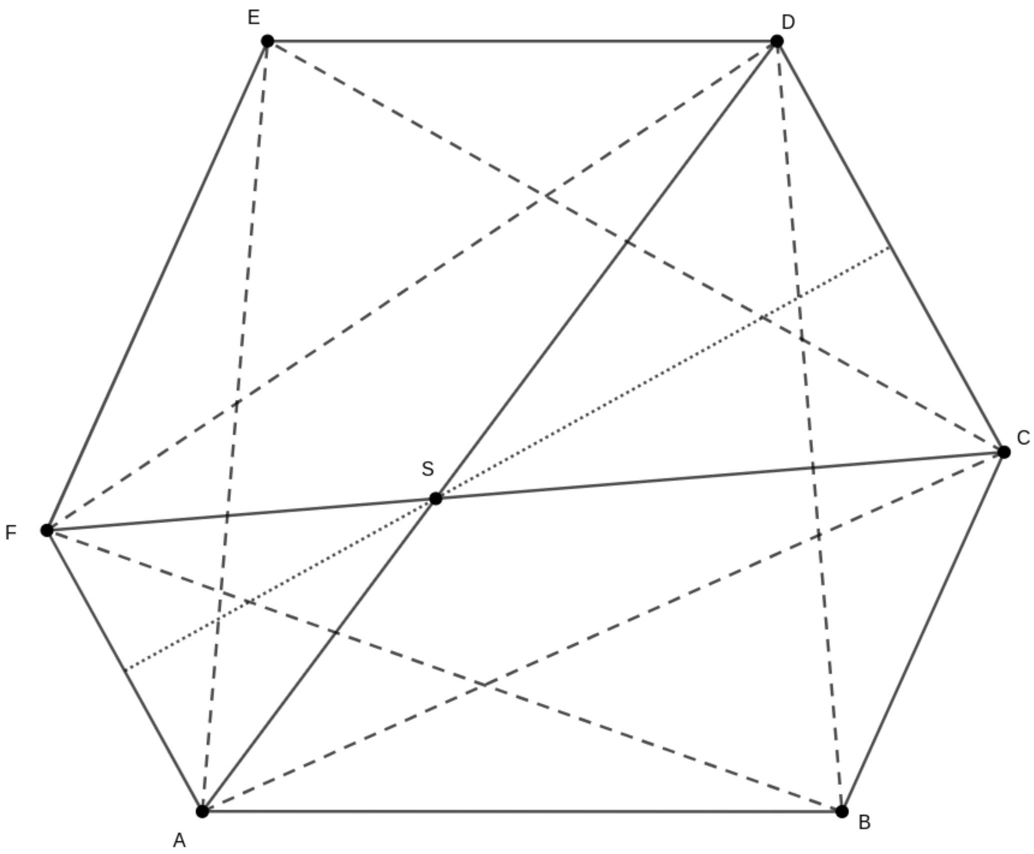
Zadatak 3.

Zadan je konveksan šesterokut $ABCDEF$ kojemu su svake dvije nasuprotne stranice međusobno različitih duljina i paralelne ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ i $CD \parallel FA$). Ako je $|AE| = |BD|$ i $|BF| = |CE|$, dokaži da se šesterokutu $ABCDEF$ može opisati kružnica.

Rješenje.

$ABDE$ je jednakokračan trapez pa su mu dijagonale jednake duljine, tj. $|AD| = |BE|$. Analogno, u jednakokračnom trapezu $BCEF$ vrijedi $|BE| = |CF|$. Iz ovih dviju jednakosti slijedi $|AD| = |CF|$, pa i trapez $FACD$ ima dijagonale jednakih duljina.

Pokažimo da je on jednakokračan. Ako mu se dijagonale AD i CF sijeku u točki S, zbog $CD \parallel FA$ vrijedi $CDS \sim FAS$. Kad bi bilo $|SA| > |SF|$, zbog navedene sličnosti bilo bi i $|SD| > |SC|$, pa bismo zbrajanjem ovih nejednakosti imali $|AD| > |CF|$, što je neistina. Analogno eliminiramo slučaj $|SA| < |SF|$. Dakle, $|SA| = |SF|$, pa je i $\sphericalangle SAF = \sphericalangle SFA$, tj. $\sphericalangle DAF = \sphericalangle CFA$. Sad je $\triangle DAF \cong \triangle CFA$ po S-K-S poučku, što znači da je i trapez $FACD$ jednakokračan.



Poznato je da su jednakokračni trapezi tetivni. Želimo dokazati da se kružnice $k(ABDE)$, $k(BCEF)$ i $k(FACD)$ podudaraju. Pretpostavimo da su one različite. Njihove radikalne osi BE, CF i AD sijeku se u istoj točki S. Budući da su te osi ujedno i dijagonale jednakokračnih trapeza, one se sijeku na simetralama njihovih osnovica - primjerice, u trapezu $FACD$ točka S leži na simetralama stranica $\overline{CD}$ i $\overline{FA}$. Odatle slijedi $|SC| = |SD|$, $|SF| = |SA|$ i analogno $|SA| = |SB|$, $|SB| = |SC|$, $|SD| = |SE|$ i $|SE| = |SF|$ pa je S središte kružnice $ABCDEF$.

Zadatak 4.

Za pozitivan racionalan broj q kažemo da je *sjajan* ako za svaki pozitivan racionalan broj x postoje cijeli broj $n \geqslant 0$ i cijeli brojevi $a_0, \ldots, a_n$ takvi da je

$$x = q^{a_0} \cdot (q+1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (q+n)^{a_n}.$$

Odredi sve sjajne brojeve.

Rješenje.

Pokazat ćemo da su sjajni brojevi svi prirodni brojevi i brojevi oblika $\frac{a}{2}$ gdje je a neparan prirodan broj.

Fiksirajmo q. Za pozitivan racionalan broj x kažemo da je *prikaziv* ako ga je moguće zapisati u navedenom obliku.

Primijetimo prvo da ako su x, y prikazivi sa nizovima eksponenata $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ i $b = (b_0, b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots)$, tada su i xy te x/y prikazivi s nizovima

$$a + b = (a_0 + b_0, \ldots)$$

$$a - b = (a_0 - b_0, \ldots)$$

pa je nužno i dovoljno pokazati da su svi prosti brojevi prikazivi.

Pokažimo prvo da su svi prirodni brojevi sjajni. Međutim, ako je p prost i q prirodan, p možemo prikazati kao

$$p = q^{-1} \cdot (q + (p-1)q)^1$$

pa tvrdnja očito slijedi.

Pokažimo da su pozitivni racionalni brojevi oblika $q = \frac{a}{2}$ sjajni (za a neparan). Sada za neparne proste brojeve imamo

$$p = \left(\frac{a}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{p-1}{2} \cdot a\right)^1$$

te su oni prikazivi, dok možemo naći

$$2 = \left(\frac{a}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{2} + 1\right)^{\cdot} \left(\frac{a}{2} + \frac{a^2 + a}{2}\right)$$

i gotovi smo.

Ako je pak $q = \frac{a}{b}$ gdje su a, b relativno prosti i vrijedi $b > 2$, uzmimo neki prirodan broj m koji daje ostatak $b - 1$ pri dijeljenju sa b i pokažimo da nije prikaziv.

Pretpostavimo suprotno, da imamo

$$m = \left(\frac{a}{b}\right)^{a_0} \cdot \left(\frac{a+b}{b}\right)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a+nb}{b}\right)^{a_n}$$

primijetimo da su svi brojevi oblika $a + kb$ za $0 \leqslant k \leqslant n$ relativno prosti sa b, a isto vrijedi za (prirodan) m sa lijeve strane, stoga mora biti

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0,$$

jer bi inače brojnik ili nazivnik od umnoška bio djeljiv s b, a to nije slučaj. Međutim, tada se jednakost pojednostavljuje u

$$m = a^{a_0} \cdot (a+b)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (a+nb)^{a_n}$$

i promotrimo li ju modulo b imamo

$$b - 1 \equiv m \equiv a^{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} \equiv a^0 \equiv 1 \pmod{b}$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $b > 2$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 14. svibnja 2023.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x, y vrijedi

$$f(x + yf(x+1)) = f(x) + f(xy) + 1.$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $x = y = 0$ u početnu jednakost dobivamo $f(0) = -1$.

Uvrštavanjem $x = 0$ u početnu jednakost dobivamo da za sve $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(yf(1)) = -1.$$

Ako je $f(1) \neq 0$, tada izraz $yf(1)$ poprima sve realne vrijednosti, pa je $f(x) = -1$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Direktnom provjerom vidimo da ta funkcija $f(x) = -1$ jest rješenje. Neka je nadalje $f(1) = 0$.

Pretpostavimo da za neki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x+1) \neq x$. Za takav x uzmimo $y = \dfrac{x}{x - f(x+1)}$ (jer za takav y vrijedi $x + yf(x+1) = xy$). Uvrštavanjem takvih x i y u početnu jednakost dobivamo

$$\begin{aligned} f(xy) &= f(x) + f(xy) + 1 \\ f(x) &= -1. \end{aligned}$$

Zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x+1) = x$ ili $f(x) = -1$.

Posebno, za $x = 1$, zbog $f(1) = 0$ mora biti $f(2) = 1$. Uvrštavanjem $x = 1$ u početnu jednakost dobivamo $f(y+1) = f(y) + 1$.

Pretpostavimo da za neki $x \neq 0$ vrijedi $f(x) = -1$. Iz zaključka $f(y+1) = f(y)+1$ prvo slijedi $f(x+1) = 0$, pa $f(x+2) = 1$. Kako za $x+1$ vrijedi $f(x+2) = x+1$ ili $f(x+1) = -1$, zaključujemo da je nužno

$$1 = f(x+2) = x+1,$$

odakle je $x = 0$, čime dobivamo kontradikciju.

Dakle, za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x+1) = x$ (uključujući i $x = 0$, što smo provjerili ranije), odnosno dobivamo rješenje $f(x) = x - 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Direktnom provjerom vidimo da funkcija zadovoljava uvjete zadatka.

Tražene funkcije su dane pravilima $f(x) = -1$ i $f(x) = x - 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.

Neka je $k \geqslant 2$ prirodan broj. Odredi najmanji prirodni broj $n \geqslant k+1$ takav da postoji skup od n (različitih) realnih brojeva u kojem koji god broj da izaberemo možemo pronaći još k drugih brojeva u skupu čiji je zbroj jednak izabranom broju.

Rješenje.

Neka je $S(k)$ skup koji zadovoljava svojstva iz zadatka s elementima $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Vrijedi

$$a_1 \geqslant a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1} \qquad \text{i} \qquad a_{n-k} + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} \geqslant a_n.$$

Za $n = k+1$ bi vrijedilo

$$a_1 \geqslant a_2 + a_3 + \ldots + a_n > a_1 + \ldots a_{n-2} + a_{n-1} \geqslant a_n,$$

što je u kontradikciji s $a_1 < a_n$.

Za $n = k+2$ bi vrijedilo

$$a_1 \geqslant a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \geqslant a_n,$$

što je također u kontradikciji s $a_1 < a_n$.

Za $n = k+3$ bi vrijedilo

$$a_1 \geqslant a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} \qquad \text{i} \qquad a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} \geqslant a_n,$$

pa zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$a_1 + a_{n-1} \geqslant a_2 + a_n,$$

što je u kontradikciji s $a_1 < a_2$ i $a_{n-1} < a_n$.

Matematičkom indukcijom po k ćemo pokazati da postoji skup $S(k)$ s traženim svojstvom i $n = k+4$ elemenata.

Za bazu indukcije, definiramo

$$S(2) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\} \quad \text{i} \quad S(3) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Kako je $1 = 3 + (-2)$, $2 = 3 + (-1)$, $3 = 2 + 1$, te za negativne brojeve možemo analogno dobiti zapise promjenom predznaka svih pribrojnicima, slijedi da $S(2)$ zadovoljava tražena svojstva, a dodavanjem 0 lako se provjeri da i $S(3)$ zadovoljava svojstva.

Nadalje, ako je $S(k) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ skup s traženim svojstvom i uređajem kao na početku rješenja, definiramo

$$S(k+2) = S(k) \cup \{-t, t\}$$

pri čemu je $t = a_{n-1} + a_n$. Kako je $t > a_n = -a_1$, $S(k+2)$ je simetrični skup s $k+6$ elemenata.

Elemente skupa $S(k)$ možemo zapisati kao zbroj preostalih $k+2$ elementa skupa $S(k+2)$ tako da u zapis kao zbroj od k elemenata skupa $S(k)$ dodamo t i $-t$.

Budući da vrijedi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$, možemo zapisati

$$t = -a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-2} = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3,$$

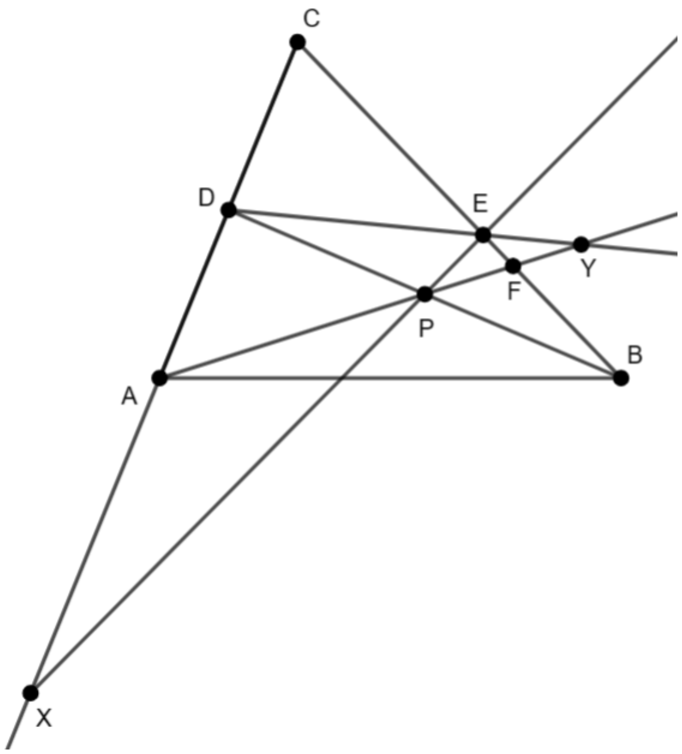
te analogno zapisujemo $-t$ kao skup $k+2$ elementa skupa $S(k)$. Time je proveden korak indukcije.

Dakle, odgovor je $n = k+4$.

Zadatak 3.

Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|BC| : |AC| = 3 : 2$. Neka je D polovište stranice $\overline{AC}$, a P polovište dužine $\overline{BD}$. Na pravcu AC dana je točka X tako da je $|AX| = |BC|$, pri čemu je A između X i C. Pravac XP siječe stranicu $\overline{BC}$ u E. Pravac DE siječe pravac AP u Y. Dokaži da točke A, X, Y, E leže na jednoj kružnici ako i samo ako je $|AB| = |BC|$.

Prvo rješenje.



Neka je $F = AP \cap BC$.

Menelajev poučak na $\triangle CDB$ i pravac PF:

$$|CA| \cdot |DP| \cdot |BF| = |DA| \cdot |PB| \cdot |CF| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |CF| = 2|BF|.$$

Koristili smo $|CA| = 2|DA|$ i $|DP| = |PB|$.

Menelajev poučak na $\triangle FCA$ i pravac DP:

$$|CB| \cdot |FP| \cdot |AD| = |BF| \cdot |AP| \cdot |CD| \Leftrightarrow$$
$$|CB| \cdot |FP| = |BF| \cdot |AP| \Leftrightarrow$$
$$|AP| = 3|FP|.$$

Koristili smo $|AD| = |CD|$ i $|CB| = 3|BF|$.

Menelajev poučak na $\triangle CAF$ i pravac EP:

$$\begin{aligned}
|CX| \cdot |AP| \cdot |EF| = |AX| \cdot |PF| \cdot |EC| &\Leftrightarrow \\
3|CX| \cdot |EF| = |AX| \cdot |EC| &\Leftrightarrow \\
|EF| = \frac{|AX| \cdot |EC|}{3|CX|} = \frac{a|EC|}{3(a+b)}&.
\end{aligned}$$

Koristili smo $|CA| = 2|DA|$ i $|DP| = |PB|$.

Imamo:

$$\begin{aligned}
|EF| + |EC| = |CF| = \frac{2a}{3} &\Leftrightarrow \\
|EC|(1 + \frac{a}{3(a+b)}) = \frac{2a}{3} &\Leftrightarrow \\
|EC| = \frac{2a(a+b)}{4a+3b}&.
\end{aligned}$$

Imamo, uz $a = 3k$, $b = 2k$:

$$\begin{aligned}
|CD| \cdot |CX| &= \frac{b(a+b)}{2} = 5k^2. \\
|CE| \cdot |CB| &= \frac{2a^2(a+b)}{4a+3b} = 5k^2.
\end{aligned}$$

Dakle, $|CD| \cdot |CX| = |CE| \cdot |CB|$, pa je $DXBE$ tetivan po obratu potencije točke. Zato je $\sphericalangle DXE = \sphericalangle DBE$ i $\sphericalangle BEY = \sphericalangle BXD$.

Sada dovršavamo:

$AXYE$ tetivan $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle DBE = \sphericalangle AXE = \sphericalangle AYE$ $\Leftrightarrow$ $PBYE$ tetivan $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle BXD = \sphericalangle BEY = \sphericalangle BPY$ $\Leftrightarrow$ $AXBP$ tetivan $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle EBP = \sphericalangle EXD = \sphericalangle ABP$ $\Leftrightarrow$ $\overline{BD}$ je ujedno simetrala kuta i težišnica $\Leftrightarrow$ $|AB| = |BC|$.

Drugo rješenje.

Označimo $|AD| = x$. Tada je $|AC| = 2x$, $|BC| = 3x$, $|CX| = 5x$.

Prema teoremu o potenciji točke, četverokut $AXYE$ je tetivan ako i samo ako vrijedi $|DA| \cdot |DX| = |DE| \cdot |DY|$.

Primijenimo Menelajev poučak na trokut DBC i pravac XPE, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{|XD| \cdot |EC| \cdot |PB|}{|XC| \cdot |EB| \cdot |PD|} &= 1 \\
\implies \frac{|EC|}{|EB|} &= \frac{5}{4},
\end{aligned}$$

jer je $|PB| = |PD|$, $|XD| = 4x$, $|XC| = 5x$.

Onda je $|CE| = \frac{5x}{3}$, $|EB| = \frac{4x}{3}$.

Primijenimo Menelajev poučak na trokut XCE i pravac DPB, dobivamo:

$$\begin{aligned} &\frac{|XD|\cdot|CB|\cdot|EP|}{|XP|\cdot|CD|\cdot|EB|}=1 \\ &\implies |EP|=9|XP|, \end{aligned}$$

jer je $|XD|=4x$, $|CB|=3x$, $|CD|=x$, $|EB|=\frac{4x}{3}$.

Primijenimo Menelajev poučak na trokut XDE i pravac APY, dobivamo:

$$\begin{aligned} &\frac{|AX|\cdot|PE|\cdot|YD|}{|AD|\cdot|PX|\cdot|YE|}=1 \\ &\implies |YD|=3|YE|, \end{aligned}$$

jer je $|AX|:|AD|=3$ i $|PE|:|PX|=1:9$.

Stavimo $u=|EY|$ i $v=|AB|$. Onda je $|DE|=2u$, i $|DE|\cdot|DY|=6u^2$. S druge strane, $|DA|\cdot|DX|=4x^2$.

Dakle, u novim oznakama, treba dokazati

$$4x^2=6u^2 \iff 3x=v.$$

Sada primijenimo kosinusov poučak redom na trokute CDE i CAB, za kut $\gamma := \sphericalangle ACB$.

Imamo sljedeću jednakost:

$$\cos\gamma=\frac{x^2+\left(\frac{5x}{3}\right)^2-4u^2}{2x\cdot\frac{5x}{3}}=\frac{4x^2+9x^2-v^2}{2\cdot 2x\cdot 3x}.$$

Ta jednakost se pojednostavljuje u

$$3x^2+5v^2=72u^2.$$

Sada je $v=3x \iff 3x^2+5v^2=48x^2 \iff 72u^2=48x^2 \iff 6u^2=4x^2$, i tvrdnja je dokazana.

Zadatak 4.

Neka je x prirodan broj. Pretpostavimo da postoje dva relativno prosta prirodna broja m i n za koje su brojevi x^3+mx i x^3+nx kvadrati prirodnih brojeva. Dokaži da postoji beskonačan skup prirodnih brojeva S takav da su svi članovi skupa S u parovima relativno prosti, te je x^3+kx kvadrat prirodnog broja za svaki $k\in S$.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da postoje relativno prosti m i n takvi da su x^3+mx i x^3+nx potpuni kvadrati.

Dokažimo da je i x potpun kvadrat.

Neka je $d = \gcd(x, m)$, $f = \gcd(x, n)$.

Onda je $\gcd(x, x^2+m) = d$ pa su $\frac{x}{d}$ i $\frac{x^2+m}{d}$ relativno prosti, te je $\frac{x(x^2+m)}{d^2} = \frac{x}{d} \cdot \frac{x^2+m}{d}$ potpun kvadrat, pa je $\frac{x}{d}$ također potpun kvadrat. Analogno, $\frac{x}{f}$ je potpun kvadrat. Ali onda je i df potpun kvadrat jer je

$$df = \frac{x^2}{\frac{x}{d} \cdot \frac{x}{f}},$$

što je kvocijent potpunih kvadrata.

Međutim, kako su d i f relativno prosti, slijedi da su d i f potpuni kvadrati, pa je $x = \frac{x}{d} \cdot d$ umnožak dva kvadrata pa je kvadrat.

Neka je sada x potpun kvadrat. Onda je x^3+kx potpun kvadrat kad god je x^2+k potpun kvadrat, odnosno kad god je $k = a(a+2x)$ za neki prirodan broj a.

Sad ćemo za svaki potpun kvadrat x induktivno konstruirati niz $(y_n)_{n\geqslant 1} = (a_n(a_n+2x))_{n\geqslant 1}$ takav da su svaka dva člana niza relativno prosti, te da je svaki član niza relativno prost s $2x+1$.

Definiramo $y_1 = 2(2x+2) = 4x+4$. On je relativno prost s $2x+1$ jer je $\gcd(2x+1, 4x+4) = \gcd(2x+1, 2) = 1$.

Pretpostavimo da smo definirali y_i za sve $i < n$ za neki $n \geqslant 2$. Onda postoji prirodan broj A takav da je $Ay_1y_2 \dots y_{n-1}$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s $2x+1$.

Stavimo

$$y_n = (Ay_1y_2 \dots y_{n-1} + 1)(Ay_1y_2 \dots y_{n-1} + 2x + 1).$$

Tvrdimo da je y_n relativno prost sa svim y_i za $i < n$ te da je relativno prost s $2x+1$.

Pretpostavimo da neki prost broj dijeli y_i za $i < n$. Onda $Ay_1 \dots y_{n-1} + 1$ daje ostatak 1, a $Ay_1 \dots y_{n-1} + 2x + 1$ ostatak $2x+1$ pri dijeljenju s p, a oba ta broja nisu djeljiva s p, pa su y_i i y_n relativno prosti za $i < n$.

Nadalje, y_n je prema konstrukciji kongruentan s $2 \cdot (2x+2)$ modulo $2x+1$, što je relativno prosto s $2x+1$.

Dakle, skup $\{y_1, y_2, \dots\}$ je traženi skup brojeva.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da postoje relativno prosti m i n takvi da su x^3+mx i x^3+nx potpuni kvadrati.

Dokažimo da je i x potpun kvadrat.

Za prost broj p i prirodan broj k, sa $\nu_p(k)$ označimo najveći cijeli broj j takav da je $\frac{k}{p^j}$ cijeli broj.

Pretpostavimo da x nije potpun kvadrat. Onda postoji prost broj p takav da je $\nu_p(x)$ neparno.

Onda kako su $\nu_p(x(x^2+m)$ i $\nu_p(x(x^2+n))$ parni, slijedi $p \mid x^2+m$ i $p \mid x^2+n$. Međutim, onda $p \mid m$ i $p \mid n$, kontradikcija s relativnom prostošću m i n.

Neka je sada x potpun kvadrat. Onda je $x^3 + kx$ potpun kvadrat kad god je $x^2 + k$ potpun kvadrat, odnosno kad god je $k = a(a + 2x)$ za neki prirodan broj a.

Sad ćemo za svaki potpun kvadrat x induktivno konstruirati niz $(y_n)_{n\geqslant 1} = (a_n(a_n + 2x))_{n\geqslant 1}$ takav da su svaka dva člana niza relativno prosti.

Pretpostavimo da smo definirali y_i za sve $i < n$ za neki $n \geqslant 1$.

Neka je T skup svih prostih brojeva koji dijele $y_1 y_2 \dots y_{n-1}$.

Neka je $p \in T$. Tada postoji cijeli broj t_p takav da $t_p(t_p + 2x)$ nije djeljivo s p. Naime, ako $p \nmid 2x + 1$ uzmemo $t_p = 1$, a ako $p \mid 2x + 1$, onda $p \nmid 2x - 1$ i uzmemo $t_p = -1$.

Prema Kineskom teoremu o ostacima, postoji prirodan broj t takav da za svaki $p \in T$ vrijedi

$$t \equiv t_p \pmod{p}.$$

Stavimo $y_n = t(t + 2x)$. Tada y_n po konstrukciji nije djeljiv s ni jednim prostim faktorom od y_i za $i < n$.

Dakle, skup $\{y_1, y_2, \dots\}$ je traženi skup brojeva.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 24. svibnja 2023.

Zadatak 1.

Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ vrijedi

$$a_n - a_{n+2} \leqslant (a_{n-1} - a_{n+1}) \cdot \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_{n-1} + a_n}.$$

Dokaži da je $a_{100} \geqslant a_{102}$.

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da je $a_n \geqslant a_{n+2}$ za svaki prirodan broj n. Za prirodan broj n, definiramo $b_n = a_n + a_{n+1}$. Tada je uvjet iz zadatka ekvivalentan sa

$$b_n - b_{n+1} \leqslant (b_{n-1} - b_n) \cdot \frac{b_{n+1}}{b_{n-1}},$$

a dijeljenjem obje strane s $b_n b_{n+1}$ dobivamo

$$\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \leqslant \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}}.$$

Pretpostavimo da za neki $n \geqslant 2$ vrijedi $b_n > b_{n-1}$. Tada je $\frac{1}{b_n} < \frac{1}{b_{n-1}}$. Neka je $c = \frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b_n}$. Tada iz uvjeta imamo

$$\frac{1}{b_{n+j}} - \frac{1}{b_{n+j-1}} \leqslant -c$$

za svaki $j \geqslant 1$. Međutim, onda je

$$\frac{1}{b_{n+j}} \leqslant \frac{1}{b_{n+j-1}} - c \leqslant \frac{1}{b_{n+j-2}} - 2c \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{b_n} - jc.$$

No, za $j > \frac{1}{b_n c}$, onda dobivamo $\frac{1}{b_{n+j}} < 0$, što je kontradikcija. Zaključujemo da za svaki $n \geqslant 2$ vrijedi $b_n \leqslant b_{n-1}$, što je ekvivalentno s $a_{n-1} \leqslant a_{n+1}$.

Posebno, za $n = 101$, dobivamo $a_{100} \leqslant a_{102}$.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, onda za svaki n osim konačno mnogo vrijedi $a_{n+2} > a_n$ zbog uvjeta zadatka, pa bez smanjenja općenitosti neka vrijedi $a_{n+2} > a_n$ za sve n.

Tada za sve $n \geqslant 2$ vrijedi da je

$$\frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+2} + a_{n+1}} \geqslant \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_{n+1} + a_n},$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+2} + a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} + a_n}{a_n + a_{n-1}} \leqslant 2.$$

Definiramo $c_n = \frac{a_{n+1}+a_n}{a_n+a_{n-1}}$ za $n \geqslant 2$. Kako je $a_{n+1} > a_{n-1}$, vrijedi $c_n > 1$, a uvjet zadatka je ekvivalentan s

$$\frac{1}{c_{n+1}} + c_n \leqslant 2 \qquad \text{za} \qquad n \geqslant 2.$$

Definiramo niz $(y_k)_k$ sa $y_1 = 2$, $y_{k+1} = 2 - \frac{1}{y_k}$ za $k > 1$. Dokažimo indukcijom po k da je $c_n < y_k$ za svaki k i za svaki n. Za $k = 1$ to je očito iz uvjeta.

Za korak indukcije, primijetimo da za svaki n iz $c_{n+1} < y_k$ slijedi $1/c_{n+1} > 1/y_k$, pa je

$$c_n < 2 - 1/y_k = y_{k+1}.$$

Dokažimo sada da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji k takav da je $y_k < 1 + \varepsilon$.

Pretpostavimo suprotno, da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $y_k \geqslant 1 + \varepsilon$ za svaki k. Primijetimo da je $y_{k+1} - 1 = y_k(y_k - 1) \geqslant (1 + \varepsilon)(y_k - 1)$, pa iteriranjem te nejednakosti dobivamo

$$y_{k+1} - 1 \geqslant (1 + \varepsilon)^k (y_1 - 1) = (1 + \varepsilon)^k,$$

što je nemoguće jer $(1 + \varepsilon)^k$ poprima proizvoljno velike vrijednosti, a $y_{k+1} < 2$ za svaki k.

Uzmimo sada $\varepsilon > 0$ takav da je $c_2 = 1 + \varepsilon$. Onda je $c_2 = 1 + \varepsilon < y_k$ za svaki prirodan broj k, ali za k takav da je $y_k < 1 + \varepsilon$ dobivamo kontradikciju.

Dakle, $a_{n+2} \leqslant a_n$ za svaki prirodan broj n.

Zadatak 2.

Neka je n prirodan broj. Na početku je n kamenčića raspoređeno u n hrpa (u svakoj hrpi je po jedan kamenčić). U pojedinom potezu biramo dvije hrpe, uzimamo jednak broj kamenčića s tih dviju hrpa te od tih kamenčića stvaramo novu hrpu. U ovisnosti o n, odredi najmanji mogući broj nepraznih hrpa nakon nekog konačnog niza poteza.

Prvo rješenje.

Tvrdimo da je traženi najmanji broj hrpa jednak 1 ako je n potencija broja 2 te 2 inače.

Tijekom čitavog rješenja, poteze ćemo promatrati u obrnutom redoslijedu. Naime, zamislimo da imamo neke hrpe kamenčića te da u svakom potezu smijemo odabrati hrpu s parnim brojem kamenčića, podijeliti je na dva jednaka dijela te kamenčiće iz svakog dijela preseliti na drugu hrpu, po mogućnosti stvarajući pritom nove hrpe (možemo pretpostaviti da u svakom trenutku imamo beskonačno mnogo praznih hrpa). Za danu konfiguraciju hrpa $\mathcal{C}$, s $|\mathcal{C}|$ označavat ćemo broj nepraznih hrpa u $\mathcal{C}$. Za dane konfiguracije $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, reći ćemo da je $\mathcal{C}_2$ *dohvatljiva* iz $\mathcal{C}_1$ ako $\mathcal{C}_2$ možemo dobiti konačnim nizom poteza počevši od $\mathcal{C}_1$. Za konfiguraciju $\mathcal{C}$ reći ćemo da je

- *jednostavna* ako svaka neprazna hrpa u $\mathcal{C}$ sadrži po jedan kamenčić;
- *dobra* ako barem jedna neprazna hrpa u $\mathcal{C}$ ima paran broj kamenčića i brojevi kamenčića po hrpama u $\mathcal{C}$ nemaju neparan zajednički djelitelj veći od 1 ($\mathcal{C}$ ima *svojstvo neparnog djelitelja*);
- *rješiva* ako postoji jednostavna konfiguracija koja je dohvatljiva iz $\mathcal{C}$.

Dakle, trebamo naći najmanji broj nepraznih hrpa u rješivoj konfiguraciji koja se sastoji od n kamenčića. To ćemo učiniti tako da karakteriziramo rješive konfiguracije.

Lema 1. Neka je $\mathcal{C}$ konfiguracija hrpa. Neka je $\mathcal{C}'$ konfiguracija dobivena primjenom jednog poteza na $\mathcal{C}$. Tada

(i) ako $\mathcal{C}'$ ima svojstvo neparnog djelitelja, tada ga ima i $\mathcal{C}$;

(ii) obrat tvrdnje (i) vrijedi ukoliko $|\mathcal{C}'| \geqslant |\mathcal{C}|$.

Dokaz. Pretpostavimo da se potez sastoji od podjele hrpe veličine $2a$ i dodavanja po a kamenčića na hrpe veličina b i c. Dodatna pretpostavka $|\mathcal{C}'| \geqslant |\mathcal{C}|$ tvrdnje (ii) ekvivalentna je s time da je barem jedan od b, c jednak nuli.

(i) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neparan cijeli broj $d > 1$ takav da je veličina svake hrpe u $\mathcal{C}$ djeljiva s d. Posebno, $2a$, b, c višekratnici su od d pa kako je d neparan, slijedi da su a, b, c djeljivi s d. Dakle, $a+b$ i $a+c$ djeljivi su s d pa d dijeli veličine svih hrpa u $\mathcal{C}'$, što je kontradikcija.

(ii) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji cijeli broj $d > 1$ takav da je veličina svake hrpe u $\mathcal{C}'$ djeljiva s d. Posebno, d dijeli $a+b$ i $a+c$ pa kako je barem jedan od tih brojeva jednak a, slijedi da d dijeli a. No tada d dijeli svaka tri broja a, b and c pa zasigurno dijeli brojeve $2a$, b, c. Dakle, $\mathcal{C}$ nema svojstvo neparnog djelitelja, kontradikcija. □

Korolar 2. Ako je $\mathcal{C}_2$ dohvatljiva iz $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ ima svojstvo neparnog djelitelja, tada ga ima i $\mathcal{C}_1$. Posebno, svaka rješiva konfiguracija ima svojstvo neparnog djelitelja.

Lema 3. Neka je $\mathcal{C}$ dobra konfiguracija. Tada postoji konfiguracija $\mathcal{C}'$ sa sljedećim svojstvima:

- $\mathcal{C}'$ je dohvatljiva iz $\mathcal{C}$ i $|\mathcal{C}'| > |\mathcal{C}|$;
- $\mathcal{C}'$ je dobra ili jednostavna.

Dokaz. Neka je konfiguracija *terminalna* ako je protuprimjer za tvrdnju.

Tvrdnja. Neka su $a_1, \ldots, a_k$ veličine nepraznih hrpa u terminalnoj konfiguraciji $\mathcal{C}$. Tada postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je a_i paran. Nadalje, za sve $t \geqslant 1$ vrijedi $a_j \equiv \frac{a_i}{2} \pmod{2^t}$ za sve $j \neq i$.

Dokaz tvrdnje. Kako je konfiguracija dobra, mora postojati $i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je a_i paran. Nadalje, ako podijelimo hrpu veličine a_i na dvije jednake hrpe, dobivena konfiguracija po pretpostavci neće biti dobra. Prema tvrdnji (ii) iz Leme 1, to je jedino moguće ako su $\frac{a_i}{2}$ i a_j za sve $j \neq i$ neparni. Drugu tvrdnji dokazujemo indukcijom po t, pri čemu smo slučaj $t = 1$ već dokazali. Ako je $t \geqslant 2$, podijelimo hrpu veličine a_i na dva jednaka dijela te premjestimo jedan od tih dijelova na hrpu veličine a_j. Kako su $\frac{a_i}{2}$ i a_j neparni, $a_j + \frac{a_i}{2}$ je paran pa po tvrdnji (ii) iz Lema 2 slijedi da je dobivena konfiguracija $\mathcal{C}'$ dobra. Dakle, $\mathcal{C}'$ mora biti terminalna, pa po pretpostavci indukcije imamo $\frac{a_i}{2} \equiv \frac{1}{2}(a_j + \frac{a_i}{2}) \pmod{2^{t-1}}$, odakle $a_j \equiv \frac{a_i}{2} \pmod{2^t}$. Time je tvrdnja dokazana. □

Pretpostavimo da postoji konfiguracija kao u Tvrdnji. Tada slijedi da postoji $i \in \{1, \ldots, k\}$ te neparan prirodan broj x takav da $a_i = 2x$ te $a_j = x$ za sve $j \neq i$. Iz svojstva neparnog djelitelja sada slijedi $x = 1$. No tada podjelom hrpe veličine 2 na dvije hrpe veličine 1 možemo dobiti jednostavnu konfiguraciju, što je kontradikcija. □

Lema 4. Konfiguracija $\mathcal{C}$ rješiva je ako i samo ako je dobra ili jednostavna.

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da $\mathcal{C}$ nije jednostavna. Kako moramo biti u stanju napraviti barem jedan potez, $\mathcal{C}$ mora sadržavati barem jednu nepraznu hrpu s parnim brojem kamenčića. Nadalje, po Korolaru 2, $\mathcal{C}$ ima svojstvo neparnog djelitelja pa je dobra.

($\Longleftarrow$) Ovo slijedi uzastopnom primjenom Leme 3, pri čemu ovaj proces konačno mora stati jer je broj nepraznih hrpa ograničen odozgo ukupnim brojem kamenčića. □

Naposljetku, ako je n potencija broja 2, tada iz Leme 4 slijedi da je konfiguracija koja se sastoji od jedne hrpe s n kamenčića rješiva. U suprotnom, isti rezultat povlači da ta konfiguracija nije rješiva, no da konfiguracija koja se sastoji od hrpa veličina 2 i $n-2$ jest rješiva. Time je tvrdnja dokazana.

Drugo rješenje.

Dokažimo najprije da ako n nije potencija broja 2, tada nije moguće postići da svih n kamenčića bude na jednoj hrpi. Pretpostavimo suprotno te promotrimo prvi potez nakon kojeg postoji neparan prost broj p koji dijeli veličine svih hrpa. Neka se taj potez sastojao od biranja po a kamenčića s hrpa veličina b i c te stvaranja hrpe veličine $2a$. Tada p dijeli $b-a$, $c-a$ te $2a$. Kako je p neparan, p dijeli a pa mora dijeliti i b i c. To znači da su veličine svih hrpa bile djeljive s p i prije promatranog poteza, što je kontradikcija.

Dokažimo sada da ako je $n = 2^k$ za neki cijeli broj $k \geqslant 0$, tada je moguće postići da svi kamenčići budu na jednoj hrpi. Dokaz provodimo indukcijom po k. Ako je $k = 0$, tvrdnja je očita pa pretpostavimo da je $k \geqslant 1$. Podijelimo 2^k hrpa veličina 1 u dvije skupine od po 2^{k-1} hrpa. Po pretpostavci indukcije, kamenčiće iz svake skupine moguće je dovesti na jednu hrpu veličine 2^{k-1}. Na kraju, dobivene dvije hrpe veličina 2^{k-1} spojimo u jednu hrpu veličine 2^k.

Preostaje još dokazati da, ako n nije potencija broja 2, tada možemo postići da imamo samo dvije neprazne hrpe. U tu svrhu prikažimo n kao sumu $\sum_{j=1}^{k} 2^{a_j}$, gdje su $k \geqslant 2$ i

$$0 \leqslant a_1 < \ldots < a_k$$

cijeli brojevi. Drugim riječima, $a_1, \ldots, a_k$ pozicije su jedinica u binarnom zapisu broja n. Po prethodno dokazanom, možemo postići da imamo k hrpa takvih da j-ta hrpa sadrži 2^{a_j} kamenčića, za $1 \leqslant j \leqslant k$. Ako je $k = 2$, tada smo gotovi pa pretpostavimo da je $k \geqslant 3$. Potezom (i, j) zvat ćemo potez u kojemu uzimamo onoliko kamenčića s i-te i j-te hrpe koliko se trenutno nalazi na j-toj hrpi te od njih stvaramo novu hrpu, što možemo shvatiti kao da veličinu i-te hrpe umanjujemo za veličinu j-te hrpe te veličinu j-te hrpe udvostručavamo. U prvom koraku napravimo $a_2 - a_1$ poteza $(k, 1)$ te potom napravimo potez $(1, 2)$. Zatim za $2 \leqslant j \leqslant k-2$ u j-tom koraku prvo napravimo $a_{j+1} - a_j - 1$ poteza (k, j) te potom potez $(j, j+1)$. Indukcijom po j se pokazuje da nakon j-tog koraka imamo sljedeće veličine hrpa:

- i-ta je hrpa prazna za $1 \leqslant i \leqslant j$;
- $(j+1)$-va hrpa sadrži $2^{a_{j+1}+1}$ kamenčića;
- i-ta hrpa sadrži 2^{a_i} kamenčića za $j+2 \leqslant i \leqslant k-1$;
- k-ta hrpa sadrži $n - 2^{a_{j+1}+1} - \sum_{i=j+2}^{k-1} 2^{a_i} = 2^{a_k} - 2^{a_{j+1}} + \sum_{i=1}^{j} 2^{a_i}$ kamenčića.

Posebno, nakon $(k-2)$-gog koraka, sve su hrpe osim $(k-1)$-ve i k-te prazne, čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka su M i N redom polovišta dužina $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$. Pretpostavimo da točke Q, A, B, P leže na pravcu u tom poretku, da je AC tangenta opisane kružnice trokuta ADQ te da je BD tangenta opisane kružnice trokuta BCP. Dokaži da se pravac CD, tangenta opisane kružnice trokuta ANQ u točki A i tangenta opisane kružnice trokuta BMP u točki B sijeku u jednoj točki.

Prvo rješenje.

Označimo $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBC = \varphi$, $\sphericalangle AQN = \varphi_1$ i $\sphericalangle BPM = \varphi_2$. Neka je t_1 tangenta u A na opisanu kružnicu trokutaQAN i t_2 tangenta u B na opisanu kružnicu trokuta BPM. Neka t_1 siječe dužinu $\overline{CD}$ u X te t_2 siječe dužinu $\overline{CD}$ u Y. Želimo pokazati da je $X \equiv Y$.

Prema teoremu o kutu između tetive i tangente je

$$\sphericalangle AQD = \sphericalangle CAD = \varphi,$$

$$\sphericalangle DAX = \sphericalangle NAX = \sphericalangle AQN = \varphi_1.$$

Nadalje, $\sphericalangle NQD = \sphericalangle AQD - \sphericalangle AQN = \varphi - \varphi_1$ i $\sphericalangle CAX = \sphericalangle CAD - \sphericalangle XAD = \varphi - \varphi_1$.

Primjenom sinusovog teorema u trokutima DAX i XAC dobijemo

$$\frac{|DX|}{|CX|} = \frac{|AD| \cdot \sin \varphi_1}{|AC| \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)}.$$

Primjenom sinusovog poučka u trokutima QAN i QND i korištenjem da je N polovište dužine $\overline{AD}$ se dobije

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi - \varphi_1)} = \frac{|QD|}{|QA|}.$$

Nadalje, kako je $\sphericalangle QAD = \sphericalangle BCD$ imamo da je $\triangle QAD \sim \triangle BCD$ te iz toga slijedi

$$\frac{|QD|}{|QA|} = \frac{|BD|}{|BC|}.$$

Uvrštavanjem gornjih omjera konačno dobijemo da je $\dfrac{|DX|}{|CX|} = \dfrac{|AD| \cdot |BD|}{|AC| \cdot |BC|}$.

Sasvim analogno se dobije $\dfrac{|DY|}{|CY|} = \dfrac{|AD| \cdot |BD|}{|AC| \cdot |BC|}$. Dakle, $\dfrac{|DX|}{|CX|} = \dfrac{|DY|}{|CY|}$.

Kako se točke X i Y nalaze na dužini $\overline{CD}$ i dijele je u istom omjeru slijedi da je $X \equiv Y$ što smo i htjeli dokazati.

Drugo rješenje.

Neka su α, β, γ i δ kutovi četverokuta $ABCD$ u vrhovima A, B, C i D redom.

Isto kao u prvom rješenju se pokaže da je $\triangle QAD \sim \triangle BCD$.

Neka je E polovište dužine $\overline{CD}$. Zbog gornje sličnosti je $\sphericalangle CBE = \sphericalangle AQN = x$.

Neka je F presjek opisane kružnice trokuta ABE i dužine $\overline{CD}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da točka F leži između točaka C i E.

Četverokut $ABFE$ je tetivan pa imamo:

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle BEF = \sphericalangle BEC = 180^\circ - \sphericalangle CBE - \sphericalangle BCE = 180^\circ - x - \gamma.$$

Sad je

$$\sphericalangle NAF = \alpha - \sphericalangle BAF = \alpha - (180^\circ - x - \gamma) = \alpha - (\alpha - x) = x = \sphericalangle AQN$$

što po teoremu o kutu između tetive i tangente povlači da je AF tangenta na opisanu kružnicu trokuta ANQ.

Analogno se pokaže da je BF tangenta na opisanu kružnicu trokuta BMP.

Prema tome tangenta u A na opisanu kružnicu trokuta QAN, tangenta u B na opisanu kružnicu trokuta BPM i CD se sijeku u zajedničkoj točki F.

Treće rješenje.

Označimo sa Z i W redom sjecišta tangente kroz A na kružnicu opisanu AQN i tangente kroz B na kružnicu opisanu BMP sa kružnicom opisanom $ABCD$. Neka je P polovište od $\overline{BC}$, i neka je G središte kružnice opisane trokutu PCB. Nadalje, neka je V središte opisane kružnice od ANQ.

Kao i u prva dva rješenja se dobiva da su QAD i BCD slični, iz čega slijedi da su VAD i GCD također slični, pa je $\sphericalangle VAD = \sphericalangle GCD$. Nadalje, $\sphericalangle DAZ = \sphericalangle DCZ$ zbog tetivnosti, pa je $90^\circ = \sphericalangle VAZ = \sphericalangle GCZ$, odnosno GC je okomito na CZ.

Analogno, ako s H označimo središte opisane kružnice APD, dobivamo da je HD okomito na DW. Ovime smo karakterizirali točke Z i W.

Naime, ZC je tangenta na kružnicu opisanu PBC, pa je po teoremu o tetivi i tangenti $\sphericalangle ZCD = \sphericalangle PBC$. Ako sa Z' označimo presjek od BP i kružnice opisane $ABCD$, dobivamo da su kutevi nad tetivama ZD i $Z'C$ isti, pa je Z' točka dobivena preslikavanjem točke Z preko simetrale stranice CD. Analogno, ako s W' označimo presjek od AP i kružnice opisane $ABCD$, dobivamo da je W' dobivena preslikavanjem W preko simetrale stranice CD.

Sada treba dokazati da se AZ i BW sijeku na $ABCD$.

Dokazat ćemo da $Q := AZ \cap CD$, $R := BW \cap CD$ obje leže na kružnici opisanoj trokutu APB, iz čega će slijediti da su to dvije iste točke. Naime, ako su Q i R obje različite od P to je očito, a ako je na primjer $Q = P$, onda je $Z = W'$ i $W = Z'$, pa je i $R = P$.

Primijetimo da su CD i ZZ' paralelni, pa je $\sphericalangle Z'ZA = \sphericalangle DQA = \sphericalangle PQA$, i to je jednako kutu nad tetivom AZ' u kružnici od $ABCD$, pa je to jednako $\sphericalangle Z'BA = \sphericalangle PBA$. Dakle, $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PBA$, pa Q stvarno leži na kružnici opisanoj ABP. Analogno se dokaže za R i tvrdnja zadatka slijedi.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ za koje umnožak prvih n prirodnih brojeva dijeli umnožak svih zbrojeva međusobno različitih parova prostih brojeva koji nisu veći od n, tj. za koje vrijedi

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ prosti}}} (p+q).$$

Rješenje.

Primijetimo da $3, 4, 5$ i 6 nisu rješenja zadatka jer je tada lijeva strana djeljiva s 3, a desna nije.

Nadalje, za $n = 7$ je lijeva strana jednaka $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, a desna strana je $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 7 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 2^6$, pa je 7 rješenje zadatka. Za $n \in \{8, 9, 10\}$ je lijeva strana djeljiva s 2^7, a desna strana nije, pa ti brojevi nisu rješenje zadatka.

Pretpostavimo da je neki $n \geqslant 11$ rješenje zadatka. Promotrimo najveći prost broj $r \leqslant n$. Onda $r \mid n!$, pa $r \mid p + q$ za neki par prostih brojeva p, q koji su manji od n. Međutim, onda je $p < q \leqslant r$, pa je $p + q < 2r$, odnosno $p + q = r$. Zbog parnosti, to je jedino moguće za $p = 2$ i $q = r - 2$. Zaključujemo da je $r - 2$ također prost.

Onda i $r - 2 \mid n!$, pa mora $r - 2$ dijeliti $p + q$ za neki par prostih brojeva s $p < q \leqslant r$.

Ako je $q = r$, onda $r - 2 \mid p + r$, odnosno $r - 2 \mid p + 2$, pa je $p \geqslant r - 4$.

Ne može biti $p = r - 2$ jer $r - 2 \nmid 2r - 2$, i ne može biti $p = r - 1$ ili $p = r - 3$ zbog parnosti, pa je $p = r - 4$ i zaključujemo da je $r - 4$ također prost.

Ako je $q < r$, onda je $q \leqslant r - 2$, $p < r - 2$, pa je $p + q < 2(r - 2)$, pa mora biti $p + q = r - 2$. Isto kao i ranije, zaključujemo $p = 2$ i $q = r - 4$, te zaključujemo da je $r - 4$ i u ovom slučaju prost.

Dakle, $r, r - 2, r - 4$ su prosti brojevi. Međutim, oni daju različite ostatke pri dijeljenju s 3, pa je neki od njih djeljiv s 3, pa je neki od njih jednak 3. Ali to je nemoguće jer je $r \geqslant 11$.

Dakle, $n = 7$ je jedino rješenje.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 24. svibnja 2023.

Zadatak 1.

Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xy + yz + zx = 3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{x+3}{y+z} + \frac{y+3}{x+z} + \frac{z+3}{x+y} + 3 \geqslant 27 \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}.$$

Rješenje.

Primijetimo da je lijeva strana jednaka

$$(x+y+z+3)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right).$$

Primjenom AH nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geqslant \frac{9}{2(x+y+z)},$$

pa preostaje dokazati nejednakost

$$\frac{9(x+y+z+3)}{2(x+y+z)} \geqslant 27 \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3},$$

što je ekvivalentno s

$$(x+y+z)^2(x+y+z+3) \geqslant 6(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2.$$

Prema KA nejednakosti vrijedi

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\right)^2 \leqslant \frac{x+y+z}{3},$$

pa je dovoljno dokazati

$$(x+y+z)^2(x+y+z+3) \geqslant 18(x+y+z),$$

što je ekvivalentno s

$$(x+y+z)^2 + 3(x+y+z) \geqslant 18.$$

Da bismo to dokazali, dovoljno je dokazati $x+y+z \geqslant 3$. To vrijedi jer je

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geqslant 3(xy+yz+zx) = 9,$$

pa je i početna nejednakost dokazana.

Zadatak 2.

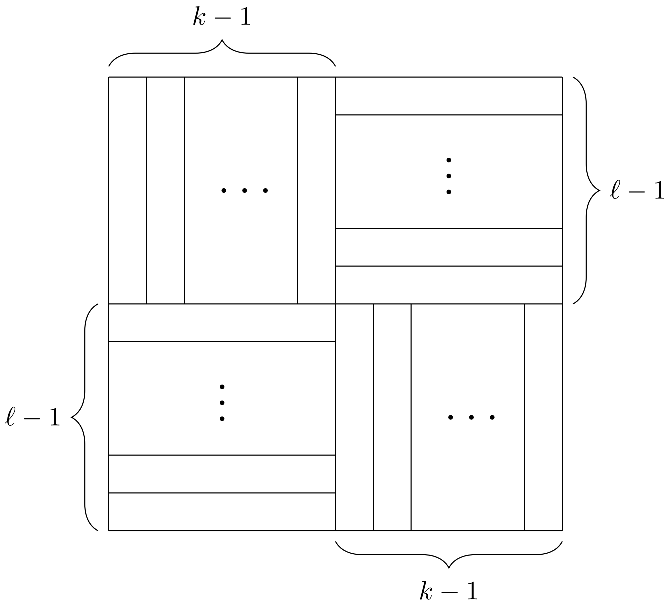
Neka su k i ℓ prirodni brojevi. Odredi najmanji prirodan broj m za koji je moguće podijeliti kvadrat $ABCD$ na m pravokutnika stranica paralelnih sa stranicama kvadrata tako da svaki pravac paralelan s AB koji siječe unutrašnjost kvadrata siječe barem k pravokutnika, a svaki pravac paralelan s BC koji siječe unutrašnjost kvadrata siječe barem ℓ pravokutnika.

Rješenje.

Ako je $k = 1$, onda je odgovor ℓ, a ako je $\ell = 1$, onda je odgovor k.

Za k, $\ell \geqslant 2$, tvrdimo da je odgovor $2(k + \ell - 2)$.

Na slici je primjer koji pokazuje da je moguće zadovoljiti uvjete zadatka podjelom na $2(k+\ell-2)$ pravokutnika.



Pokažimo da manji broj pravokutnika nije dovoljan. Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ moraju sjeći (sadržavati stranice) barem k pravokutnika. Zaista, postoji pravac koji je paralelan s AB i koji je toliko blizu tom pravcu da siječe barem k pravokutnika čija jedna stranica leži na $\overline{AB}$. Analogno, stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ moraju sjeći (sadržavati stranice) barem ℓ pravokutnika. Zbog k, $\ell \geqslant 2$, dvaput smo brojili samo one pravokutnike čiji je jedan vrh ujedno i vrh kvadrata $ABCD$, te su to ujedno četiri različita pravokutnika. Stoga u podjeli koja zadovoljava uvjete zadatka mora biti barem $2k + 2\ell - 4$ pravokutnika.

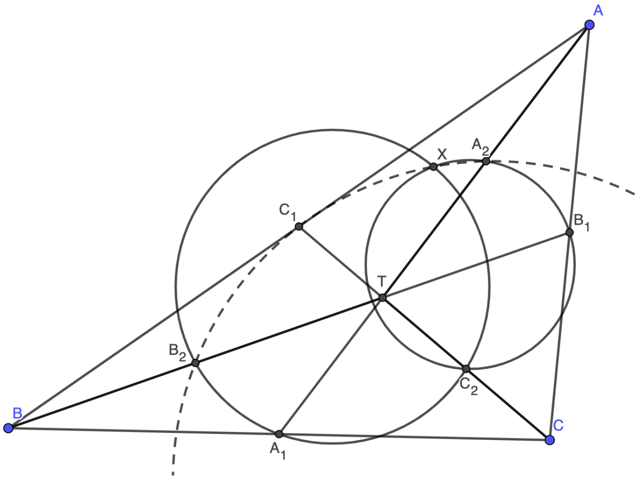
Zadatak 3.

Neka je T težište raznostraničnog trokuta ABC. Označimo sa A_1, B_1, C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, a sa A_2, B_2, C_2 polovišta dužina $\overline{AT}$, $\overline{BT}$ i $\overline{CT}$ redom. Dokaži da se kružnice opisane trokutima $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ i $A_2B_2C_1$ sijeku u jednoj točki.

Prvo rješenje.

U računu se koriste usmjereni kutovi. Bez smanjenja općenitosti, označimo X kao drugi presjek od $k(A_1B_2C_2)$ i $k(A_2B_1C_2)$ te ćemo dokazati da X leži na $k(A_2B_2C_1)$.

Označimo sa $x = \sphericalangle(BT, TC)$ te $y = \sphericalangle(TC, TA)$. Jer su A_1, B_2, C_2 polovišta stranica trokuta $\triangle BCT$, imamo da je $x = \sphericalangle(C_2A_1, A_1B_2) = \sphericalangle(C_2X, XB_2)$. Slično tako dobivamo da je $y = (A_2B_1, B_1C_2) = (A_2X, XC_2)$.



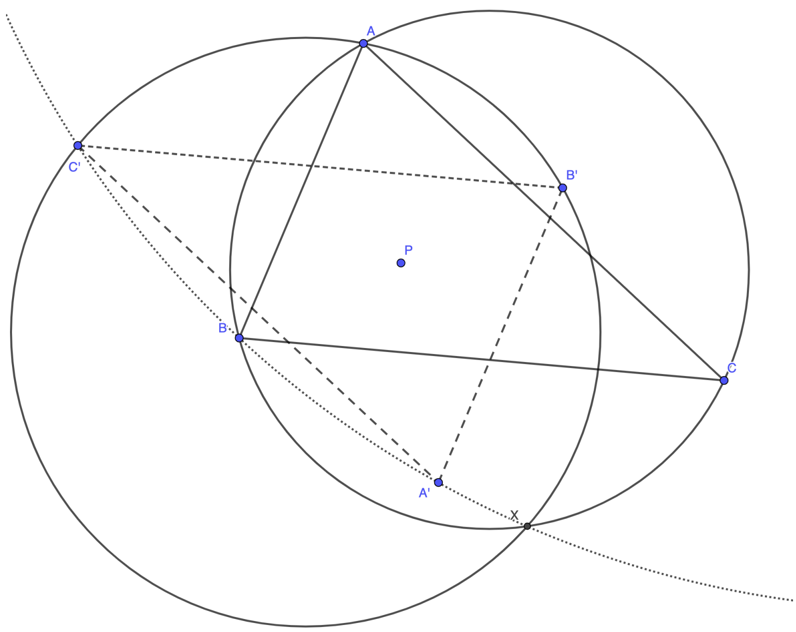
Zbrajanjem dobivamo

$$\sphericalangle(A_2X, XB_2) = x + y = \sphericalangle(BT, TC) + \sphericalangle(TC, TA) = \sphericalangle(BT, TA) = \sphericalangle(B_2T, TA_2),$$

pa je četverokut $A_2XC_1B_2$ tetivan, kao što smo i htjeli dokazati.

Drugo rješenje.

Jer T siječe težišnice u omjeru $1 : 2$, imamo da je $|AA_2| = |A_2T| = |TA_1|$. Stoga je $\triangle A_1B_1C_1$ centralnosimetrična slika od $\triangle A_2B_2C_2$ s obzirom na T pa rješenje slijedi kao posebni slučaj sljedeće leme.



Lema. Dan je $\triangle ABC$ i točka P. Neka su A', B', C' centralnosimetrične slike točaka A, B, C u odnosu na P. Tada se kružnice $k(A'B'C), k(A'BC'), k(AB'C'), k(ABC)$ sijeku u istoj točki.

Dokaz leme: Neka je X sjecište $k(ABC)$ i $k(AB'C')$.

Koristeći usmjerene kuteve i paralelnost dobivamo $\sphericalangle(BX, XC') = \sphericalangle(BX, XA) + \sphericalangle(AX, XC') = \sphericalangle(BC, CA) + \sphericalangle(AB', B'C') = \sphericalangle(BC, A'C') + \sphericalangle(A'B, BC) = \sphericalangle(BA', A'C')$ iz čega vidimo da je X na $k(A'BC')$.

Analogno se pokaže da je X i na $k(A'B'C)$ čime je dokaz leme gotov.

Zadatak 4.

Odredi sve parove različitih prirodnih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$ab(b - a) \mid a^4 - b^2.$$

Prvo rješenje.

Neka je $d = M(a, b)$. Tada je $a = dx$ i $b = dy$ za relativno proste x, y i izraz postaje

$$d^3xy(y - x) \mid d^4x^4 - d^2y^2,$$

odnosno $dxy(y - x) \mid d^2x^4 - y^2$. Sada vidimo da $x \mid y^2$, pa zbog toga što su x i y relativno prosti slijedi $x = 1$, i izraz postaje

$$dy(y - 1) \mid d^2 - y^2.$$

Neka je sada $k = M(d, y)$. Tada je $d = ku$ i $y = kv$ za relativno proste u, v i izraz postaje

$$k^2uv(kv - 1) \mid k^2(u^2 - v^2),$$

odnosno $uv(kv - 1) \mid u^2 - v^2$. Ali iz ovoga slijedi $u \mid v^2$ i $v \mid u^2$, pa jer su u i v relativno prosti slijedi $u = v = 1$, pa je $d = y$ i zaključujemo da je $(a, b) = (d, d^2)$.

Lako vidimo da su svi parovi $(a, b) = (d, d^2)$, $d \neq 1$, rješenje zadatka.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključimo $dy(y-1) \mid d^2-y^2$, pa nakon toga možemo promotriti kvadratnu jednadžbu po d:

$$d^2 - kdy(y - 1) - y^2 = 0.$$

Diskriminanta te jednadžbe je $y^2(k^2(y - 1)^2 + 4)$ što mora biti potpun kvadrat.

To je potpun kvadrat ako i samo ako je $k^2(y-1)^2+4$ potpun kvadrat. Međutim, jedini kvadrati cijelih brojeva koji se razlikuju za 4 su 0 i 4, pa je $k^2(y - 1)^2 = 0$.

Dakle, ili je $y = 1$ (što je nemoguće jer bi tada bilo $a = b$) ili $k = 0$. Stoga je $y = d$, pa kao i u prvom rješenju dobivamo da su sva rješenja oblika $(a, b) = (d, d^2)$, $d \neq 1$.