**Hrvatsko matematičko društvo**

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

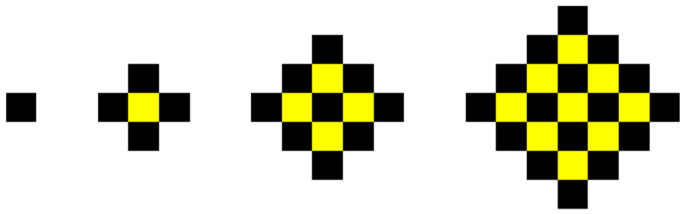
# HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

**prvo kolo – subota, 7. listopada 2023.**

## Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

### 1. Kvadratići

Na slici su prikazana četiri lika sastavljena od crnih i žutih kvadratića. Ako na isti način nastavimo crtati likove, od koliko se ukupno crnih i žutih kvadratića sastoji 22. lik u nizu?



***Rezultat:*** 925

**Prvo rješenje.**

Broj crnih kvadratića u likovima ovog niza je redom $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ odnosno broj crnih kvadratića odgovara kvadratu rednog broja lika u nizu. Stoga 22. lik u nizu ima $22^2 = 484$ crnih kvadratića.

Broj žutih kvadratića je: $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, (n-1)^2, \ldots$ odnosno broj žutih kvadratića računa se tako da se redni broja lika u nizu umanji za 1 i taj broj kvadrira. Stoga 22. lik u nizu ima $(22-1)^2 = 441$ žutih kvadratića.

Prema tome, 22. lik u niz ima ukupno $484 + 441 = 925$ crnih i žutih kvadratića.

**Drugo rješenje.**

Likovima na slici broj crnih i žutih kvadratića možemo izračunati na sljedeći način:

1. lik ima 1 kvadratić.

2. lik ima $1 + 4$ kvadratića.

3. lik ima $1 + 4 + 8 = 1 + 4 \cdot (1 + 2)$ kvadratića.

4. lik ima $1 + 4 + 8 + 12 = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3)$ kvadratića.

Svaki idući lik nastaje tako da na prethodni lik dodajemo kvadratiće duž ruba. Za svaki idući lik dodajemo 4 kvadratića više nego u prethodnom koraku. Zaključujemo da $n$-ti lik ima za $4 \cdot (n-1)$ kvadratića više nego prethodni.

Stoga ukupan broj kvadratića 22. lika iznosi

$$1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 21) = 1 + 4 \cdot 22 \cdot 21 : 2 = 925.$$

## 2. Megakocka

Od jednakih je kockica složena jedna velika kocka. Duljina je brida velike kocke sto puta veća od duljine brida svake kockice. Velika kocka položena je na stol i sve su njezine strane, osim one koja dodiruje stol, obojene crvenom bojom. Koliko kockica ima točno dvije strane crvene boje?

***Rezultat:*** 788

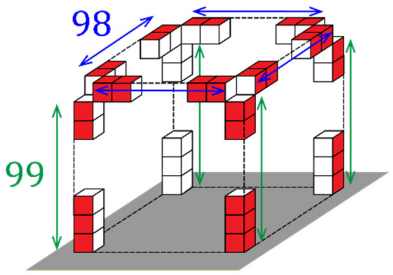
**Rješenje.**

Uzduž svakog od 4 brida gornje plohe kocke ima 98 kockica s dvjema crvenim stranama.

Uzduž svakog od 4 bočna brida kocke ima 99 kockica s dvjema crvenim stranama.

Broj kockica s točno dvije strane crvene boje iznosi

$4 \cdot 98 + 4 \cdot 99 = 392 + 396 = 788$.




## 3. Koliko ih je?

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je zbroj dviju znamenaka dvostruko veći od treće?

***Rezultat:*** 121

**Prvo rješenje.**

Traženo svojstvo imaju svi troznamenkasti brojevi sa svim jednakim znamenkama, a ima ih 9 (preciznije, to su 111, 222, 333, … , 888, 999).

Promotrimo sada sve kombinacije od tri različita znamenke bez obzira na njihov poredak, prema uvjetu zadatka. Kako bismo bili sigurni da ćemo ispisati sve mogućnosti, zapisat ćemo ih u rastućem redoslijedu, prema razlici između znamenaka.

| Razlika između znamenaka | Kombinacije | Broj kombinacija |
|---|---|---|
| 1 | 012, 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789 | 8 |
| 2 | 024, 135, 246, 357, 468, 579 | 6 |
| 3 | 036, 147, 258, 369 | 4 |
| 4 | 048, 159 | 2 |

Kombinacija s rastućim redoslijedom znamenki ima 8 + 6 + 4 + 2 = 20.

U 16 kombinacija nema znamenke 0, te odabirom poretka za svaku kombinaciju dobijemo 6 brojeva (npr. 123, 132, 213, 231, 312 i 321). Za preostale 4 kombinacije u kojima se pojavljuje znamenka 0 postoje samo 4 mogućnosti, jer znamenka stotica ne može biti 0 (npr. 102, 120, 201 i 210, ali ne 012 i 021).

Ukupan broj takvih brojeva s različitim znamenkama je $16 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 96 + 16 = 112$.

Traženih je brojeva 9 + 112 = 121.

**Drugo rješenje.**

Znamenke koje u zbroju daju dvostruku vrijednost treće znamenke moraju biti ili obje parne ili obje neparne. Treću znamenku dobivamo zbrajanjem znamenaka u paru i dijeljenjem zbroja s 2.

*Prvi slučaj.* Obje znamenke koje zbrajamo su parne. Mogući parovi znamenki su:

$\{0, 2\}, \{0, 4\}, \{0, 6\}, \{0, 8\}, \{2, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 6\}, \{6, 8\}$ i $\{8, 8\}$.

Za parove u kojima je jedna znamenka 0 postoje 4 broja određena tim znamenkama ($\overline{ab0}, \overline{ba0}, \overline{a0b}, \overline{b0a}$).

Za parove u kojima su obje znamenke različite od 0 i međusobno različite postoji 6 brojeva određenih tim znamenkama ($\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$).

Za parove u kojima su obje znamenke međusobno jednake treća znamenka je iste vrijednosti pa postoje 4 takva broja (222, 444, 666 i 888).

Prema tome, troznamenkastih brojeva sa zadanim uvjetom u ovom slučaju ima: $4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 4 = 56$.

*Drugi slučaj.* Obje znamenke koje zbrajamo su neparne. Mogući parovi znamenki su:

$$\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 5\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{7, 7\}, \{7, 9\} \text{ i } \{9, 9\}.$$

Za sve parove u kojima su obje znamenke međusobno različite postoji 6 brojeva određenih tim znamenkama ($\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$).

Za parove u kojima su obje znamenke međusobno jednake treća znamenka je iste vrijednosti pa postoji 5 takvih brojeva (111, 333, 555, 777 i 999).

Prema tome, troznamenkastih brojeva sa zadanim uvjetom u ovom slučaju ima: $10 \cdot 6 + 5 = 65$.

Troznamenkastih brojeva sa zadanim uvjetom ima ukupno 56 + 65 = 121.

**Treće rješenje.**

Neka su $a$, $b$ i $c$ znamenke za koje vrijedi $a \leq b \leq c$. Tada mora vrijediti $a + c = 2b$.

Promotrimo sve mogućnosti za pojedine $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Primjerice, za $b = 3$, jednakost $a + c = 6$ zadovoljavaju parovi $\{3, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}$ i $\{0, 6\}$,

što znači da broj može imati znamenke: $\{3, 3, 3\}$ ili $\{2, 3, 4\}$ ili $\{1, 3, 5\}$ ili $\{0, 3, 6\}$.

Ako su znamenke različite i različite od 0, onda postoji 6 troznamenkastih brojeva s tim znamenkama. Ako je jedna znamenka 0, onda postoje 4 takva broja, jer 0 ne može biti znamenka stotica. Ako su sve znamenke jednake, samo je jedan takav broj.

| $b$ | mogućnosti za $a+c$ | jednake | bez nule | s nulom | ukupan broj mogućnosti |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1+1, 0+2 | 1 | | 1 | $1 + 4 = 5$ |
| 2 | 2+2, 1+3, 0+4 | 1 | 1 | 1 | $1+6+4 = 11$ |
| 3 | 3+3, 2+4, 1+5, 0+6 | 1 | 2 | 1 | $1 + 2 \cdot 6 + 4 = 17$ |
| 4 | 4+4, 3+5, 2+6, 1+7, 0+8 | 1 | 3 | 1 | $1 + 3 \cdot 6 + 4 = 23$ |
| 5 | 5+5, 4+6, 3+7, 2+8, 1+9 | 1 | 4 | | $1 + 4 \cdot 6 = 25$ |
| 6 | 6+6, 5+7, 4+8, 3+9 | 1 | 3 | | $1 + 3 \cdot 6 = 19$ |
| 7 | 7+7, 6+8, 5+9 | 1 | 2 | | $1 + 2 \cdot 6 = 13$ |
| 8 | 8+8, 7+9 | 1 | 1 | | $1 + 6 = 7$ |
| 9 | 9+9 | 1 | | | 1 |

Ukupan broj je 5 + 11 +17 +23 + 25 + 19 + 13 + 7 + 1 = 121.

## 4. Pas i lisica

Pas ugleda lisicu koja je od njega udaljena 123 metra i pojuri za njom. Lisica bježi pred psom, a oboje se kreću po istom pravcu. Svaki pseći skok ima duljinu 2 metra, a svaki skok lisice 1 metar. Dok pas skoči dvaput, lisica to učini triput. Na kojoj udaljenosti od svog polazišta pas stiže lisicu?

***Rezultat:*** 492

**Prvo rješenje.**
Za svaka dva skoka od 2 metra pas skoči 4 metra, a u istom vremenu sa tri skoka lisica skoči 3 metra i pri tome se razmak između njih smanji za 1 metar.

Dok pas 123 puta skoči po 2 skoka i napravi $123 \cdot 2 \cdot 2 = 492$ m , lisica će u istom vremenu skočiti 123 puta po 3 skoka i napraviti $123 \cdot 3 \cdot 1 = 369$ m.

Kako je lisica bila u prednosti pred psom 123 metra pas će stići lisicu na udaljenosti od 492 metra od polazišta.

**Drugo rješenje.**
U tablici su prikazani razmaci između psa i lisice nakon određenog broja intervala. U svakom intervalu pas skoči dvaput (i prijeđe 4 metra), a lisica skoči triput (i prijeđe 3 metra):

| broj intervala | udaljenost (m) |
|---|---|
| 0 | 123 |
| 1 | $123 + 3 - 4 = 122$ |
| 2 | $122 + 3 - 4 = 121$ |
| 3 | $121 + 3 - 4 = 120$ |
| … | … |
| 123 | $1 + 3 - 4 = 0$ |

U 123 intervala pas je prošao $123 \cdot 2 \cdot 2 = 492$ m, a lisica $123 \cdot 3 \cdot 1 = 369$ m.
Kako je lisica bila u prednosti pred psom 123 metra pas će stići lisicu na udaljenosti od 492 metra od polazišta.

## 5. Dijeljenje s ostatkom

Odredi zbroj svih prirodnih brojeva čiji je količnik pri dijeljenju brojem 7 manji od ostatka.

***Rezultat:*** 336

**Rješenje.**
Neka je $n$ prirodni broj koji pri dijeljenju sa 7 daje količnik $k$ i ostatak $o$. Pri dijeljenju sa 7 vrijedi da je ostatak $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ pa je $n = 7k + o$, $k < o < 7$. Mogućnosti možemo prikazati tablicom:

| $k$ | $o$ | $n = 7k + o$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 |
| 0 | 3 | 3 |
| 0 | 4 | 4 |
| 0 | 5 | 5 |
| 0 | 6 | 6 |
| 1 | 2 | 9 |
| 1 | 3 | 10 |
| 1 | 4 | 11 |
| 1 | 5 | 12 |
| 1 | 6 | 13 |

| $k$ | $o$ | $n = 7k + o$ |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 17 |
| 2 | 4 | 18 |
| 2 | 5 | 19 |
| 2 | 6 | 20 |
| 3 | 4 | 25 |
| 3 | 5 | 26 |
| 3 | 6 | 27 |
| 4 | 5 | 33 |
| 4 | 6 | 34 |
| 5 | 6 | 41 |

Zbroj svih brojeva iznosi $21 + 55 + 74 + 78 + 67 + 41 = 336$.

## 6. Troznamenkasti broj

Odredi najveći troznamenkasti broj koji je 21 put veći od umnoška svojih znamenaka.

***Rezultat:*** 315

**Rješenje.**

Za troznamenkasti broj $\overline{abc}$ mora vrijediti: $100a + 10b + c = 21abc$.

Umnožak znamenaka $abc$ pomnožen brojem 21 je troznamenkasti broj pa mora biti

$$5 \leq abc \leq 47.$$

Mogući umnošci $abc$ triju znamenaka su samo:

$$\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45\}$$

jer brojeve koji imaju dvoznamenkast prost faktor možemo eliminirati.

Odgovarajući brojevi $21abc$ su

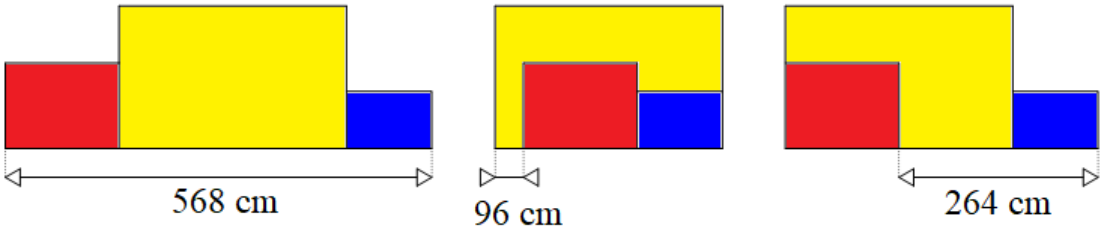
| | | | |
|---|---|---|---|
| $105 = 21 \cdot 5$ | $126 = 21 \cdot 6$ | $147 = 21 \cdot 7$ | $168 = 21 \cdot 8$ |
| $189 = 21 \cdot 9$ | $210 = 21 \cdot 10$ | $252 = 21 \cdot 12$ | $294 = 21 \cdot 14$ |
| $315 = 21 \cdot 15$ | $336 = 21 \cdot 16$ | $378 = 21 \cdot 18$ | $420 = 21 \cdot 20$ |
| $441 = 21 \cdot 21$ | $504 = 21 \cdot 24$ | $525 = 21 \cdot 25$ | $567 = 21 \cdot 27$ |
| $588 = 21 \cdot 27$ | $630 = 21 \cdot 30$ | $672 = 21 \cdot 32$ | $735 = 21 \cdot 35$ |
| $756 = 21 \cdot 36$ | $840 = 21 \cdot 40$ | $882 = 21 \cdot 42$ | $945 = 21 \cdot 45$ |

Sada direktno provjeravamo u kojim slučajevima je umnožak znamenaka troznamenkastog broja na lijevoj strani jednakosti jednak drugom faktoru na desnoj strani. Mnogi se slučajevi mogu eliminirati jer npr. nijedna znamenka ne može biti 0.

Jedino u trećem slučaju taj je uvjet ispunjen, jer je $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$. Zato je traženi broj 315.

## 7. Tri papira

Tri lista papira u boji najprije su postavljena jedan pored drugoga (prva slika).




Zatim su crveni i plavi papir postavljeni jedan do drugog, a ispred žutog papira (druga slika). Na kraju je crveni papir pomaknut do ruba žutog papira, a plavi je papir vraćen u početni položaj (treća slika).

Koliki je zbroj duljina žutog i crvenog papira u centimetrima?

***Rezultat:*** 484

**Prvo rješenje.**

Označimo sa C, Ž i P redom duljine crvenog, žutog i plavog papira. Na temelju slika zaključujemo da vrijedi

$\text{C} + \text{Ž} + \text{P} = 568,$

$\text{Ž} - \text{C} - \text{P} = 96,$

$\text{Ž} - \text{C} + \text{P} = 264.$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi 2Ž = 664, Ž = 332 cm.

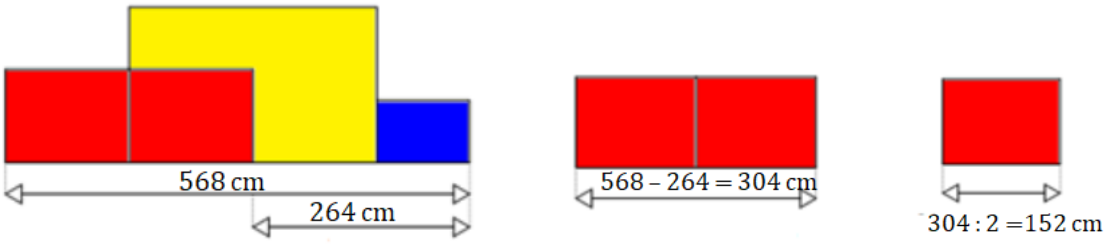
Iz druge dvije jednadžbe slijedi 2Ž – 2C = 360, pa je Ž – C = 180, te C = 332 – 180 = 152 cm.

Slijedi P = 568 – 332 – 152 = 84 cm.

Konačno, Ž + C = 332 + 152 = 484 cm. Zbroj duljina žutog i crvenog papira je 484 cm.

**Drugo rješenje.**

Spojimo li prvu i treću sliku dobit ćemo informaciju o duljini crvenog papira kao što je prikazano na slici. Dva crvena papira imaju duljinu 568 – 264 = 304 cm, a jedan 304 : 2 = 152 cm.

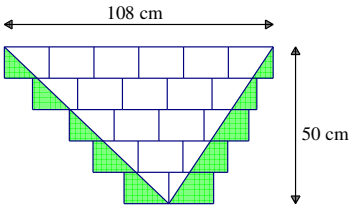



Iz prve (ili treće) slike možemo zaključiti da je zbroj duljina žutog i plavog papira 568 – 152 = 416 cm. Na temelju druge slike zaključujemo da razlika duljina žutog i plavog papira iznosi 96 + 152 = 248 cm.

Na sličan kao što smo izračunali duljinu crvenog papira računamo duljinu plavog. Nacrtamo li sliku na kojoj su dva plava papira, jedan kraj žutog papira, a drugi ispred žutog papira, možemo zaključiti da dva plava papira imaju duljinu 416 – 248 = 168 cm, a jedan plavi papir ima duljinu 168 : 2= 84 cm.

Žuti papir ima duljinu 416 – 84 = 332 cm, a zbroj duljina žutog i crvenog papira iznosi 332 + 152 = 484 cm.

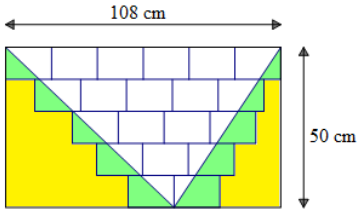
## 8. Osjenčana površina




Koliko kvadratnih centimetara iznosi osjenčana površina na slici ako su svi pravokutnici međusobno sukladni ?

***Rezultat:*** 900

***Prvo rješenje.***




Nadopunimo lik na slici do pravokutnika i istaknimo nadopunu žutom bojom. Neobojani trokut je pola površine pravokutnika, onda je i obojani dio pola njegove površine, tj. 2700 cm$^2$.

Dimenzije malih pravokutnika su 108 : 6 = 18 cm i 50 : 5 = 10 cm,

pa je površina svakog malog pravokutnika 180 cm$^2$.

U svakom redu odozgo prema dolje po jedan je pravokutnik manje pa je površina žutog dijela jednaka površini 1 + 2 + 3 + 4 = 10 pravokutnika, odnosno 1800 cm$^2$.

Zato je površina zelenog dijela 2700 − 1800 = 900 cm$^2$.

***Drugo rješenje.***

Dimenzija jednog pravokutnika je na slici je (108 cm : 6) × (50 cm : 5) = 18 cm × 10 cm.

Površina jednog pravokutnika je $P_1$ = 18 · 10 = 180 cm$^2$.

Površina svih 20 pravokutnika je $P_{20}$ = 20 · $P_1$= 20 · 180 = 3600 cm$^2$ .

Na crtežu uočimo bijeli trokut kojemu je osnovica duljine 108 cm, a duljina visine na osnovici je 50 cm.

Površina tog trokuta iznosi:

$$P_{\Delta} = \frac{108 \cdot 50}{2} = 54 \cdot 50 = 2700 \text{ cm}^2.$$

Površina zelenog dijela crteža jednaka je razlici površine 20 pravokutnika i površine trokuta, dakle:

3600 cm² – 2700 cm² = 900 cm².

## 9. Raspodjela eura

Ana, Janko i Tara imaju određene iznose eura i žele ih međusobno drugačije podijeliti. Najprije Ana daje Janku i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Janko i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Potom Janko daje Ani i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Na kraju, Tara daje Ani i Janku dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Janko imaju dvostruko više novca nego prije. Ako Tara na početku i na kraju ima 73 eura, koliko eura imaju Ana, Janko i Tara zajedno?

***Rezultat:*** 511

**Rješenje.**
Tara nakon prvog koraka ima 146 €, a nakon drugog koraka 292 €. Kako na kraju, nakon trećeg koraka, ima 73 €, dala je Ani i Janku $292 - 73 = 219$ €.
Iznosom od 219 € udvostručila je ukupan iznos koji su prije toga imali Ana i Janko.
Ana i Janko na kraju imaju $219 + 219 = 438$ €. Tara na kraju ima 73 €.
Ana, Janko i Tara zajedno imaju $438 + 73 = 511$ €.

## 10. Četiri boje

Svako od polja pravokutnika 4×3, kao na slici, treba obojiti jednom od četiri boje. Na koliko je načina to moguće napraviti tako da bilo koja četiri polja sa zajedničkim vrhom budu obojena različitim bojama?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

***Rezultat:*** 120

***Rješenje.***
Označimo boje s *a, b, c, d* i fiksirajmo raspored boja u gornjem lijevom 2x2 kvadratu.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *b* | | |
| *c* | *d* | | |
| | | | |

S obzirom da 4 različite boje možemo rasporediti na ta četiri polja na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina, na kraju ćemo dobiveni broj mogućnosti bojanja preostalih dijelova tablice pomnožiti s 24.

Pogledajmo na koji sve način možemo nastaviti s bojanjem do ispunjavanja 3x3 kvadrata.

Prva dva retka u trećem stupcu moraju sadržavati boje *a* i *c*, a treći redak mora započinjati bojama *a* i *b*.

To nas vodi na sljedeće tri mogućnosti:

1. slučaj

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *a* | |
| *c* | *d* | *c* | |
| *a* | *b* | | |

2. slučaj

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | |
| *c* | *d* | *a* | |
| *a* | *b* | | |

3. slučaj

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *a* | |
| *c* | *d* | *c* | |
| *b* | *a* | | |

U svakom od ova tri slučaja boja polja u trećem retku i trećem stupcu je jednoznačno određena uvjetima zadatka pa imamo:

1. slučaj

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | |
| $c$ | $d$ | $c$ | |
| $a$ | $b$ | $a$ | |

2. slučaj

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | |
| $c$ | $d$ | $a$ | |
| $a$ | $b$ | $c$ | |

3. slučaj

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | |
| $c$ | $d$ | $c$ | |
| $b$ | $a$ | $b$ | |

Zadovoljavajući uvjete zadatka bojanje u 1. slučaju možemo završiti na dva načina.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $c$ | $d$ |
| $a$ | $b$ | $a$ | $b$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $d$ |
| $c$ | $d$ | $c$ | $b$ |
| $a$ | $b$ | $a$ | $d$ |

U 2. slučaju bojanje možemo završiti također na dva načina.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $a$ | $d$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

U 3. slučaju bojanje možemo završiti na jedan način.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |

Dakle, ukupan je broj bojanja $24 \cdot (2 + 2 + 1) = 120$.