Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – četvrtak, 19. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Odredi prirodan broj $\overline{abcd}$ tako da za njegove znamenke vrijedi

$$a \cdot d + c \cdot d = 72, \quad a \cdot c + c \cdot d = 56 \quad \text{i} \quad a \cdot b \cdot c \cdot d = 0.$$

Prvo rješenje.

Iz uvjeta $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$ slijedi da je barem jedan od faktora jednak 0. Ako je $d = 0$, onda bi prva jednakost glasila 0 = 72 , što nije moguće. Ako je $c = 0$, onda bi druga zadana jednakost glasila 0 = 56, što isto nije moguće.

Ako je a = 0, onda vrijedi $c \cdot d = 72$ i $c \cdot d = 56$, što je također nemoguće. To znači da je nužno b = 0.

Zapišimo izraze na lijevim stranama prve dvije zadane jednakosti u obliku umnoška:

$$d \cdot (a + c) = 72 \quad \text{i} \quad c \cdot (a + d) = 56.$$

Zapišimo u tablicu sve mogućnosti za c, a i d za koje vrijedi druga jednakost, te provjerimo u kojim od tih mogućnosti vrijedi i prva jednakost.

c	$a+d$	a	d	$d \cdot (a+c)$
1	56	/	/	/
2	28	/	/	/
4	14	5	9	81
4	14	6	8	80
4	14	7	7	77
4	14	8	6	72
4	14	9	5	65
7	8	1	7	56
7	8	2	6	54
7	8	3	5	50

c	$a+d$	a	d	$d \cdot (a+c)$
7	8	4	4	44
7	8	5	3	36
7	8	6	2	26
7	8	7	1	14
8	7	1	6	54
8	7	2	5	50
8	7	3	4	44
8	7	4	3	36
8	7	5	2	26
8	7	6	1	14

Jedina mogućnost koja zadovoljava oba uvjeta je $a = 8$, $c = 4$ i $d = 6$, tj. traženi broj je 8 046.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo $b = 0$.

Oduzimanjem prve dvije zadane jednakosti dobivamo $a \cdot d - a \cdot c = 16$, odnosno $a \cdot (d - c) = 16$.

Budući da su a, c, d znamenke, a i $d - c$ moraju biti manji od 10.

Razlikujemo tri slučaja:

1) $a = 2, d - c = 8$

Budući da su c i d znamenke, moguće je samo da je $d = 9$ i $c = 1$ ili $d = 8$ i $c = 0$. Već znamo da c ne može biti 0, a ako je $d = 9$ i $c = 1$, onda izraz $a \cdot d + c \cdot d$ iznosi $2 \cdot 9 + 1 \cdot 9 = 27$, što nije u skladu s prvom zadanom jednakosti. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.

2) $a = 4, d - c = 4$

Budući da je d najviše 9, zaključujemo da je c najviše 5. Redom uvrštavamo vrijednosti za c, te računamo vrijednost nepoznanice d i izraza $a \cdot d + c \cdot d$.

c	$d = c + 4$	$a \cdot d + c \cdot d$
1	5	$2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 15$
2	6	$2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24$
3	7	$2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 35$
4	8	$2 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 48$
5	9	$2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 63$

Budući da u zadnjem stupcu ni u kojem slučaju nismo dobili vrijednost 72, zaključujemo da nema rješenja.

3) $a = 8, d - c = 2$

U ovom slučaju opet uvrštavamo vrijednosti za c, te računamo vrijednost nepoznanice d i izraza $a \cdot d + c \cdot d$.

c	$d = c + 2$	$a \cdot d + c \cdot d$
1	3	$8 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 27$
2	4	$8 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 40$
3	5	$8 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 55$
4	6	$8 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 72$
5	7	$8 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 91$
6	8	$8 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 112$
7	9	$8 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 135$

Dobili smo rješenje $= 8$, $c = 4$ i $d = 6$, tj. traženi broj je 8 046.

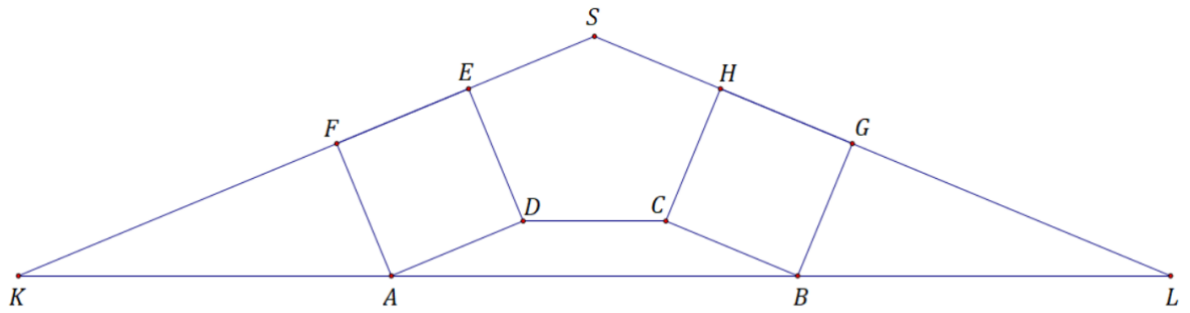
2. Stranice $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ jednakokračnog trapeza $ABCD$ međusobno su sukladne. Nad njegovim krakovima s vanjske strane nacrtani su kvadrati $ADEF$ i $CBGH$. Ako je tupi kut trapeza sedam puta veći od njegovog šiljastog kuta, odredi mjeru kuta koji zatvaraju pravci EF i GH.

Prvo rješenje.

Ako je α veličina šiljastog, a β veličina tupog kuta trapeza $ABCD$, prema uvjetu zadatka vrijedi β = 7α. Zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta je 360°, a u jednakokračnom trapezu šiljasti kutovi su međusobno sukladni i tupi kutovi su međusobno sukladni pa vrijedi:

$$2\alpha + 2\beta = 360° \qquad \alpha + \beta = 180° \qquad \alpha + 7\alpha = 180° \qquad 8\alpha = 180°$$

odakle dobivamo α = 22.5° i β = 157.5°.



Neka se pravci EF i GH sijeku u točki S. Neka pravac na kojem leži osnovica $\overline{AB}$ siječe pravac EF u točki K, a pravac GH u točki L. Želimo odrediti kut $|\angle KSL|$.

U ΔAFK vrijedi $|\angle KFA| = 90°$ i $|\angle FAK| = 180° - |\angle DAF| - |\angle BAD| = 180° - 90° - 22.5° = 67.5°$.

Stoga zaključujemo $|\angle AKF| = 180° - |\angle KFA| - |\angle FAK| = 22.5°$.

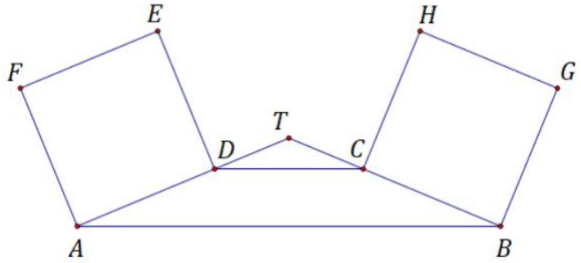
Na sličan način računamo $|\angle GBL| = 22.5°$. Dakle, $|\angle LKS| = |\angle SLK| = 22.5°$.

Slijedi da je $|\angle KSL| = 180° - 22.5° - 22.5° = 135°$. Traženi kut između pravaca je 45°.

Napomena. Umjesto računanja kutova u trokutu AFK, možemo uočiti da su pravci AD i KS paralelni (jer pravac KS sadrži stranicu $\overline{EF}$ koja je nasuprotna stranici $\overline{AD}$), pa zaključiti da vrijedi $|\angle AKF| = |\angle BAD| = 22.5°$ zbog jednakosti veličina kutova uz presječnicu.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, uvedemo oznake α i β, te dobivamo α = 22.5° i β = 157.5°.



Pravci EF i GH paralelni su (redom) pravcima AD i BC. Stoga je kut između pravaca EF i GH iste veličine kao kut između pravaca AD i BC. Neka se pravci AD i BC sijeku u točki T.

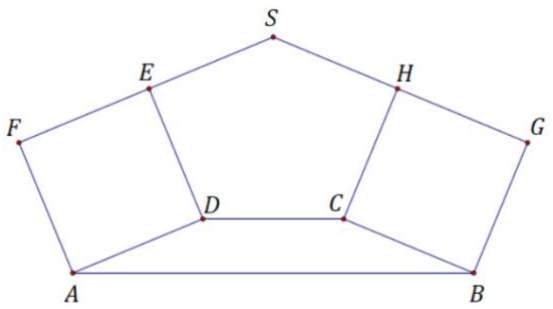
Trokuti ABT i CDT su jednakokračni, te imaju iste veličine kutova jer su pravci AB i CD paralelni.

Dakle, vrijedi $|\angle CDT| = |\angle TCD| = \alpha = 22.5°$. Stoga računamo $|\angle DTC| = 180° - 22.5° - 22.5° = 135°$.

Traženi kut između pravaca je 45°.

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju, uvedemo oznake α i β, te dobivamo α = 22.5° i β = 157.5°.



Neka se pravci EF i GH sijeku u točki S.

U peterokutu $DCHSE$ vrijedi $|\angle DES| = |\angle SHC| = 90°$.

Nadalje, $|\angle CDE| = |\angle HCD| = 360° - 157.5° - 90° = 112.5°$.

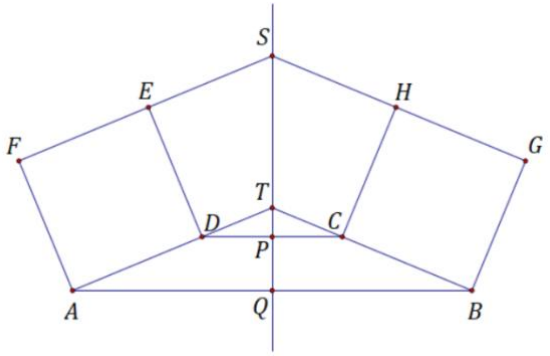
Budući da je zbroj veličina kutova u peterokutu 540°, slijedi da je traženi kut

$$|\angle ESH| = 540° - 112.5° - 112.5° - 90° - 90° = 135°.$$

Traženi kut između pravaca je 45°.

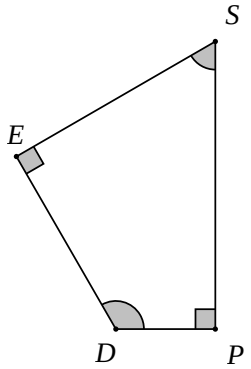
Četvrto rješenje.

Kao u prvom rješenju, uvedemo oznake α i β, te dobivamo α = 22.5° i β = 157.5°.



Budući da je trapez $ABCD$ jednakokračan, osnovice imaju zajedničku simetralu.

Obzirom na taj pravac, trapez je osnosimetričan, te su kvadrati $ADEF$ i $BCHG$ međusobno osnosimetrične slike. Stoga se pravci EF i GH sijeku na tom istom pravcu, tj. peterokut $DCHSE$ je osnosimetričan s obzirom na pravac PS, gdje je P polovište dužine $\overline{CD}$.



U četverokutu DPSE kutovi s vrhovima P i E su pravi, a kut s vrhom D ima veličinu 360° – (157.5° + 90°) = 112.5°, pa je veličina kuta s vrhom S u tom četverokutu 360° – (2 · 90° + 112.5°) = 360° – 292.5° = 67.5°.

Konačno, $|\angle ESH| = 2 \cdot 67.5° = 135°$.

Traženi kut između pravaca je 45°.

3. Koliko ima prirodnih brojeva čiji je umnožak znamenaka 12, zbroj znamenaka 12 i djeljivi su brojem 12? Odredi najveći takav broj.

Rješenje.

Zapišimo broj 12 kao umnožak jednoznamenkastih brojeva većih od 1: $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Kako zbroj znamenaka mora biti 12, postoje tri mogućnosti za znamenke takvog broja:

- 6, 2, 1, 1, 1, 1
- 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1
- 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1.

Broj čiji je zbroj znamenaka 12 djeljiv je s 3. Još treba postići da broj bude djeljiv s 4, pa ćemo posebno promatrati dvoznamenkasti završetak broja.

U prvom slučaju, posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 16 (brojevi koji završavaju na 26 ili 62 nisu djeljivi s 4), dakle imamo dvije mogućnosti. Od preostale četiri znamenke, tri su znamenke 1 i jedna znamenka 2 ili 6, pa za njihov poredak postoje četiri mogućnosti (znamenku 2 ili 6 možemo staviti na bilo koje od prva četiri dekadska mjesta). Ukupno ima 8 takvih brojeva.

U drugom slučaju, jedina parna znamenka je 4, pa ona mora biti znamenka jedinica. No, dvoznamenkasti završetci 14 i 34 nisu djeljivi s 4. U ovom slučaju ne postoje brojevi koji ispunjavaju zadane uvjete.

U trećem slučaju, znamenka jedinica mora biti 2, a posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 32 (ne može biti 22).

Ako su posljednje dvije znamenke 12, na prvih šest dekadskih mjesta treba rasporediti znamenke 3, 2, 1,1,1,1. Znamenke 3 i 2 možemo rasporediti na $6 \cdot 5 = 30$ načina, dok su na ostalim mjestima znamenke 1.

Ako su posljednje dvije znamenke 32, na prvih šest mjesta treba rasporediti znamenke 2, 1, 1, 1, 1, 1. To možemo na šest načina.

U trećem slučaju je $30 + 6 = 36$ takvih brojeva.

Konačno, takvih je brojeva ukupno $8 + 36 = 44$. Najveći takav broj je 32111112.

Napomena. Ti brojevi su:

111612, 116112, 161112, 611112, 111216, 112116, 121116, 211116,
11112312, 11113212, 11121312, 11123112, 11131212, 11132112,
11211312, 11213112, 11231112, 11311212, 11312112, 11321112,
12111312, 12113112, 12131112, 12311112, 13111212, 13112112,
13121112, 13211112, 21111312, 21113112, 21131112, 21311112,
23111112, 31111212, 31112112, 31121112, 31211112, 32111112,
21111132, 12111132, 11211132, 11121132, 11112132 i 11111232.

4. U prazna polja tablice kao na slici treba upisati osam međusobno različitih jednoznamenkastih prirodnih brojeva tako da zbroj brojeva u svakom retku, osim u najnižem, bude za jedan veći od zbroja brojeva u retku ispod njega. Na koliko je načina moguće popuniti tablicu?

Rješenje.

Od 9 mogućih jednoznamenkastih brojeva u tablici jedan nećemo upotrijebiti. Najveći mogući zbroj svih upotrijebljenih jednoznamenkastih prirodnih brojeva dobio bi se izostavljanjem broja 1. Tada bi zbroj svih 8 znamenaka bio

$$2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 44.$$

Najmanji zbroj bi bio bez broja 9, što bi iznosilo 36.

Zaključujemo da je zbroj svih 8 brojeva veći ili jednak 36, a manji ili jednak 44.

Kako su zbrojevi brojeva u retcima četiri uzastopna broja, označimo ih $n, n + 1, n + 2, n + 3$, gdje je n prirodan broj, njihov zbroj je $4n + 6$. Jedini brojevi tog oblika između 36 i 44 su 38 i 42.

Ako je zbroj svih 8 brojeva 38, znači da je u tom slučaju izostavljen broj 7 jer je zbroj svih 9 brojeva jednak 45. Tada je $4n + 6 = 38$, pa je $n = 8$, te su zbrojevi brojeva po retcima 8, 9, 10 i 11.

Ispitajmo sve mogućnosti za navedeni slučaj tako da prvo ispišemo mogućnosti za svaki zbroj.

zbroj	mogućnosti
8	2+6, 3+5
9	1+8, 3+6, 4+5
10	1+9, 2+8, 4+6
11	2+9, 3+8, 5+6

Odmah možemo eliminirati zbrojeve 9 = 3+6 i 11=5+6 jer bez tih pribrojnika nije moguće dobiti zbroj 8, a zatim i zbroj 10=2+8 jer bez tih pribrojnika nije moguće dobiti zbroj 11.

Budući da isti broj ne možemo upisati na više mjesta u tablici dobivamo dvije mogućnosti za zbrojeve u tablici:

zbroj	I	II
11	3 + 8	2 + 9
10	1 + 9	4 + 6
9	4 +5	1 + 8
8	2 + 6	3 + 5

Ako je zbroj svih 8 brojeva 42, tada je izostavljen broj 3. Tada je $4n + 6 = 42$, pa je $n = 9$.

Zbrojevi brojeva po retcima su 9, 10, 11 i 12.

Ispitajmo sve mogućnosti za navedeni slučaj tako da prvo ispišemo mogućnosti za svaki zbroj.

zbroj	mogućnosti
9	1+8, 2+7, 4+5
10	1+9, 2+8, 4+6
11	2+9, 4+7, 5+6
12	4+8, 5+7

Možemo eliminirati zbrojeve 4+5, 4+7 i 2+8.

Budući da isti broj ne možemo upisati na više mjesta u tablici dobivamo dvije mogućnosti za zbrojeve u tablici:

zbroj	III	IV
12	5 + 7	4 + 8
10	2 + 9	5 + 6
9	4 + 6	1 + 9
8	1 + 8	2 + 7

Kako nije važno u koji stupac upisujemo koji pribrojnik, za svaki redak imamo dva načina za upisivanje.

Stoga, za svaku navedenu mogućnost, tablicu možemo popuniti na: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ načina.

Ukupan broj načina kako možemo popuniti tablicu je $4 \cdot 16 = 64$.

5. Na svečanosti povodom Dana grada postavljena je tribina na kojoj su sjedala pravilno raspoređena u redove i stupce (broj sjedala u svim redovima je isti, broj sjedala u svim stupcima je isti). Svaki gledatelj na glavi ima ili kapu ili šešir. Gradonačelnik je uočio da je u svakom redu točno 8 gledatelja s kapom, a u svakom stupcu točno 9 gledatelja sa šeširom. Na tribini je ukupno 12 praznih mjesta.

a) Koliko najmanje mjesta može biti na tribini?
b) Prikaži primjer rasporeda sjedenja koji odgovara uvjetima zadatka.

Rješenje.
a) Označimo s a broj redova, te s b broj stupaca te tribine.

Ukupan broj mjesta na tribini je ab, ukupan broj gledatelja s kapama je $8a$, a ukupan broj gledatelja sa šeširima je $9b$. Vrijedi

$$ab = 8a + 9b + 12.$$

Sada je

$$ab - 8a = 9b + 12$$

$$a(b - 8) = 9b + 12$$

$$a = \frac{9b + 12}{b - 8} = \frac{9(b - 8) + 84}{b + 8} = 9 + \frac{84}{b - 8}$$

Djelitelji broja 84 su: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84, i to su mogućnosti za broj $b - 8$.

Za svaki djeljitelj računamo pripadne vrijednosti za b, a i ab.

$b - 8$	b	$\frac{84}{b-8}$	a	ab
1	9	84	93	837
2	10	42	51	510
3	11	28	37	407
4	12	21	30	360
6	14	14	23	322
7	15	12	21	315
12	20	7	16	320
14	22	6	15	330
21	29	4	13	377
28	36	3	12	432
42	50	2	11	550
84	92	1	10	920

Na tribini ima najmanje 315 mjesta.

Napomena. Dobivenu jednadžbu moguće je riješiti i na ovaj način:

$$ab - 8a - 9b = 12$$

$$a(b-8) - 9(b-8) = 84$$

$$(a-9)(b-8) = 84$$

Zapišimo broj 84 u obliku umnoška dva prirodna broja:

$$84 = 1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12$$

$b-8$	$a-9$	b	a	ab
1	84	9	93	837
2	42	10	51	510
3	28	11	37	407
4	21	12	30	360
6	14	14	23	322
7	12	15	21	315
12	7	20	16	320
14	6	22	15	330
21	4	29	13	377
28	3	36	12	432
42	2	50	11	550
84	1	92	10	920

Na tribini može biti najmanje 315 mjesta.

b) Primjer rasporeda sjedenja za 315 mjesta na tribini:

U svakom redu ima 8 kapa, u svakom stupcu 9 šešira te ostaje 12 praznih mjesta.

1	2	3	4	5	6	7	8	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	3	3	3	3	3
3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	4	4	4	4
4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	5	5	5
5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	6	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	7
7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
9	8	7	6	5	4	3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	8	7	6	5	4	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	9	8	7	6	5	2	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	9	8	7	6	3	3	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	9	8	7	4	4	4	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	9	8	5	5	5	5	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	9	6	6	6	6	6	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	8	8	8	8	8	8	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	9	9	9	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	8						
1	2	3	4	5	6	7	9	8						