Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – četvrtak, 19. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. U akvariju oblika kvadra, duljine 75 cm, širine 28 cm i visine 40 cm, nalazi se voda do visine 25 cm. U akvarij uronimo kamen i voda se podigne za četvrtinu svoje visine. U akvarij potom stavimo i ribice koje zauzmu 1 % volumena akvarija. Dopuštena visina vode u akvariju mora biti za 10 % manja od visine akvarija kako ribice ne bi mogle iskočiti. Koliko litara vode još smijemo uliti u akvarij nakon što smo stavili kamen i ribice?

Prvo rješenje.

Ako u akvarij uronimo kamen voda se podigne za četvrtinu svoje visine tj. za $25 : 4 = 6.25$ cm pa je nova visina vode 31.25 cm.

Ako ribice zauzimaju 1 % volumena akvarija onda po visini zauzmu 100-ti dio od 40 cm ili 0.4 cm.

Nakon što su u akvarij položene i kamen i ribice visina vode doseže $31.25 + 0.4 = 31.65$ cm.

10 % visine akvarija iznosi $0.1 \cdot 40 = 4$ cm pa je maksimalna dopuštena visina vode u akvariju $40 - 4 = 36$ cm i do nje nedostaje $36 - 31.65 = 4.35$ cm.

Volumen vode koju smijemo uliti iznosi $V = a \cdot b \cdot c = 75 \cdot 28 \cdot 4.35 = 9135\ \text{cm}^3 = 9.135$ litara.

Drugo rješenje.

Označimo duljinu, širinu i visinu akvarija redom sa a, b, c, a visinu vode prije nego smo uronili kamen s h.

Volumen vode u akvariju iznosi $V_1 = a \cdot b \cdot h = 75 \cdot 28 \cdot 25 = 52\,500\ \text{cm}^3$.

Četvrtina visine vode iznosi $25 : 4 = 6.25$ cm.

Nakon što uronimo kamen volumen vode i kamena zajedno u akvariju iznosi $V_2 = a \cdot b \cdot (h + 6.25) = 75 \cdot 28 \cdot 31.25 = 65\,625\ \text{cm}^3$ pa je razlika zapravo volumen kamena $65\,625 - 52\,500 = 13\,125\ \text{cm}^3$.

Volumen akvarija iznosi $V = a \cdot b \cdot c = 75 \cdot 28 \cdot 40 = 84\,000\ \text{cm}^3$ pa ribice zauzimaju 100-ti dio tog volumena tj. $840\ \text{cm}^3$.

10 % od 40 cm je desetina te duljine i iznosi 4 cm.

Stoga volumen do dopuštene granice iznosi $V_3 = a \cdot b \cdot (c - 4) = 75 \cdot 28 \cdot (40 - 4) = 75 \cdot 28 \cdot 36 = 75\,600\ \text{cm}^3$.

Smije se uliti još $75\,600 - (65\,625 + 840) = 9\,135\ \text{cm}^3 = 9.135$ litara vode.

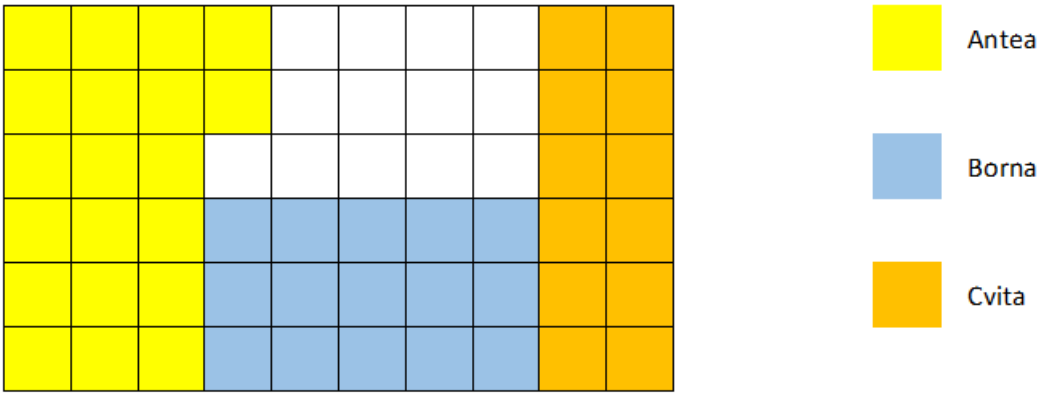
2. Antea, Borna, Cvita i Damir sakupljaju poštanske marke. Broj Anteinih maraka je točno polovina broja maraka ostalo troje djece. Broj Borninih maraka je trećina broja maraka ostalo troje djece. Broj Cvitinih maraka je četvrtina broja maraka ostalo troje djece. Ako je Damir sakupio više od 160, a manje od 180 maraka koliko su maraka sakupili svi zajedno?

Prvo rješenje.

Kako je Antea skupila polovinu broja maraka ostalo troje djece, skupila je trećinu svih maraka.

Na sličan način zaključujemo da je Borna skupio četvrtinu, a Cvita petinu svih maraka. Ukupan broj maraka stoga je djeljiv s 3, s 4 i s 5, dakle mora biti višekratnik sva tri broja. Najmanji takav broj je 60.

Prikažimo uvjete zadatka grafički tako da ukupan broj maraka predstavimo sa 60 kvadratića:



Nakon što izdvojimo Anteine, Bornine i Cvitine marke, preostaje 13 kvadratića koji predstavljaju broj Damirovih maraka. Znamo da Damir ima između 160 i 180 maraka. Budući da vrijedi

$160 : 13 = 12$ i ostatak 4,

$180 : 13 = 13$ i ostatak 11,

zaključujemo da je jedini broj između 160 i 180 koji se može bez ostatka podijeliti s 13 broj $13 \cdot 13 = 169$.

Svaki kvadratić predstavlja 13 maraka. Svi zajedno sakupili su $13 \cdot 60 = 780$ maraka.

Drugo rješenje.

Označimo s a, b, c i d broj maraka koje su prikupili Antea, Borna, Cvita i Damir.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

(1) $b + c + d = 2a$, tj. $a + b + c + d = 3a$,

(2) $a + c + d = 3b$, tj. $a + b + c + d = 4b$,

(3) $a + b + d = 4c$, tj. $a + b + c + d = 5c$.

Iz (1), (2) i (3) slijedi da je ukupni broj maraka $a + b + c + d = 3a = 4b = 5c$ pa je zato ukupni broj maraka djeljiv s 3, 4 i 5, odnosno djeljiv je sa 60.

Tako imamo:

$a + b + c + d = 60k$, za neki prirodni broj k, odnosno $a = 20k, b = 15k, c = 12k$.

Konačno,

$$d = 60k - 20k - 15k - 12k = 13k.$$

Kako znamo da je $160 < d < 180$, zaključujemo da je $d = 169$ tj. $k = 13$ pa je ukupni broj prikupljenih maraka

$$a + b + c + d = 60 \cdot 13 = 780.$$

Treće rješenje.

Ako je Antea skupila polovinu broja maraka ostalo troje djece, onda je skupila trećinu svih maraka.

Na sličan način zaključujemo da je Bruno skupio četvrtinu, a Cvita petinu svih maraka.

Udio Damirovih maraka možemo dobiti tako da od jedno cijelo oduzmemo $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

Kako bismo zbrojili razlomke svedimo ih na ekvivalentne razlomke jednakih nazivnika.

Najmanji broj koji je višekratnik brojeva 3, 4 i 5 je upravo njihov umnožak $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Budući da vrijedi

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}=\frac{47}{60},$$

Damirove marke čine $\frac{13}{60}$ svih maraka. Iz toga slijedi da broj Damirovih maraka treba biti djeljiv s 13.

Jedini broj između 160 i 180 djeljiv s 13 je 169, pa Damir ima 169 maraka.

Kako 169 čini $\frac{13}{60}$ svih maraka, slijedi da je $\frac{1}{60}$ svih maraka 13, pa je ukupni broj maraka $60 \cdot 13 = 780$.

3. Koliko ima prirodnih brojeva čiji je umnožak znamenaka 12, zbroj znamenaka 12 i djeljivi su brojem 12? Odredi najveći takav broj.

Rješenje.

Zapišimo broj 12 kao umnožak jednoznamenkastih brojeva većih od 1: $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Kako zbroj znamenaka mora biti 12, postoje tri mogućnosti za znamenke takvog broja:

- 6, 2, 1, 1, 1, 1
- 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1
- 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1.

Broj čiji je zbroj znamenaka 12 djeljiv je s 3. Još treba postići da broj bude djeljiv s 4, pa ćemo posebno promatrati dvoznamenkasti završetak broja.

U prvom slučaju, posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 16 (brojevi koji završavaju na 26 ili 62 nisu djeljivi s 4), dakle imamo dvije mogućnosti. Od preostale četiri znamenke, tri su znamenke 1 i jedna znamenka 2 ili 6, pa za njihov poredak postoje četiri mogućnosti (znamenku 2 ili 6 možemo staviti na bilo koje od prva četiri dekadska mjesta). Ukupno ima 8 takvih brojeva.

U drugom slučaju, jedina parna znamenka je 4, pa ona mora biti znamenka jedinica. No, dvoznamenkasti završetci 14 i 34 nisu djeljivi s 4. U ovom slučaju ne postoje brojevi koji ispunjavaju zadane uvjete.

U trećem slučaju, znamenka jedinica mora biti 2, a posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 32 (ne može biti 22).

Ako su posljednje dvije znamenke 12, na prvih šest dekadskih mjesta treba rasporediti znamenke 3, 2, 1,1,1,1. Znamenke 3 i 2 možemo rasporediti na $6 \cdot 5 = 30$ načina, dok su na ostalim mjestima znamenke 1.

Ako su posljednje dvije znamenke 32, na prvih šest mjesta treba rasporediti znamenke 2, 1, 1, 1, 1, 1. To možemo na šest načina.

U trećem slučaju je $30 + 6 = 36$ takvih brojeva.

Konačno, takvih je brojeva ukupno $8 + 36 = 44$. Najveći takav broj je 32111112.

Napomena. Ti brojevi su:

111612, 116112, 161112, 611112, 111216, 112116, 121116, 211116,
11112312, 11113212, 11121312, 11123112, 11131212, 11132112,
11211312, 11213112, 11231112, 11311212, 11312112, 11321112,
12111312, 12113112, 12131112, 12311112, 13111212, 13112112,
13121112, 13211112, 21111312, 21113112, 21131112, 21311112,
23111112, 31111212, 31112112, 31121112, 31211112, 32111112,
21111132, 12111132, 11211132, 11121132, 11112132 i 11111232.

4. U tablicu s 3 retka i n stupaca želimo upisati brojeve 1,2,3, … , n tako da u svakom od tri retka budu napisani svi ti brojevi te da zbroj brojeva u svakom stupcu bude jednak.

a) Pokaži primjerom da je za $n = 9$ to moguće napraviti.
b) Dokaži da n ne može biti paran broj.

Rješenje.

a) Zbroj svih brojeva u sva tri retka je $(1+2+\ldots+9) \cdot 3 = 45 \cdot 3 = 135$.
U svim stupcima zbroj triju brojeva mora biti jednak pa zbroj u svakom stupcu iznosi $135 : 9 = 15$.
Postoji mnogo načina za konstruiranje primjera. Jedan primjer je:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	6	4	8	9	7	2	3	1
9	7	8	3	1	2	6	4	5

b) Neka je n bilo koji paran broj.

Kako se u sva tri retka moraju upisati isti brojevi $1, 2, 3, \ldots, n$, zbroj svih brojeva u svakom retku iznosi

$$n \cdot (n+1) : 2\,,$$

a u sva tri retka zajedno $3 \cdot n \cdot (n+1) : 2$.
U svakom od n stupaca zbroj triju brojeva mora biti jednak pa zbroj u svakom stupcu iznosi

$$3 \cdot (n+1) : 2.$$

Kako je n paran broj, broj $n+1$ je neparan.
Umnožak dva neparna broja je neparan broj, pa je i broj $3 \cdot (n+1)$ neparan.
Stoga, količnik $3 \cdot (n+1) : 2$ nije prirodan broj te zaključujemo da nije moguće u tablicu upisati brojeve na željeni način ako je n paran broj.

5. Na svečanosti povodom Dana grada postavljena je tribina na kojoj su sjedala pravilno raspoređena u 12 redova i određenom broju stupaca. Svaki gledatelj na glavi ima ili kapu ili šešir. Gradonačelnik je uočio da je u svakom od 12 redova tribine točno 6 gledatelja s kapom, a u svakom stupcu tribine točno 5 gledatelja sa šeširom. Na tribini je ukupno 5 praznih mjesta.

a) Koliko je gledatelja na tribini?
b) Prikaži primjer rasporeda sjedenja koji odgovara uvjetima zadatka.

Rješenje.

a) Neka je s broj stupaca. Ukupan broj mjesta je tada $12\ s$.
S druge strane, ukupan broj mjesta jednak je zbroju broja mjesta gledatelja s kapama kojih je 72, broja mjesta gledatelja sa šeširima kojih je $5s$ i broja praznih mjesta kojih je 5.

Dakle, vrijedi $12s = 72 + 5s + 5$, odnosno $7s = 77$, tj. $s = 11$.

Na tribini je 11 stupaca i $12 \cdot 11 - 5 = 127$ gledatelja.

b) Primjer jednog rasporeda sjedenja koje zadovoljava tražene uvjete:

K	K	K	K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š
Š	K	K	K	K	K	K	Š	Š	Š	Š
Š	Š	K	K	K	K	K	K	Š	Š	Š
Š	Š	Š	K	K	K	K	K	K	Š	Š
Š	Š	Š	Š	K	K	K	K	K	K	Š
Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K	K	K	K
K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K	K	K
K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K	K
K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K
K	K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K
K	K	K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K
K	K	K	K	K	K					

Slovom K smo označili gledatelje s kapama, slovom Š gledatelje sa šeširima, a ostala su mjesta prazna.

Primijetimo da nakon rasporeda prvih jedanaest redova kako je gore prikazano, u zadnjem redu možemo rasporediti gledatelje s kapama na bilo kojih 6 mjesta, dok ostala ostaju prazna.