HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe

Zagreb, 31. svibnja 2021.

Zadatak 1.

(a) Odredi sve uređene trojke (a, b, c) realnih brojeva za koje je

$$a + b + c = 2021 \qquad \text{i} \qquad a^2b + b^2c + c^2a = a^2c + b^2a + c^2b.$$

(b) Odredi sve uređene trojke (a, b, c) realnih brojeva za koje je

$$a + b + c = 2021 \qquad \text{i} \qquad a^3b + b^3c + c^3a = a^3c + b^3a + c^3b.$$

Rješenje.

(a) Uvjet

$$a^2b + b^2c + c^2a = a^2c + b^2a + c^2b$$

je redom ekvivalentan s

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = 0$$

$$a^2(b - c) + b^2(c - b + b - a) + c^2(a - b) = 0$$

$$a^2(b - c) + b^2(c - b) + b^2(b - a) + c^2(a - b) = 0$$

$$a^2(b - c) + b^2(c - b) + b^2(b - a) + c^2(a - b) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(b - c) + (c^2 - b^2)(a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b)(b - c) + (c - b)(c + b)(a - b) = 0$$

$$(a - b)(b - c)(a + b - c - b) = 0$$

$$(a - b)(b - c)(a - c) = 0$$

Odatle zaključujemo da barem dva od brojeva a, b, c moraju biti jednaka.

Koristeći uvjet $a + b + c = 2021$ dobivamo da su sva rješenja dana s

$$(a, b, c) = (t, t, 2021 - 2t),\ t \in \mathbb{R}$$

$$(a, b, c) = (t, 2021 - 2t, t),\ t \in \mathbb{R}$$

$$(a, b, c) = (2021 - 2t, t, t),\ t \in \mathbb{R}$$

(b) Uvjet

$$a^3b + b^3c + c^3a = a^3c + b^3a + c^3b$$

je redom ekvivalentan s

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = 0$$

$$a^3(b - c) + b^3(c - b + b - a) + c^3(a - b) = 0$$

$$a^3(b - c) + b^3(c - b) + b^3(b - a) + c^3(a - b) = 0$$

$$a^3(b-c)+b^3(c-b)+b^3(b-a)+c^3(a-b)=0$$
$$(a^3-b^3)(b-c)+(c^3-b^3)(a-b)=0$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)(b-c)+(c-b)(c^2+bc+b^2)(a-b)=0$$
$$(a-b)(b-c)(a^2+ab+b^2-c^2-bc-b^2)=0$$
$$(a-b)(b-c)(a^2-c^2+ab-bc))=0$$
$$(a-b)(b-c)((a-c)(a+c)+b(a-c))=0$$
$$(a-b)(b-c)(a-c)(a+c+b)=0$$

odnosno, korištenjem uvjeta $a+b+c=2021$, imamo

$$2021(a-b)(b-c)(a-c)=0.$$

Dalje zaključujemo kao u (a) dijelu zadatka.

Zadatak 2.

Na turniru svaka dva igrača igraju međusobno po dvije partije nove zanimljive igre. Prije početka svake partije nasumce se bira tko igra prvi. Partija ne može završiti remijem; pobjednik dobiva 1 bod, a gubitnik 0 bodova.

Na kraju turnira, svi su sudionici imali **različit** broj bodova. No, organizatori su zaključili da su pravila nepravedna. Zato su dodali po 1 bod za svaku pobjedu koju je ostvario igrač koji nije igrao prvi.

Mogu li prema novom bodovanju svi sudionici imati **isti** broj bodova?

Rješenje.

Dokazat ćemo da *nije moguće* da prema novom bodovanju svi sudionici imaju isti broj bodova.

Pretpostavimo da je to moguće. Neka je n ukupan broj igrača na turniru i neka je k broj bodova koje je osvojio igrač s najmanje bodova.

Budući da su svi igrači imali različit broj bodova, igrač s najviše bodova je osvojio barem $k+n-1$ bodova.

Igrači su mogli dobiti bodove samo u onim partijama u kojima su pobijedili. Stoga za svakog igrača vrijedi da je broj bodova koji ima nakon promjene pravila najviše dvostruko veći nego što je imao prije promjene pravila. Zaključujemo da igrač s najmanje bodova prema novom pravilu može imati najviše $2k$ bodova, dok igrač s najviše bodova ima barem $k+n-1$. Zaključujemo da vrijedi

$$2k \geqslant k+n-1,$$

odnosno $k \geqslant n-1$. To znači da su svi igrači osvojili barem $n-1$ bodova i da je ukupno bilo više od $n(n-1)$ bodova, što nije moguće jer je bilo točno $n(n-1)$ partija.

Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut, H njegov ortocentar, a M polovište stranice $\overline{BC}$. Točka N je nožište okomice iz H na AM.

Dokaži da točke B, C, N i H pripadaju istoj kružnici.

Rješenje.

U slučaju kad je $|AB| = |AC|$, tj. kad se pravci AM i AH podudaraju, točka N je jednaka točki H i tvrdnja očito vrijedi.

Pretpostavimo da je $|AB| > |AC|$, tj. da su točke N i B s iste strane pravca AH. Slučaj kad je $|AC| > |AB|$ se dokazuje na isti način, uz analogne argumente.

Neka su $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ visine u trokutu ABC.

U četverokutima $HDCE$ i $HEAN$ imamo dva nasuprotna prava kuta, pa su oni tetivni. Zbog toga je $\sphericalangle DHE = 180° - \sphericalangle DCE$, te je $\sphericalangle ANE = \sphericalangle AHE = 180° - \sphericalangle DHE = \sphericalangle DCE$.

Sada slijedi da je $\sphericalangle MNE = 180° - \sphericalangle ANE = 180° - \sphericalangle MCE$, pa je četverokut $CENM$ tetivan. Zaključujemo da je $\sphericalangle MEC = \sphericalangle MNC$.

Budući da je M polovište hipotenuze $\overline{BC}$ u pravokutnom trokutu BCE vrijedi $\sphericalangle MCE = \sphericalangle MEC = \sphericalangle MNC$. Također, vrijedi $\sphericalangle CBH = \sphericalangle CBE = 90° - \sphericalangle BCE$.

Konačno, $\sphericalangle CNH = 90° - \sphericalangle MNC = 90° - \sphericalangle MCE = 90° - \sphericalangle BCE$, pa je četverokut $HNCB$ tetivan, što smo i trebali dokazati.

Zadatak 4.

Dokaži da ne postoje prirodni brojevi a i b takvi da je

$$a^3 - 64a - 1 = 4b(b+1).$$

Rješenje.

Jednadžba

$$a^3 - 64a - 1 = 4b(b+1)$$

je redom ekvivalentna s

$$a(a^2 - 64) = 4b^2 + 4b + 1$$

$$a(a-8)(a+8) = (2b+1)^2$$

Odavde zaključujemo da $a(a-8)(a+8)$ mora biti kvadrat neparnog broja, a to će biti ako i samo ako je a neparan.

Uočimo da su a i $a-8$ relativno prosti; naime, pretpostavimo li da postoji neparni prosti broj p koji dijeli a i $a-8$, onda p dijeli i $a-(a-8) = 8$ što je nemoguće jer je p neparan. Onda znamo i da su a i $a+8$ relativno prosti.

Također, $a-8$ i $a+8$ su relativno prosti jer bi iz pretpostavke da neparni prosti broj p dijeli $a-8$ i $a+8$ slijedilo da p dijeli $a+8-(a-8) = 16$ što je opet kontradikcija.

Zato svaki od brojeva $a-8$, a i $a+8$ mora biti potpun kvadrat.

A to je nemoguće, jer je razlika kvadrata dvaju uzastopnih neparnih brojeva uvijek djeljiva s 8

$$(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = 8k.$$

i jednaka je 8 samo u slučaju kad je $k = 1$, odnosno kad se radi o brojevima 1 i 3.

Dakle, ne postoje prirodna rješenja zadane jednadžbe.