Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 7. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Jaja

Baka Mara ima četiri koke. Prva koka snese po jedno jaje svakog dana. Druga koka snese po jedno jaje svakog drugog dana. Treća koka snese po jedno jaje svakog trećeg dana. Četvrta koka snese po jedno jaje svakog četvrtog dana. Ako su 1. siječnja 2023. godine sve četiri koke snijele po jedno jaje, koliko će ukupno jaja bakine koke snijeti tijekom cijele 2023. godine?

Rezultat: 762

Prvo rješenje.

Godina 2023. nije prijestupna pa ima 365 dana.

Prva koka, koja snese svaki dan jedno jaje, snijet će u cijeloj godini 365 jaja.

Podijelimo li 365 s 2, količnik je 182 i ostatak 1. To znači da u cijeloj godini ima 182 puta po dva dana i još jedan dan. Kako druga koka snese jaje svaki drugi dan, ona će u 364 dana snijeti ukupno $182 + 1 = 183$ jaja.

Kako je 365 : 3 = 121 i ostatak 2, znači da u cijeloj godini ima 121 put po 3 dana i još dva dana pa će treća koka snijeti 121 + 1 = 122 jaja.

Budući da je 365 : 4 = 91 i ostatak 1, četvrta koka će snijeti 91 + 1 = 92 jaja.

Sve četiri koke zajedno snijet će 365 + 183 + 122 + 92 = 762 jaja.

Drugo rješenje.

2023. godina nije prijestupna pa ima 365 dana. Označimo u tablici kojim danima koja koka snese jaje.

Dani:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	...
1. koka	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
2. koka	+		+		+		+		+		+		+	
3. koka	+			+			+			+			+	
4. koka	+				+				+				+	

Kako se vidi iz tablice, trinaestog dana opet sve četiri koke snesu po jedno jaje. Nakon toga stupci tablice ponavljaju u ciklusima po 12 dana. U jednom ciklusu koke snesu 12 + 6 + 4 + 3 = 25 jaja.

U prvih 360 dana 2023. godine ima 360 : 12 = 30 punih ciklusa od po 12 dana.

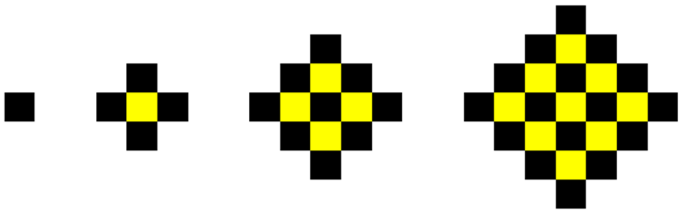
U tih 360 dana koke snesu 30 · 25 = 750 jaja.

U posljednjih 5 dana 2023. godine koke snesu još 5 + 3 + 2 + 2 = 12 jaja, kao u prvih 5 dana ciklusa.

To je ukupno 750 + 12 = 762 jaja u cijeloj 2023. godini.

2. Kvadratići

Na slici su prikazana četiri lika sastavljena od crnih i žutih kvadratića.
Ako na isti način nastavimo crtati likove, od koliko će se ukupno crnih i žutih kvadratića sastojati jedanaesti lik u nizu?



Rezultat: 221

Prvo rješenje.

Središta gornjeg, donjeg, lijevog i desno kvadratića lika čine (zakrenut) kvadrat. Stoga možemo uočiti da je broj crnih kvadratića u likovima na slici redom $1 \cdot 1 = 1,\ 2 \cdot 2 = 4,\ 3 \cdot 3 = 9, 4 \cdot 4 = 16$.

U jedanaestom liku je broj crnih kvadratića $11 \cdot 11 = 121$.

Na sličan način možemo uočiti da su žuti kvadratići u (zakrenutoj) kvadratnoj strukturi, pa je broj žutih kvadratića u likovima na slici redom $0 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1,\ 2 \cdot 2 = 4\ , 3 \cdot 3 = 9$.

U jedanaestom liku je broj žutih kvadratića $10 \cdot 10 = 100$.

Prema tome, jedanaesti lik u niz sastoji se od ukupno 121 + 100 = 221 crnih i žutih kvadratića.

Drugo rješenje.

Likovima na slici broj crnih i žutih kvadratića možemo izračunati na sljedeći način:

1. lik ima 1 kvadratić.

2. lik ima $1 + 4$ kvadratića.

3. lik ima $1 + 4 + 8 = 1 + 4 \cdot (1 + 2)$ kvadratića.

4. lik ima $1 + 4 + 8 + 12 = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3)$ kvadratića.

Svaki idući lik nastaje tako da na prethodni lik dodajemo kvadratiće duž ruba. Za svaki idući lik dodajemo 4 kvadratića više nego u prethodnom koraku. Stoga se jedanaesti lik u niz sastoji od ukupno

$$1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10) = 1 + 4 \cdot 55 = 221$$

crnih i žutih kvadratića.

3. Gusari

Kapetan gusarskog broda dijeli zlatnike s trojicom svojih gusara na sljedeći način:

prvo dijeljenje:	jedan meni, po jedan svakome od vas
drugo dijeljenje:	dva meni, po jedan svakome od vas
treće dijeljenje:	tri meni, po jedan svakome od vas.

U svakom sljedećem dijeljenju kapetan sebi uzima jedan zlatnik više nego u prethodnom dijeljenju, a svakom od ostalih gusara daje po jedan zlatnik.
Koliko zlatnika više od ostalih gusara zajedno ima kapetan nakon 44 dijeljenja?

Rezultat: 858

Rješenje.
U svakom dijeljenju kapetan svakome od trojice gusara daje po jedan zlatnik, ukupno 3 zlatnika.

Trojica gusara nakon 44 dijeljenja zajedno imaju $44 \cdot 3 = 132$ zlatnika.

Kapetan u prvom dijeljenju uzima sebi jedan, u drugom dva, u trećem tri, … i tako do 44. dijeljenja u kojem uzima sebi 44 zlatnika. Kapetan će nakon 44 dijeljenja imati

$1 + 2 + 3 + \ldots + 44 = (1 + 44) + (2 + 43) + \ldots + (22 + 23) = 22 \cdot 45 = 990$ zlatnika.

Nakon 44 dijeljenja kapetan ima $990 - 132 = 858$ zlatnika više od svih svojih gusara zajedno.

4. Razlika najvećeg i najmanjeg

Kada u prazna polja na slici upišemo znamenke 1, 2, 3, 4 i 5, tako da svaku znamenku upišemo točno jednom, dobivamo matematički izraz u kojem se zbrajaju i množe prirodni brojevi.
Kolika je razlika između najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti takvog izraza?

$$\square\square + \square\square \cdot \square$$

Rezultat: 182

Rješenje.

Brojevni izraz će biti manji ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica manja od znamenke jedinica, te ako je jednoznamenkasti broj u umnošku što manji. Zato množimo brojem 1, a u dvoznamenkastim brojevima biramo za znamenku desetica 2 i 3, a za znamenku jedinica 4 i 5.

Najmanju moguću vrijednost možemo dobiti na više načina:

$$25 + 34 \cdot 1 = 24 + 35 \cdot 1 = 34 + 25 \cdot 1 = 35 + 24 \cdot 1 = 59.$$

Brojevni izraz će biti veći ako se množe veći brojevi i ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica veća od znamenke jedinica.

Promotrimo gdje u izrazu $\_\_ + \_\_ \cdot \_$ treba biti znamenka 5 da bi rezultat bio najveći mogući.

Ona nije znamenka jedinica dvoznamenkastog broja. Također, nije ni znamenka desetica prvog dvoznamenkastog broja. Ako bi 5 bila znamenka desetica drugog dvoznamenkastog broja koji množimo jednoznamenkastim brojem, onda bi zamjenom tog jednoznamenkastog broja i znamenke 5 povećali rezultat. Na primjer, $52 \cdot 3 < 32 \cdot 5$. Zaključujemo da drugi dvoznamenkasti broj množimo brojem 5.

Sada promotrimo gdje treba biti znamenka 4. Ona je znamenka desetica jednog od dvoznamenkastih brojeva i to onog koje se množi brojem 5. Tako smo došli do: $\_\_ + 4\_ \cdot 5$.

Znamenka 3 je ili na prvom ili na zadnjem slobodnom mjestu, pa usporedimo vrijednosti izraza:

$$31 + 42 \cdot 5 = 31 + 210 = 241,$$

$$32 + 41 \cdot 5 = 32 + 205 = 237,$$

$$21 + 43 \cdot 5 = 21 + 215 = 236.$$

Najveća moguća vrijednost izraza je 241,

a razlika između najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti

$$241 - 59 = 182.$$

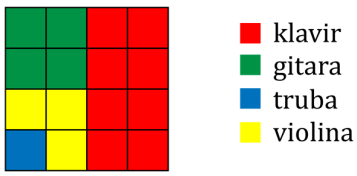
5. Glazbena škola

U nekoj glazbenoj školi svaki učenik svira točno jedan instrument: klavir, gitaru, trubu ili violinu. Polovina svih učenika svira klavir, a polovina od polovine svih učenika svira gitaru. Broj učenika koji sviraju trubu jednak je četvrtini broja učenika koji sviraju gitaru, a 72 učenika svira violinu. Koliko učenika ima glazbena škola?

Rezultat: 384

Rješenje.

Broj učenika možemo prikazati dijagramom u kojem cijeli kvadrat predstavlja sve učenike škole.
Polovinu učenika koji sviraju klavir označimo crvenom bojom.



One koji sviraju gitaru označimo zelenom bojom (to je polovina učenika koji ne sviraju klavir).

Preostali učenici sviraju trubu ili violinu. Njih ukupno ima jednako kao onih koji sviraju gitaru.

Kako učenika koji sviraju trubu ima četiri puta manje od onih koji sviraju gitaru, možemo označiti plavom bojom odgovarajući dio kvadrata. Preostale učenike, a to su oni koji sviraju violinu označimo žutom bojom.

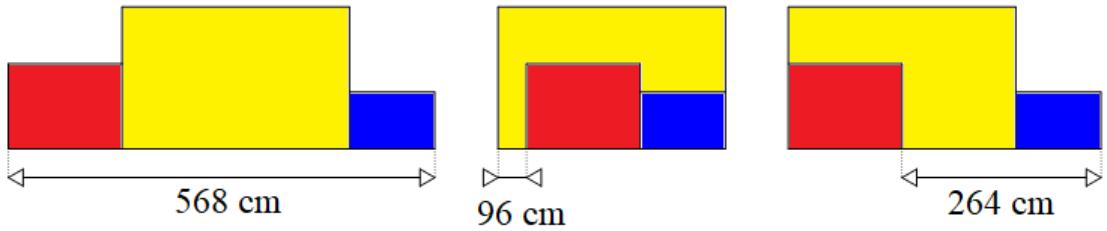
Sada je jasno da učenika koji sviraju violinu ima tri puta više od onih koji sviraju trubu.

Trubu svira $72 : 3 = 24$ učenika, trubu ili violinu njih $24 + 72 = 96$, a isto toliko ih svira gitaru. Klavir svira dvostruko više, 192 učenika. Glazbena škola ima ukupno $2 \cdot 192 = 384$ učenika.

Do tog smo rezultata mogli doći i množenjem $16 \cdot 24 = 384$ jer svaki mali kvadratić predstavlja 24 učenika.

6. Tri papira

Tri lista papira u boji najprije su postavljena jedan pored drugoga (prva slika).

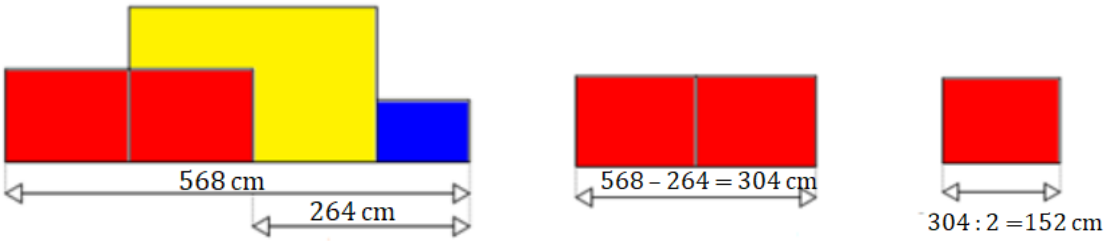


Zatim su crveni i plavi papir postavljeni ispred žutog papira (druga slika). Na kraju je crveni papir pomaknut do ruba žutog papira, a plavi je papir vraćen u početni položaj (treća slika).
Koliki je zbroj duljina žutog i crvenog papira u centimetrima?

Rezultat: 484

Rješenje.

Spojimo li prvu i treću sliku dobit ćemo informaciju o duljini crvenog papira kao što je prikazano na slici. Dva crvena papira imaju duljinu 568 – 264 = 304 cm, a jedan 304 : 2 = 152 cm.

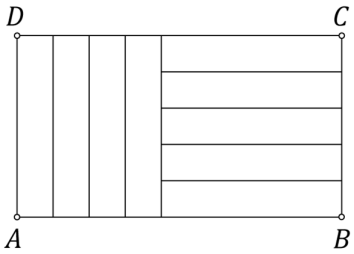


Iz prve (ili treće) slike možemo zaključiti da je zbroj duljina žutog i plavog papira $568 - 152 = 416$ cm. Na temelju druge slike zaključujemo da razlika duljina žutog i plavog papira iznosi $96 + 152 = 248$ cm.

Na sličan kao što smo izračunali duljinu crvenog papira računamo duljinu plavog. Nacrtamo li sliku na kojoj su dva plava papira, jedan kraj žutog papira, a drugi ispred žutog papira, možemo zaključiti da dva plava papira imaju duljinu $416 - 248 = 168$ cm, a jedan plavi papir ima duljinu $168 : 2 = 84$ cm.

Žuti papir ima duljinu $416 - 84 = 332$ cm, a zbroj duljina žutog i crvenog papira iznosi $332 + 152 = 484$ cm.

7. Opseg pravokutnika



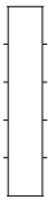
Pravokutnik $ABCD$ sastavljen je od devet jednakih pravokutnika. Opseg svakog od tih devet pravokutnika je 204 cm.

Izračunaj opseg pravokutnika $ABCD$ u centimetrima.

Rezultat: 476

Rješenje.

Dulja stranica svakog od tih devet pravokutnika pet je puta dulja od kraće stranice. Podijelimo li opseg jednog od njih s 12, dobivamo duljinu kraće stranice svakog od tih devet pravokutnika.



Kraća stranica ima duljinu 204 : 12 = 17 cm i pojavljuje se:

- u stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ pravokutnika $ABCD$ ukupno $5 + 5$, tj. 10 puta,
- u stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$ ukupno $9 + 9$, tj. 18 puta.

Kraća stranica duljine 17 cm pojavljuje se u opsegu pravokutnika $ABCD$ ukupno $10 + 18$, tj. 28 puta.

Opseg pravokutnika $ABCD$ je $28 \cdot 17$, tj. 476 cm.

8. Lokot

Marko se ne može sjetiti šifre koja se sastoji od triju znamenaka od 0 do 9. Sjeća se da su neke dvije znamenke jednake, a preostala znamenka različita od njih. Također se sjeća da su ili sve tri znamenke parne ili sve tri neparne. Koliko ima različitih mogućnosti Markove zaboravljene šifre? Nula je parna znamenka.

Rezultat: 120

Rješenje.

S obzirom na to koje su dvije znamenke jednake razlikujemo 3 slučaja:

$\overline{aab}, \overline{aba}$ i $\overline{baa}$ pri čemu je $a, b \in \{0,1,\ldots,9\}$, $a \neq b$.

Promotrimo prvi slučaj, $\overline{aab}$. Ako su sve znamenke parne, znamenka a može biti 0, 2, 4, 6 ili 8, što znači da ima 5 mogućnosti. Za svaku od tih mogućnosti, znamenka b može se odabrati na 4 načina jer može biti bilo koja osim one koja je odabrana za znamenku a. To je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ mogućnosti za prvi slučaj.

Za drugi i treći slučaj, $\overline{aba}$ i $\overline{baa}$, također će biti po 20 mogućnosti u slučaju parnih znamenaka. Dakle, za parne znamenke ukupno je $3 \cdot 20 = 60$ mogućnosti.

Za neparne znamenke, na analogan način, dobiva se također 60 mogućnosti, što znači da je ukupno 120 mogućnosti za šifru lokota.

9. Megakocka

Od jednakih je kockica složena jedna velika kocka. Duljina brida velike kocke sto puta je veća od duljine brida svake kockice. Velika kocka položena je na stol i sve su njezine strane, osim one koja dodiruje stol, obojene crvenom bojom. Koliko kockica ima točno dvije strane crvene boje?

Rezultat: 788

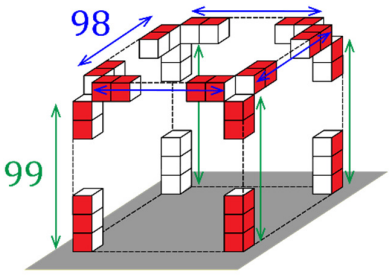
Rješenje.

Uzduž svakog od 4 brida gornje plohe kocke ima 98 kockica s dvjema crvenim stranama.

Uzduž svakog od 4 bočna brida kocke ima 99 kockica s dvjema crvenim stranama.

Broj kockica s točno dvije strane crvene boje iznosi

$4 \cdot 98 + 4 \cdot 99 = 392 + 396 = 788$.



10. Raspodjela eura

Ana, Janko i Tara imaju određene iznose eura i žele ih međusobno drugačije podijeliti. Najprije Ana daje Janku i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Janko i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Potom Janko daje Ani i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Na kraju, Tara daje Ani i Janku dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Janko imaju dvostruko više novca nego prije. Ako Tara na početku i na kraju ima 73 eura, koliko eura imaju Ana, Janko i Tara zajedno?

Rezultat: 511

Rješenje.

Tara nakon prvog koraka ima 146 €, a nakon drugog koraka 292 €. Kako na kraju, nakon trećeg koraka, ima 73 €, dala je Ani i Janku $292 - 73 = 219$ €.

Iznosom od 219 € udvostručila je ukupan iznos koji su prije toga imali Ana i Janko.

Ana i Janko na kraju imaju $219 + 219 = 438$ €. Tara na kraju ima 73 €.

Ana, Janko i Tara zajedno imaju $438 + 73 = 511$ €.