Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

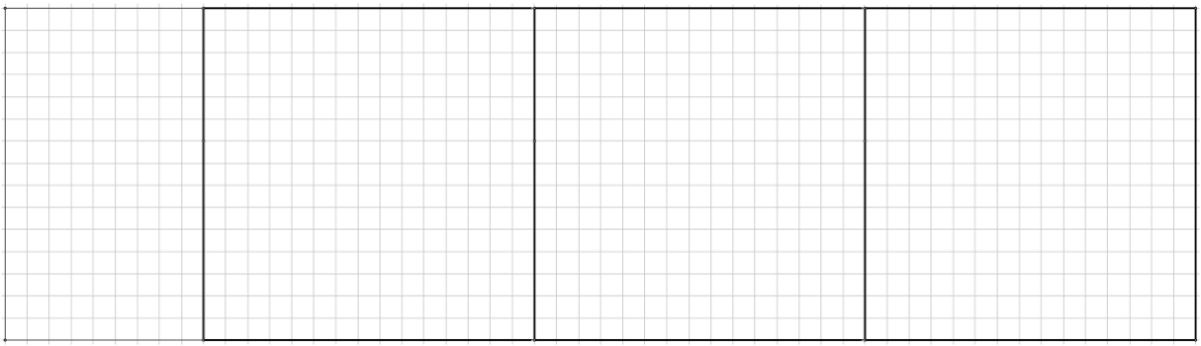
drugo kolo – četvrtak, 19. listopada 2023.

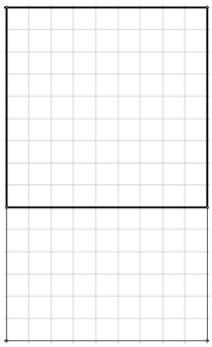
Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Od pravokutnog lista papira dimenzija 54 cm i 15 cm Marko odreže najveći mogući kvadrat. Od ostatka papira ponovno odreže najveći mogući kvadrat i postupak nastavlja sve dok cijeli list ne izreže na kvadrate tj. dok preostali komad papira ne bude također kvadrat. Koliki je zbroj opsega svih tako dobivenih kvadrata?

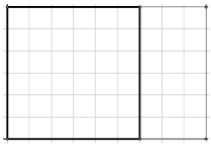
Rješenje.

Od pravokutnog papira dimenzija 54 cm i 15 cm Marko najprije reže tri kvadrata stranice duljine 15 cm.

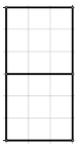




Nakon toga, od pravokutnog lista papira dimenzija $54 - 3 \cdot 15 = 9$, tj. 9 cm i 15 cm Marko reže jedan kvadrat sa stranicom duljine 9 cm.



Nakon toga, od pravokutnog lista papira dimenzija $15 - 9 = 6$, tj. 6 cm i 9 cm Marko reže jedan kvadrat sa stranicom duljine 6 cm.



Nakon toga, od pravokutnog lista papira dimenzija $9 - 6 = 3$, tj. 3 cm i 6 cm Marko reže dva kvadrata sa stranicom duljine 3 cm.

Zbroj opsega svih kvadrata iznosi $3 \cdot 60 + 36 + 24 + 2 \cdot 12 = 180 + 36 + 24 + 24 = 264$ cm.

2. U zaljevu su tri gusarska broda. Tijekom noći događaju se pljačke pa je prve noći trećina zlatnika s prvog broda prebačena na drugi brod. Druge noći je četvrtina zlatnika s drugog broda prebačena na treći brod, a treće je noći petina zlatnika s trećeg broda prebačena na prvi brod. Ujutro nakon treće pljačke na svakom je brodu točno 360 zlatnika. Koliko je zlatnika prije prve pljačke bilo na prvom brodu?

Rješenje.

Nakon sve tri pljačke na svakom je brodu po 360 zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Nakon tri pljačke	360	360	360

Kako je treće noći petina zlatnika s trećeg broda prebačena na prvi brod, na trećem brodu su ostale četiri petine zlatnika, što iznosi 360 zlatnika. Ako 360 zlatnika predstavlja četiri petine zlatnika s trećeg broda, znači da je jedna petina zlatnika s trećeg broda 90 zlatnika. Prije tog premještanja je na trećem brodu bilo 360 + 90 = 450 zlatnika, a na prvom brodu 360 – 90 = 270 zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Prije treće pljačke	270	360	450

Kako je druge noći četvrtina zlatnika s drugog broda prebačena na treći brod, na drugom je brodu prije toga bilo $360 + 360 : 3 = 3 \cdot 120 + 120 = 4 \cdot 120 = 480$ zlatnika. Na trećem je brodu prije toga bilo $450 - 120 = 330$ zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Prije druge pljačke	270	480	330

Kako je prve noći trećina zlatnika s prvog broda prebačena na drugi brod, na prvom je brodu prije toga bilo $270 + 270 : 2 = 2 \cdot 135 + 135 = 3 \cdot 135 = 405$ zlatnika. Na drugom je brodu prije toga bilo $480 - 135 = 345$ zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Prije prve pljačke	405	345	330

Na prvom je brodu, prije prve pljačke, bilo 405 zlatnika.

3. Sve karte za autobus na relaciji Rijeka-Zagreb koji kreće u 8 sati su prodane. Sjedala u autobusu označena su redom brojevima 1, 2, 3, i tako dalje do posljednjeg sjedala u autobusu. Greškom su za jedno sjedalo prodane dvije karte. Zbroj brojeva sjedala na svim prodanim kartama je 1219. Za koje su sjedalo prodane dvije karte?

Rješenje.

Najprije treba odrediti ukupan broj sjedala. Zbroj brojeva svih sjedala treba biti manji od 1219. Kako bismo procijenili broj sjedala zbrojimo prvih 50 brojeva:

$$1 + 2 + \cdots + 49 + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \cdots + (25 + 26) = 25 \cdot 51 = 1275.$$

Taj je zbroj veći od 1219 pa zaključujemo da ima manje od 50 sjedala.

Zbroj prvih 48 brojeva iznosi

$$1 + 2 + \cdots + 47 + 48 = (1 + 48) + (2 + 47) + \cdots + (24 + 25) = 24 \cdot 49 = 1176.$$

Kad bi broj sjedala bio manji od 48, razlika broja 1219 i zbroja brojeva svih sjedala bila bi veća od najvećeg broja sjedala. Kad bi broj sjedala bio veći od 48, zbroj brojeva sjedala bi bio veći od 1219.

Dakle, u autobusu ima točno 48 sjedala. Zbroj brojeva sjedala na svim prodanim kartama, da nisu greškom prodane dvije karte za isto sjedalo, bio bi 1176.

Kako je $1219 - 1176 = 43$, greškom su prodane dvije karte za sjedalo 43.

4. Stotinu stolica složeno je ukrug i na njima redom pišu brojevi od 1 do 100. Ivica preskače prvih šest stolica i na sedmu stavlja bombon, zatim preskače sljedećih 6 i na stolicu s brojem 14 stavlja drugi bombon. Nastavlja tako i dalje ukrug, stavljajući po jedan bombon na svaku sedmu stolicu dok ne potroši 2023 bombona. Koji je broj stolice na koju je Ivica stavio posljednji bombon?

Prvo rješenje.

Ivica stavlja bombon na svaku sedmu stolicu. Budući da je $2023 \cdot 7 = 14\,161$, Ivica će 2023. bombon staviti na stolicu koja je 14 161. u nizu.

Kako je $14\,161 = 141 \cdot 100 + 61$, Ivica je 141 put obišao svih stotinu stolica te je posljednji bombon stavio na stolicu broj 61.

Drugo rješenje.

Ivica najprije stavlja bombone na stolice s brojevima 7, 14, 21, …, 98 koji su višekratnici broja 7 i ima ih 14. Višekratnici broja 7 pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 0.

Nakon što stavi bombon na stolicu broj 98, sljedeći bombon stavlja na stolicu broj 5 pa 12 itd., tj. na stolice s brojevima koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 5. To su brojevi 5, 12, 19, …, 96.

Nakon stolice broj 96, sljedeći bombon stavlja na stolicu broj 3 pa 10 itd. do broja 94, tj. na stolice s brojevima koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 3.

Nastavlja postupak i stavlja bombone:

- na stolice s brojevima 1, 8,…, 99 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 1
- na stolice s brojevima 6, 13,..., 97 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 6
- na stolice s brojevima 4, 11,..., 95 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 4
- na stolice s brojevima 2, 9,…, 100 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 2.

Time je Ivica potrošio prvih 100 bombona.

Zatim se ciklus ponavlja jer sljedeće bombone ponovno stavlja na stolice broj 7, 14 itd., kao na početku.

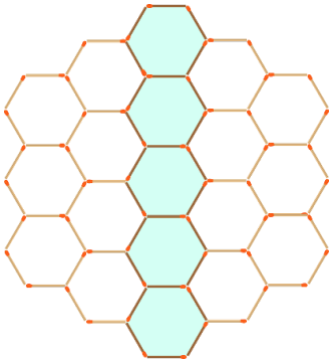
Svaki stoti bombon stavlja na stolicu broj 100 pa ponavlja ciklus, što znači da 2000. bombon stavlja na stolicu broj 100.

Treba odrediti na koju stolicu će staviti 23. bombon u ciklusu. Četrnaesti bombon stavio je na stolicu broj 98 pa treba odrediti deveti broj u nizu brojeva koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 5, a to je broj 61.

Ivica je posljednji bombon stavio na stolicu broj 61.

5. Raspoređivanjem šibica u šesterokutnu mrežu učenici slažu likove zvane *heks*. Na slici je prikazan heks koji na sredini ima pet šesterokuta (istaknutih na slici). Šibice se prodaju u kutijama koje sadrže po 45 šibica, a cijena jedne kutije je 1 euro i 25 centi.

Koliki je najmanji iznos koji učenici moraju potrošiti kako bi kupili dovoljno šibica za oblikovanje heksa koji na sredini ima 13 šesterokuta?



Prvo rješenje.

Možemo uočiti da su sve šibice raspoređene u tri smjera. Prebrojimo najprije vodoravne šibice.

Uočimo da su šesterokuti složeni u stupce, pri čemu je broj stupaca jednak broju šesterokuta u srednjem stupcu. U srednjem stupcu nalazi se 13 šesterokuta za koje je upotrijebljeno 14 vodoravnih šibica. U stupcima lijevo i desno od njega je po 12 šesterokuta za koje je upotrijebljeno po 13 vodoravnih šibica. Kako ima ukupno 13 stupaca, broj vodoravnih šibica je

$$14 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 140.$$

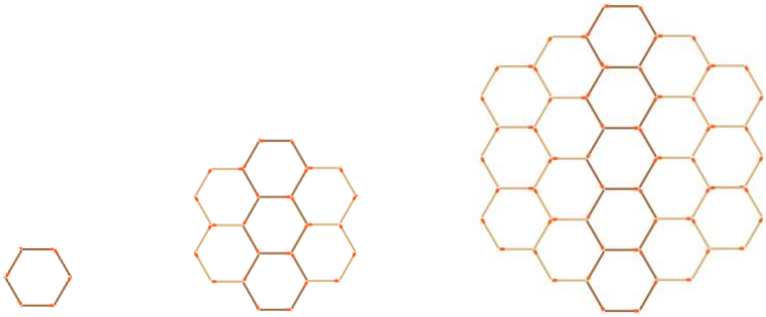
U svakom smjeru od tri smjera je jednak broj šibica, što znači da je ukupno $3 \cdot 140 = 420$ šibica.

U svakoj je kutiji 45 šibica, $420 : 45 = 9$ i ostatak 15, pa trebaju najmanje 10 kutija šibica.

Cijena jedne kutije je 1 euro i 25 centi pa će za 10 kutija potrošiti 12 eura i 50 centi.

Drugo rješenje.

Prva tri heksa su prikazana na slici.



Prvi heks na sredini ima 1 šesterokut, drugi ima 3 šesterokuta, a treći 5 šesterokuta.

Uočimo da je $1 = 2 \cdot 1 - 1$, $3 = 2 \cdot 2 - 1$, $5 = 2 \cdot 3 - 1$.

Niz možemo nastaviti tako da svaki sljedeći heks ima 2 šesterokuta više na sredini.

Heks koji ima 13 šesterokuta na sredini je sedmi u nizu jer je $13 = 2 \cdot 7 - 1$.

Uočimo da svaki sljedeći heks nastaje od prethodnog tako da dodamo novi „prsten“ šesterokuta od šibica.

Prvi heks se sastoji od jednog šesterokuta, drugi od 1 + 6 = 7 šesterokuta, a treći od 1 + 6 + 12 = 19 šesterokuta. Svaki sljedeći prsten ima 6 šesterokuta više od prethodnog, pa prstenovi imaju redom 1, 6, 12, 18, 24… šesterokuta.

Sa slike vidimo da su za izgradnju prvog prstena oko središnjeg šesterokuta potrebne 24 nove šibice. Za izgradnju idućeg prstena potrebno je 42 šibica. Svaki idući prsten ima šest šesterokuta više od prethodnog, za svaki šesterokut je potrebno dodati tri šibice, te je za izgradnju tog prstena potrebno 18 šibica više.

Dakle, prstenovi imaju redom 6, 24, 42, 60,… šibica.

Ukupan broj šibica u sedmom heksu je 6 + 24 + 42 + 60 + 78 + 96 + 114 = 420.

U svakoj je kutiji 45 šibica, $420 : 45 = 9$ i ostatak 15, pa trebaju najmanje 10 kutija šibica.

Cijena jedne kutije je 1 euro i 25 centi pa će za 10 kutija potrošiti 12 eura i 50 centi.