Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

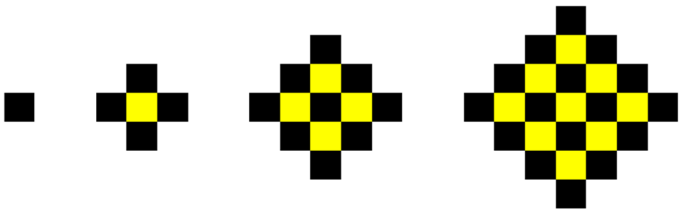
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 7. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Kvadratići

Na slici su prikazana četiri lika sastavljena od crnih i žutih kvadratića. Ako na isti način nastavimo crtati likove, za koliko će se razlikovati broj svih crnih i broj svih žutih kvadratića u prvih 29 likova u nizu?



Rezultat: 841

Rješenje.

Proučimo koliko je crnih i žutih kvadratića u tim likovima:

redni broj lika	1.	2.	3.	4.		n		29.
broj crnih kvadratića	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	...	n^2	...	29^2
broj žutih kvadratića	$0 = 0^2$	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$		$(n-1)^2$		28^2

Ukupan broj crnih kvadratića prvih 29 likova je $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 29^2$,

a ukupan broj žutih kvadratića $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 28^2$.

Razlika ta dva broja je

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 28^2 + 29^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 28^2) = 29^2 = 841.$$

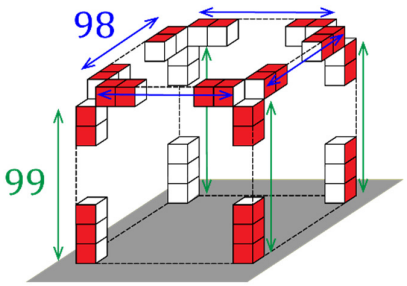
2. Megakocka

Od jednakih je kockica složena jedna velika kocka. Duljina brida velike kocke sto puta je veća od duljine brida svake kockice. Velika kocka položena je na stol i sve su njezine strane, osim one koja dodiruje stol, obojene crvenom bojom.

Koliko kockica ima točno dvije strane crvene boje?

Rezultat: 788

Rješenje.



Uzduž svakog od četiri brida gornje plohe kocke ima 98 kockica s dvjema crvenim stranama.

Uzduž svakog od četiri bočna brida kocke ima 99 kockica s dvjema crvenim stranama.

Broj kockica s točno dvije strane crvene boje iznosi
$4 \cdot 98 + 4 \cdot 99 = 392 + 396 = 788$.

3. Gusari

Kapetan gusarskog broda dijeli zlatnike s trinaestoricom svojih gusara na sljedeći način:

prvo dijeljenje:	jedan meni, po jedan svakome od vas
drugo dijeljenje:	dva meni, po jedan svakome od vas
treće dijeljenje:	tri meni, po jedan svakome od vas.

U svakom sljedećem dijeljenju kapetan sebi uzima jedan zlatnik više nego u prethodnom dijeljenju, a svakom od ostalih gusara daje po jedan zlatnik.
Koliko je dijeljenja potrebno da bi kapetan imao točno 187 500 zlatnika više nego svi njegovi gusari zajedno?

Rezultat: 625

Rješenje.
U n dijeljenja kapetan dobiva $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$ zlatnika, a svaki gusar po n zlatnika.

Trebamo odrediti broj n za koji vrijedi $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 13n = 187\,500$.

Koristeći Gaussovu dosjetku dobivamo:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} - 13n = 187\,500,$$

odakle sređivanjem slijedi

$$n \cdot (n+1) - 26n = 375\,000,$$

$$n \cdot (n-25) = 375\,000.$$

Broj 375 000 trebamo prikazati kao umnožak dva prirodna broja koja se razlikuju za 25.

Rastavimo na proste faktore $375\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^6 = 25 \cdot 25 \cdot (5^2 \cdot 2^3 \cdot 3)$.

Vidimo da je $375\,000 = 625 \cdot 600$, pa je rješenje dobivene jednadžbe je $n = 625$.

Potrebno je 625 dijeljenja da bi kapetan imao 187 500 zlatnika više nego svi njegovi gusari zajedno.

4. Dijeljenje s ostatkom

Odredi zbroj svih prirodnih brojeva čiji je količnik pri dijeljenju brojem 9 manji od ostatka.

Rezultat: 960

Rješenje.

Ostatak pri dijeljenju s 9 može biti 0, 1, 2, … , 8, a količnik mora biti manji od ostatka. Zapišimo sve mogućnosti.

ostatak \ količnik	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1							
2	2	11						
3	3	12	21					
4	4	13	22	31				
5	5	14	23	32	41			
6	6	15	24	33	42	51		
7	7	16	25	34	43	52	61	
8	8	17	26	35	44	53	62	71
zbroj	36	98	141	165	170	156	123	71

Zbroj svih takvih brojeva je

36 + 98 + 141 + 165 + 170 + 156 + 123 + 71 = 960.

5. Cijeli brojevi

Neka su $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{1013}$ uzastopni cijeli brojevi, redom od najmanjeg do najvećeg. Ako vrijedi

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \cdots - x_{1011} + x_{1012} - x_{1013} = 1013,$$

odredi apsolutnu vrijednost broja x_{1013} .

Rezultat: 507

Rješenje.

Od x_1 do x_{1012} imamo 1012 brojeva, odnosno 506 parova, pa jednakost iz zadatka možemo zapisati

$$(-x_1 + x_2) + (-x_3 + x_4) + \cdots + (-x_{1011} + x_{1012}) - x_{1013} = 1013$$

Uzastopni cijeli brojevi razlikuju se za 1, pa vrijednost svake zagrade iznosi 1.

Ima 506 zagrada, pa vrijedi $506 - x_{1013} = 1013$.

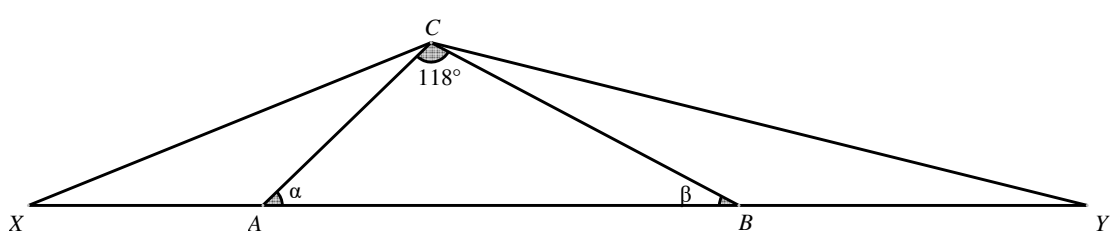
Stoga je $x_{1013} = -507$, odnosno $|x_{1013}| = 507$.

6. Trokut i kutovi

U trokutu ABC veličina najvećeg kuta iznosi 118°. Na produžetku najdulje stranice $\overline{AB}$ preko vrha A odabrana je točka X takva da je $|AX| = |AC|$, a na produžetku preko vrha B točka Y takva da je $|BY| = |BC|$. Kolika je veličina kuta $\measuredangle XCY$ u kutnim stupnjevima?

Rezultat: 149

Rješenje. Označimo $\alpha = |\measuredangle BAC|, \beta = |\measuredangle CBA|, \gamma = |\measuredangle ACB| = 118^{\circ}$



Iz uvjeta $|AC| = |AX|$ slijedi da je trokut ΔACX jednakokračan pa je $|\measuredangle AXC| = |\measuredangle XCA|$

Kut α vanjski je kut trokuta ΔACX, pa vrijedi $\alpha = |\measuredangle AXC| + |\measuredangle XCA|$.

Stoga vrijedi $|\measuredangle AXC| = |\measuredangle XCA| = \frac{\alpha}{2}$.

Na isti se način pokaže da je $|\measuredangle BCY| = |\measuredangle CYB| = \frac{\beta}{2}$.

Zbroj kutova u trokutu je 180°, pa vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

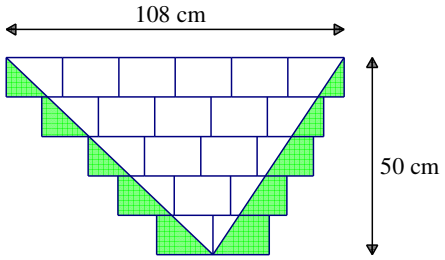
Iz toga slijedi $\alpha + \beta + 118^o = 180^o$, odnosno $\alpha + \beta = 62^o$.

Dijeljenjem s 2 dobivamo $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 31^o$.

Dakle, vrijedi

$|\measuredangle XCY| = |\measuredangle XCA| + |\measuredangle ACB| + |\measuredangle BCY| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 31^o + 118^o = 149^o$.

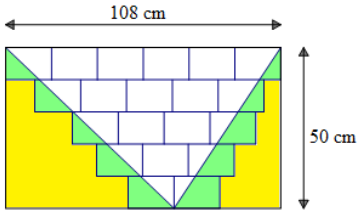
7. Osjenčana površina



Koliko kvadratnih centimetara iznosi osjenčana površina na slici ako su svi pravokutnici međusobno sukladni ?

Rezultat: 900

Prvo rješenje.



Nadopunimo lik na slici do pravokutnika i istaknimo nadopunu žutom bojom. Neobojani trokut je pola površine pravokutnika, onda je i obojani dio pola njegove površine, tj. 2700 cm².

Dimenzije malih pravokutnika su 108 : 6 = 18 cm i 50 : 5 = 10 cm,

pa je površina svakog malog pravokutnika 180 cm².

U svakom redu odozgo prema dolje po jedan je pravokutnik manje pa je površina žutog dijela jednaka površini 1 + 2 + 3 + 4 = 10 pravokutnika, odnosno 1800 cm².

Zato je površina zelenog dijela $2700 - 1800 = 900$ cm².

Drugo rješenje.

Dimenzija jednog pravokutnika je na slici je (108 cm : 6) × (50 cm : 5) = 18 cm × 10 cm.

Površina jednog pravokutnika je $P_1 = 18 \cdot 10 = 180$ cm².

Površina svih 20 pravokutnika je $P_{20} = 20 \cdot P_1 = 20 \cdot 180 = 3600$ cm².

Na crtežu uočimo bijeli trokut kojemu je osnovica duljine 108 cm, a duljina visine na osnovici je 50 cm.

Površina tog trokuta iznosi:

$$P_\Delta = \frac{108 \cdot 50}{2} = 54 \cdot 50 = 2700 \text{ cm}^2.$$

Površina zelenog dijela crteža jednaka je razlici površine 20 pravokutnika i površine trokuta, dakle:

3600 cm² – 2700 cm² = 900 cm².

8. Razlika najvećeg i najmanjeg

Kada u prazna polja na slici upišemo pet međusobno različitih znamenaka od kojih nijedna nije 0, dobivamo izraz u kojem se zbrajaju i množe prirodni brojevi. Kolika je razlika najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti takvog izraza?

$$\square\square + \square\square \cdot \square$$

Rezultat: 790

Rješenje.
Jasno je da ćemo najmanju moguću vrijednost postići sa znamenkama 1, 2, 3, 4 i 5, a najveću sa znamenkama 5, 6, 7, 8 i 9.

Brojevni izraz će biti manji ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica manja od znamenke jedinica, te ako je jednoznamenkasti broj u umnošku što manji. Zato množimo brojem 1, a u dvoznamenkastim brojevima biramo za znamenku desetica 2 i 3, a za znamenku jedinica 4 i 5.

Najmanju moguću vrijednost možemo dobiti na više načina:

$$25 + 34 \cdot 1 = 24 + 35 \cdot 1 = 34 + 25 \cdot 1 = 35 + 24 \cdot 1 = 59.$$

Brojevni izraz će biti veći ako se množe veći brojevi i ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica veća od znamenke jedinica.

Promotrimo gdje u izrazu $\_\_ + \_\_ \cdot \_$ treba biti znamenka 9 da bi rezultat bio najveći mogući.

Ona nije znamenka jedinica dvoznamenkastog broja. Također, nije ni znamenka desetica prvog dvoznamenkastog broja. Ako bi 9 bila znamenka desetica drugog dvoznamenkastog broja koji množimo jednoznamenkastim brojem, onda bi zamjenom tog jednoznamenkastog broja i znamenke 9 povećali rezultat. Na primjer, $97 \cdot 6 < 67 \cdot 9$. Zaključujemo da drugi dvoznamenkasti broj množimo brojem 9.

Sada promotrimo gdje treba biti znamenka 8. Ona mora biti znamenka desetica jednog od dvoznamenkastih brojeva i to onog koje se množi brojem 9. Tako smo došli do: $\_\_ + 8\_ \cdot 9$.

Znamenka 7 je ili na prvom ili na zadnjem slobodnom mjestu, pa usporedimo vrijednosti izraza:

$$76 + 85 \cdot 9 = 76 + 765 = 841,$$

$$75 + 86 \cdot 9 = 75 + 774 = 849,$$

$$65 + 87 \cdot 9 = 65 + 783 = 848.$$

Najveća moguća vrijednost izraza je 849,

a razlika između najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti

$$849 - 59 = 790.$$

9. Kuglice

U kutiji se nalaze samo crvene i plave kuglice. Kad bi se iz kutije izvuklo pet crvenih kuglica, jedna sedmina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. Kad bi se iz kutije umjesto pet crvenih izvuklo deset plavih kuglica, jedna petina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. Koliko je ukupno kuglica u kutiji?

Rezultat: 110

Rješenje. Neka je c broj crvenih, a p broj plavih kuglica u kutiji.

Kad bi se iz kutije izvuklo pet crvenih kuglica, jedna sedmina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. To znači da bi broj plavih kuglica p bio šest puta veći od broja crvenih kuglica $c - 5$, tj. vrijedi

$$p = 6 \cdot (c - 5).$$

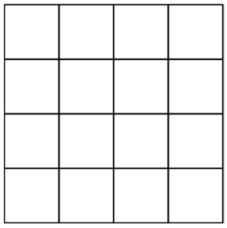
Kad bi se iz kutije umjesto pet crvenih izvuklo deset plavih kuglica, jedna petina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. To znači da bi broj plavih kuglica $p - 10$ bio četiri puta veći od broja crvenih kuglica, tj. vrijedi

$$p - 10 = 4 \cdot c.$$

Iz $p = 6 \cdot (c - 5)$ i $p = 4 \cdot c + 10$ dobijemo $6 \cdot (c - 5) = 4 \cdot c + 10$, pa je $c = 20$, a $p = 90$.

U kutiji ima 20 + 90 = 110 kuglica.

10. Četiri boje



Svako od polja kvadrata 4×4, kao na slici, treba obojiti jednom od četiri boje. Na koliko je načina to moguće napraviti tako da bilo koja četiri polja sa zajedničkim vrhom budu obojena različitim bojama?

Rezultat: 168

Rješenje.

Označimo boje s *a, b, c, d* i fiksirajmo raspored boja u gornjem lijevom 2x2 kvadratu.

a	*b*		
c	*d*		

S obzirom da 4 različite boje možemo rasporediti na ta četiri polja na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina, na kraju ćemo dobiveni broj mogućnosti bojanja preostalih dijelova tablice pomnožiti s 24.

Pogledajmo na koji sve način možemo nastaviti s bojanjem do ispunjavanja 3x3 kvadrata.

Prva dva retka u trećem stupcu moraju sadržavati boje *a* i *c*, a treći redak mora započinjati bojama *a* i *b*.

To nas vodi na sljedeće tri mogućnosti:

1. slučaj

a	*b*	*a*	
c	*d*	*c*	
a	*b*		

2. slučaj

a	*b*	*c*	
c	*d*	*a*	
a	*b*		

3. slučaj

a	*b*	*a*	
c	*d*	*c*	
b	*a*		

U svakom od ova tri slučaja boja polja u trećem retku i trećem stupcu je jednoznačno određena uvjetima zadatka pa imamo:

1. slučaj

a	*b*	*a*	
c	*d*	*c*	
a	*b*	*a*	

2. slučaj

a	*b*	*c*	
c	*d*	*a*	
a	*b*	*c*	

3. slučaj

a	*b*	*a*	
c	*d*	*c*	
b	*a*	*b*	

Zadovoljavajući uvjete zadatka bojanje u 1. slučaju možemo završiti na tri načina.

a	*b*	*a*	*b*
c	*d*	*c*	*d*
a	*b*	*a*	*b*
c	*d*	*c*	*d*

a	*b*	*a*	*b*
c	*d*	*c*	*d*
a	*b*	*a*	*b*
d	*c*	*d*	*c*

a	*b*	*a*	*d*
c	*d*	*c*	*b*
a	*b*	*a*	*d*
c	*d*	*c*	*b*

U 2. slučaju bojanje možemo završiti na dva načina.

a	b	c	b
c	d	a	d
a	b	c	d
c	d	a	d

a	b	c	d
c	d	a	b
a	b	c	d
c	d	a	b

U 3. slučaju bojanje možemo završiti na dva načina.

a	b	a	b
c	d	c	d
b	a	b	a
c	d	c	d

a	b	a	b
c	d	c	d
b	a	b	a
d	c	d	c

Dakle, ukupan je broj bojanja $24 \cdot (3 + 2 + 2) = 168$.