HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 21. svibnja 2022.

Zadatak 1.

Ako je $a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ niz od 2000 pozitivnih realnih brojeva, za koliko najviše indeksa $i \in \{1, 2, \ldots, 2000\}$ može vrijediti jednakost

$$a_i a_{i+3} = a_i a_{i+1} + a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} a_{i+3}?$$

Smatramo da je $a_{j+2000} = a_j$ za $j \in \{1, 2, 3\}$.

Rješenje.

Za indeks i kažemo da je dobar ako zadovoljava jednakost iz iskaza zadatka.

Pretpostavimo da postoje dva uzastopna dobra indeksa $i, i+1$. Onda je

$$\begin{aligned} a_i a_{i+3} &= a_i a_{i+1} + a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} a_{i+3}, \\ a_{i+1} a_{i+4} &= a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} a_{i+3} + a_{i+3} a_{i+4}. \end{aligned}$$

Iz prve jednakosti slijedi $a_{i+1} < a_{i+3}$, a iz druge $a_{i+1} > a_{i+3}$, što je kontradikcija. Dakle, ne postoje dva uzastopna dobra indeksa, pa je broj dobrih indekasa najviše 1000.

Nadalje, ako je indeks i dobar, onda je $a_i > a_{i+2}$. Pretpostavimo da postoji 1000 dobrih indekasa. Onda su to indeksi $i, i+2, i+4, \ldots, i+1998$ za neki i. Međutim, onda je

$$a_i > a_{i+2} > a_{i+4} > \ldots > a_{i+1998} > a_{i+2000} = a_i,$$

što je kontradikcija. Zaključujemo da ima najviše 999 dobrih indekasa.

Sada konstruiramo primjer 2000-torke u kojoj su indeksi $1, 3, 5, \ldots, 1997$ dobri. Neka su $a_1 > a_3 > \ldots > a_{1999}$ proizvoljni pozitivni realni brojevi, te neka je a_2 bilo koji pozitivan realan broj. Pretpostavimo da smo definirali brojeve $a_2, a_4, \ldots, a_{2i}$ za neki $i \in \{1, \ldots, 999\}$.

Rekurzivno definiramo a_{2i+2} tako da je $2i-1$ dobar indeks, tj. a_{2i+2} definiramo kao broj takav da je $a_{2i-1} a_{2i+2} = a_{2i-1} a_{2i} + a_{2i} a_{2i+1} + a_{2i+1} a_{2i+2}$, odnosno

$$a_{2i+2} = a_{2i} \cdot \frac{a_{2i-1} + a_{2i+1}}{a_{2i-1} - a_{2i+1}}.$$

Lako se vidi da je a_{2i+2} dobro definiran pozitivan realan broj, jer je $a_{2i-1} > a_{2i+1}$. Dakle, ovako definirana 2000-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_{2000})$ ima 999 dobrih indekasa.

Napomena: Naravno, moguće je i eksplicitno konstruirati niz sa 999 dobrih indekasa. To je na primjer niz

$$2^0, 3^0, 2^{-1}, 3^1, 2^{-2}, 3^2, \ldots, 2^{-999}, 3^{999}.$$

Zadatak 2.

Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Za prirodan broj $m \geqslant n+1$ kažemo da je *n-obojiv* ako je m kamenčića postavljenih na kružnici moguće obojati u n boja tako da se među bilo kojih $n+1$ uzastopnih kamenčića pojavljuje svih n boja.

Dokaži da postoji konačno mnogo prirodnih brojeva $m \geqslant n+1$ koji nisu n-obojivi i odredi najveći od njih.

Prvo rješenje.

Tvrdimo da je n^2-n-1 najveći broj koji nije n-obojiv.

Dokažimo prvo da taj broj nije n-obojiv. Promotrimo bilo koje bojanje $n^2-n-1 = n(n-1)-1$ kamenčića u n boja. Prema Dirichletovom principu, postoji boja koja se pojavljuje ne više od $\frac{n(n-1)-1}{n}$ puta. Onda se ta boja pojavljuje najviše $n-2$ puta.

Svaki kamenčić te boje pojavljuje se u najviše $n+1$ različitih grupa od $n+1$ uzastopnih kamenčića, pa u najviše $(n-2)(n+1) = n^2-n-2$ grupa od $n+1$ uzastopnih kamenčića postoji kamenčić te boje. Međutim, ukupno postoji n^2-n-1 različitih grupa od $n+1$ uzastopnih kamenčića, pa neka od grupa sigurno ne sadrži nijedan kamenčić te boje. Dakle, n^2-n-1 nije n-obojiv.

Dokažimo sada da svaki broj veći ili jednak $n(n-1)$ jest n-obojiv. Uzmimo $m \geqslant n(n-1)$, te ga zapišimo kao $qn+r$ za prirodni broj q i cijeli broj $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Primijetimo da vrijedi $q = \lfloor m/n \rfloor \geqslant n-1$. Označimo boje brojevima $0, 1, \dots, n-1$ te promotrimo sljedeće bojanje m kamenčića na krugu:

- najprije $q-r$ puta stavimo blok od n kamenčića boja $0, 1, \dots, n-1$ redom,
- zatim r puta stavimo prethodni blok od n kamenčića rotiran za jedno mjesto udesno (dakle i-ti blok sadržavat će kamenčiće boja $n-i, n-i+1, \dots, n-1, 0, 1, \dots, n-i-1$ redom),
- na kraju stavimo r kamenčića boja $n-r, n-r+1, \dots, n-1$ redom,

pri čemu sve kamenčiće stavljamo u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Vidimo da ovo bojanje ima sljedeće svojstvo: između svakog kamenčića i prvog sljedećeg iste boje nalazi se $n-1$, n ili 0 kamenčića. Dakle, niti za jednu boju ne postoji $n+1$ uzastopnih kamenčića koji nisu obojani tom bojom, čime je tvrdnja dokazana.

Drugo rješenje.

Dajemo alternativan dokaz da je svaki $m \geqslant n^2-n$ n-obojiv. Označimo boje brojevima $0, 1, \dots, n-1$. Uzmimo broj m oblika $An + B(n+1)$ za neke nenegativne cijele brojeve A i B. Obojimo kamenčiće tako da se prvo A blokova duljine n oboja u uzorak $(0, 1, \dots, n-1)$, a nakon njih B blokova duljine $n+1$ u uzorak $(0, 0, 1, \dots, n-1)$. Promotrimo sada nekih $n+1$ uzastopnih kamenčića u krugu.

Ako sadrže dva uzastopna kamenčića boje 0, njihovo bojanje će biti oblika

$$(k, k+1, \dots, n-1, 0, 0, 1, \dots, k-1)$$

za neki $k \leqslant n$, što sadrži svih n boja.

Ako ne sadrže dva uzastopna kamenčića boje 0, njihovo bojanje će biti oblika

$$(k, k+1, \dots, n-1, 0, 1, \dots, k-1, k)$$

za neki $k \leqslant n$, što također sadrži svih n boja.

Dakle, svaki broj koji se može zapisati u obliku $An + B(n+1)$ je n-obojiv. Sada koristimo poznatu tvrdnju da je za dva relativno prosta prirodna broja x i y najveći prirodan broj koji se ne može zapisati kao $Ax + By$ za neke $A, B \geqslant 0$ jednak $xy - x - y$. Za $x = n$ i $y = n+1$, dobivamo $n(n+1) - n - (n+1) = n^2 - n - 1$, pa se svaki broj veći od $n^2 - n - 1$ može zapisati na traženi način.

Možemo i direktno dokazati specijalan slučaj tvrdnje koju smo koristili za slučaj $x = n$ i $y = n+1$. Za $1 \leqslant j \leqslant n$, imamo $(n-j)(n+1) + (j-1)n = n^2 - jn + n - j + jn - n = n^2 - j$. Dakle, svaki broj iz skupa $\{n^2 - n, n^2 - n + 1, \ldots, n^2 - 1\}$ može se zapisati kao kombinacija od n i $n+1$. To je interval uzastopnih brojeva duljine n, pa dodavanjem višekratnika od n dobivamo da se svaki broj veći ili jednak $n^2 - n$ može prikazati kao kombinacija od n i $n+1$.

Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $|AB| < |AC|$ te neka je kružnica k sa središtem O njegova opisana kružnica. Neka su P i Q točke redom na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ takve da je $AQPO$ paralelogram. Neka su K i L sjecišta simetrale dužine $\overline{OP}$ s kružnicom k, pri čemu je K na kraćem luku $\widehat{AB}$. Neka je M drugo sjecište pravca KQ i kružnice k. Dokaži da točka A pripada simetrali kuta $\sphericalangle QLM$.

Prvo rješenje.

Neka je R radijus od k. Zbog toga što je KL simetrala od OP te su K i L na k, vrijedi $PK = PL = OL = R$. Nadalje, jer je $AQPO$ paralelogram vrijedi $PQ = OA = R$. zaključujemo da je P središte opisane kružnice τ od QKL, te da je radijus od τ također jednak R.

Nadalje, kutevi $\sphericalangle QKL$ i $\sphericalangle MKL$ su očito jednaki, a to su obodni kutevi redom nad tetivom QL od τ i tetivom ML od k. Zbog jednakosti radijusa i obodnih kuteva, slijedi jednakost duljina tetiva, odnosno $QL = ML$.

Primijetimo da je kružnica τ slika pod osnom simetrijom u odnosu na KL od kružnice k, te se B slika u Q pod tom simetrijom. Zaključujemo da je trokut BKQ jednakokračan, i $\sphericalangle QBK = \sphericalangle BQK$. Nadalje, $\sphericalangle BQK = \sphericalangle AQM$, i $\sphericalangle QBK = \sphericalangle ABK = \sphericalangle AMK = \sphericalangle AMQ$, gdje druga jednakost slijedi iz tetivnosti četverokuta $ABKM$. Dakle, vrijedi $\sphericalangle AMQ = \sphericalangle AQM$ pa je $QA = MA$.

Zaključujemo da je AL simetrala dužine $\overline{QM}$, iz čega očito slijedi da je i simetrala kuta $\sphericalangle QLM$, kao što je trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Neka je $\gamma := \sphericalangle ACB$ i R radijus kružnice k. Označimo sa Q' drugi presjek pravca LQ i k te sa X presjek pravaca KL i PQ.

Kako je O središte opisane kružnice ΔABC imamo da je $\sphericalangle BAO = \sphericalangle OBA = 90^\circ - \gamma$.

Zbog paralelnosti AB i PO je $\sphericalangle BOP = 90^\circ - \gamma$.

Iz paralelograma $AQPO$ imamo da je $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle OPX = 90^\circ - \gamma$. Kako je X na simetrali dužine $\overline{OP}$ imamo da je $\sphericalangle XOP = \sphericalangle OPX = 90^\circ - \gamma$. Time je $\sphericalangle XOP = \sphericalangle BOP$ iz čega slijedi da su točke O, X i B kolinearne.

Imamo da je $QP = AO = R = OB$ jer je $AQPO$ paralelogram i O središte opisane kružnice ΔABC. Nadalje, iz $\sphericalangle XOP = \sphericalangle OPX$ i kolinearnosti točaka O, X i B imamo da je i $\sphericalangle BOP = \sphericalangle OPQ$. Ovime imamo da su trokuti ΔPOB i ΔOPQ sukladni prema poučku SKS iz čega slijedi da je četverokut $QBPO$ jednakokračni trapez. Sada imamo

$$\sphericalangle MQA = \sphericalangle KQB = \sphericalangle QBK = \sphericalangle ABK = \sphericalangle AMK = \sphericalangle AMQ,$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili da je K na simetrali dužine $\overline{QB}$ (slijedi iz činjenice da je $QBPO$ jednakokračni trapez), a pretposljednja jednakost slijedi jer su to obodni kutevi nad tetivom KA u k. Iz gornje jednakosti kuteva imamo da je ΔQMK jednakokračan trokut, odnosno da je $AQ = AM$. Sasvim analogno imamo da vrijedi

$$\sphericalangle AQQ' = \sphericalangle BQL = \sphericalangle LBQ = \sphericalangle LBA = \sphericalangle LQ'A = \sphericalangle QQ'A$$

Dakle, $\Delta Q'QA$ je jednakokračan trokut, tj. $AQ = AQ'$. Time je $AM = AQ'$ iz čega konačno slijedi da je A na simetrali kuta $\sphericalangle QLM$.

Treće rješenje.

Trokuti $\triangle OAQ$ i $\triangle OBP$ su sukladni buduci da je $OPQA$ paralelelogram i $\sphericalangle BOP = \sphericalangle OBA = \sphericalangle OAB$. Iz toga slijedi da je cetverokut $QBPO$ jednakokracni trapez (isti krakovi i dijagonale).

Iz toga imamo da je KL simetrala duzine BQ, a kako je B na opisanoj trokuta AKL, imamo da je Q ortocentar trokuta AKL. Sada su analogno osnosimetricne slike ortocentra Q u odnosu na stranice AK i AL na opisanoj kruznici trokuta AKL te su jednake Q' (koji uvodimo kao presjek LQ i kruznice) i M.

Iz ovoga trivijalno slijedi da je $AM = AQ = AQ'$ te dobivamo tvrdnju zadatka.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji permutacija $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ skupa svih pozitivnih djelitelja od n takva da je, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, broj

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_i$$

kvadrat prirodnog broja.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da prirodan broj n zadovoljava uvjet zadatka. Matematičkom indukcijom dokazujemo da za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ vrijedi $d_i = 2i - 1$.

Ako je $d_1 \neq 1$, onda postoji $1 < j \leqslant k$ takav da je $d_j = 1$. Međutim, tada su $d_1 + \ldots + d_{j-1}$ i $d_1 + \ldots + d_j$ kvadrati prirodnih brojeva koji se razlikuju za 1, što je kontradikcija. Zaključujemo $d_1 = 1$ i time je baza indukcije dokazana.

Pretpostavimo da za neki $i \leqslant k$ vrijedi $d_j = 2j-1$ za svaki $j < i$. Onda je $d_1 + \ldots + d_{i-1} = (i-1)^2$, te postoji prirodan broj u takav da je

$$d_1 + \ldots + d_i = (i - 1 + u)^2,$$

iz čega dobivamo $d_i = (i - 1 + u)^2 - (i - 1)^2 = u(2i - 2 + u)$.

Ako je $u > 1$, onda je $2i - 2 + u$ djelitelj od d_i, pa i djelitelj od n, koji je veći od $d_1, \ldots, d_{i-1}$ i manji od d_i, pa se pojavljuje kasnije u nizu. Međutim, onda je $2i - 2 + u$ razlika dva kvadrata veća ili jednaka $i - 1 + u$, pa je veći ili jednak $(i + u)^2 - (i - 1 + u)^2 = 2i - 1 + u$, što je kontradikcija. Dakle, $u = 1$ i $d_i = 2i - 1$, čime je korak indukcije završen.

Zaključujemo da je skup djelitelja od n jednak $\{1, 3, \ldots, 2k - 1\}$. Posebno je $2k - 3$ djelitelj od $2k - 1$, što je nemoguće za $k > 2$ jer je tada $1 < \frac{2k-1}{2k-3} < 2$. Dakle, $k \leqslant 2$, i $n \in \{1, 3\}$.

Lako se provjeri da 1 i 3 zadovoljavaju uvjete zadatka, uz pripadne permutacije (1) i $(1, 3)$.

Drugo rješenje.

Neka je a_i prirodan broj takav da je $a_i^2 = d_1 + \ldots + d_i$ za $i \in \{1, \ldots, k\}$, i stavimo $a_0 = 0$. Tada je $d_i = a_i^2 - a_{i-1}^2$ za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Za $i \geqslant 1$, neka je

$$x_i := a_i + a_{i-1} = \frac{d_i}{a_i - a_{i-1}}.$$

Kako je $a_0 < a_1 < \ldots < a_k$, zaključujemo da vrijedi i $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Nadalje, $x_i \mid d_i$ za svaki i, pa također $x_i \mid n$. Onda su $x_1, \ldots, x_k$ svi djelitelji od n u rastućem poretku. Iz $x_i \mid d_i$ sada slijedi $x_i = d_i$.

Zaključujemo da je $a_i - a_{i-1} = 1$, a iz toga i iz $a_0 = 0$ slijedi $a_i = i$ za svaki $i \in \{1, \ldots k\}$. Iz toga slijedi $d_i = i^2 - (i - 1)^2 = 2i - 1$. Dovršetak je isti kao u prvom rješenju.

Zadatak 1.

Dokaži da za sve realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 100} \frac{(x_j - x_i)^2}{j^2 - i^2} \geqslant \frac{1}{101} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 50} (x_{101-i} - x_i)^2.$$

Rješenje.

Uvedimo notaciju:

$$[i, j] = \frac{(x_j - x_i)^2}{j^2 - i^2},$$

te označimo s LHS lijevu stranu u nejednakosti.

Koristeći Cauchy-Schwarz nejednakost u Engel formi, za bilo koju rastuću trojku indeksa $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ vrijedi sljedeća nejednakost koju ćemo zvati nejednakost trokuta:

$$[i, j] + [j, k] \geqslant [i, k].$$

Sada prvo raspišemo lijevu stranu nejednakosti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 100} [i, j] && (1) \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant 50} \left([i, 101 - i] + \sum_{i+1 \leqslant j \leqslant 100 - i} ([i, j] + [j, 101 - i]) \right). && (2) \end{aligned}$$

Zaista, u (1) imamo ukupno $\frac{99 \cdot 100}{2}$ pribrojnika označenih parovima indeksa (i, j) takvih da za točno 50 njih vrijedi $i + j = 101$, dok preostale možemo spariti na sljedeći način: svakom paru (i, j) za $i < j$ i $i + j < 101$ pridružimo par $(j, 101 - i)$ za koji vidimo da vrijedi $j + 101 - i > 101$, te je takvo pridruživanje jedinstveno jer parova (i, j) sa $i + j < 101$ ima koliko i parova (k, l) za koje $k + l > 101$. Tako vidimo da su isti pribrojnici u izrazima (1) i (2).

Za svaki $i \leqslant 50$, primjenom nejednakosti trokuta na sve parove $[i, j]$ i $[j, 101 - i]$, dobivamo

$$\sum_{i+1 \leqslant j \leqslant 100 - i} [i, j] + [j, 101 - i] \geqslant (100 - 2i) \cdot [i, 101 - i].$$

Ako to primijenimo na izraz (2), dobivamo

$$\begin{aligned} LHS &\geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant 50} (101 - 2i) \cdot [i, 101 - i] \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant 50} (101 - 2i) \cdot \frac{(x_{101-i} - x_i)^2}{(101 - i - i)(101 - i + i)} \\ &= \frac{1}{101} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 50} (x_{101-i} - x_i)^2, \end{aligned}$$

pa je nejednakost dokazana.

Zadatak 2.

Dokaži da za svaki prirodan broj $n > 10^6$ postoji višekratnik broja n koji nije veći od n^4, čiji zapis u dekadskom brojevnom sustavu koristi najviše 4 različite znamenke.

Rješenje.

Neka je k nenegativan cijeli broj takav da je $10^k \leqslant n < 10^{k+1}$. Iz uvjeta zadatka je $k \geqslant 6$. Također je $n^4 \geqslant 10^{4k}$, pa je broj znamenki od n^4 barem $4k+1$.

Promotrimo skup S svih nenegativnih cijelih brojeva sa najviše $4k$ znamenke čije su jedine znamenke 0 ili 1. Svaki od tih brojeva je manji od n^4, a ima ih $2^{4k} = 16^k$. Kako je $k \geqslant 6$, onda je

$$16^k \geqslant 16^6 \cdot 10^{k-6} \geqslant 10^7 \cdot 10^{k-6} = 10^{k+1} > n,$$

gdje druga nejednakost slijedi iz $16^6 > 10^7$, što je ekvivalentno s $2^{17} > 5^7$, što vrijedi jer je $2^{17} = 128 \cdot 128 \cdot 8 > 125 \cdot 125 \cdot 5 = 5^7$.

Zaključujemo da S ima više od n elemenata, pa po Dirichletovom principu sadrži dva elementa koji daju isti ostatak pri dijeljenju s n. Recimo da su to a i b te da je $a > b$.

Onda je broj $a - b$ višekratnik od n manji od n^4. Ako promotrimo algoritam oduzimanja primijenjen na a i b, vidimo da se u dekadskom zapisu od $a - b$ pojavljuju jedino znamenke $8, 9, 0$ i 1. Dakle, $a - b$ je višekratnik od n s traženim svojstvom.

Zadatak 3.

U trokutu ABC vrijedi $|AB| \neq |AC|$ i upisana kružnica dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Okomica iz točke D na pravac EF siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki G, a kružnice opisane trokutima AEF i ABC se sijeku u točkama A i T.

Dokaži da su pravci TG i TF okomiti.

Rješenje.

Neka je M polovište luka BC opisane kružnice koji ne sadrži točku A, a I središte upisane kružnice trokuta ABC. Poznato je da su točke A, I i M kolinearne. Točka I leži na kružnici opisanoj trokutu AEF jer je $\sphericalangle AEI = \sphericalangle AFI = 90°$. Vrijedi $\sphericalangle ABT = \sphericalangle AMT = \sphericalangle ACT$ jer su to obodni kutovi nad istom tetivom. Analogno, vrijedi $\sphericalangle AFT = \sphericalangle AIT = \sphericalangle AET$, te $\sphericalangle TFB = \sphericalangle TIM = \sphericalangle TEC$. Iz toga zaključujemo da su trokuti TFB, TIM i TEC slični jer imaju iste kutove. Slijedi da $|TC| : |TB| = |CE| : |BF| = |CD| : |BD|$, pa je TD simetrala kuta $\sphericalangle CTB$ i zaključujemo da su točke T, D i M kolinearne.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $|AB| < |AC|$. Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$. Vrijedi $\sphericalangle AEF = \sphericalangle AFE = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Zbog tetivnosti četverokuta $ATFE$ vrijedi $\sphericalangle FTA = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Slijedi da je $\sphericalangle BTF = \sphericalangle BTA - \sphericalangle FTA = 180° - \gamma - 90° - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

Iz gore navedene sličnosti također slijedi $\sphericalangle ITM = \sphericalangle BTF = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

Neka je H sjecište pravaca TI i EF. Budući da vrijedi $\sphericalangle ITF = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle EFI = \sphericalangle HFI$, slijedi da je IF tangenta na kružnicu opisanu trokutu THF, pa koristeći potenciju točke zaključujemo $|IH| \cdot |IT| = |IF|^2 = |ID|^2$. Stoga je ID tangenta na kružnicu opisanu trokutu DHT, pa je $\sphericalangle IDH = \sphericalangle HTD = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Iz ovog zaključujemo da je $\sphericalangle HDB = \frac{\alpha}{2} + \gamma = \sphericalangle AA'B$, pri čemu je A' sjecište pravaca AI i BC. Stoga je pravac DH paralelan s AI i okomit na EF, što povlači da G pripada pravcu DH.

Slijedi da je $\sphericalangle GHT = \sphericalangle AIT = \sphericalangle AFT = \sphericalangle GFT$ i zaključujemo da je četverokut $GTHF$ tetivan. Dakle, vrijedi $\sphericalangle GTF = \sphericalangle GHF = 90°$, kao što smo i htjeli dokazati.

Napomena: Pri inverziji sa središtem u M i polumjerom $|MB| = |MC| = |MI|$ kružnica AEF se preslikava u kružnicu promjera $\overline{A'I}$ gdje je A' presjek pravaca AI i BC. Međutim, tada se T kao presjek kružnica opisanih trokutima ABC i AEF preslikava u presjek pravca BC i kružnice promjera $\overline{A'I}$, što je upravo D, pa su M, D i T kolinearne točke.

Zadatak 4.

Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beskonačan niz brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ takav da za svaki par prirodnih brojeva (m, n) vrijedi:

uvjeti $a_n \mid n$ i $a_m \mid m$ ispunjeni su ako i samo ako je $a_{m+n} = a_m + a_n - 1$.

Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti a_{5555}.

Rješenje.

Promotrimo niz $a_1, a_2, \ldots$ koji zadovoljava uvjete zadatka. Za prirodan broj j kažemo da je *lijep* ako je $a_j = 1$.

Pretpostavimo da su m i n lijepi. Onda $a_m \mid m$ i $a_n \mid n$, pa iz uvjeta zadatka slijedi

$$a_{m+n} = a_m + a_n - 1 = 1.$$

Dakle, skup lijepih brojeva je zatvoren s obzirom na zbrajanje. (1)

Primijetimo da je 840 najmanji zajednički djelitelj od $1, 2, \ldots, 8$. Onda za svaki prirodan broj j vrijedi $a_{840j} \mid 840j$. Iz uvjeta zadatka primijenjenog na $840j$ i 840 dobivamo da za svaki j vrijedi

$$a_{840(j+1)} = a_{840j} + a_{840} - 1.$$

Iz te relacije matematičkom indukcijom slijedi da za svaki j vrijedi $a_{840j} = ja_{840} - (j-1)$. Ako bi bilo $a_{840} > 1$, onda bi bilo $a_{840 \cdot 8} \geqslant 8 \cdot 2 - 7 > 8$, što je kontradikcija. Dakle, 840 je lijep, a iz (1) zaključujemo da su i svi višekratnici od 840 lijepi. (2)

Promotrimo sve brojeve oblika a_{840k+1} za $k \in \mathbb{N}$. Po Dirichletovom principu, neka dva od njih su jednaka. Recimo da su to a_{840m+1} i a_{840n+1} za $m < n$. Onda je

$$a_{840n+1} = a_{840m+1} + a_{840(n-m)} - 1.$$

Iz uvjeta zadatka primijenjenog na $840(n-m)$ i $840m+1$, dobivamo $a_{840m+1} \mid 840m+1$, iz čega lako zaključujemo i $a_{840m+1} \mid 1$, pa je $840m+1$ lijep. Korištenjem svojstva (1) na višekratnike od 840 i $840m+1$, dobivamo da je svaki broj oblika $A \cdot 840 + B \cdot (840m+1)$ lijep. Kako se svaki osim konačno mnogo brojeva može zapisati u tom obliku, zaključujemo da su svi osim konačno mnogo brojeva lijepi. (3)

Primijetimo da je $5555 = 6 \cdot 840 + 515$, te je $\gcd(5555, 840) = 5$. Promotrimo 7 brojeva $a_{840k+515}$ za $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ako postoji k takav da je $a_{840k+515} = 5$, onda $a_{840k+515} \mid 840k + 515$. Tada iz uvjeta zadatka primijenjenog na $840k + 515$ i $840j$ za bilo koji prirodan broj j dobivamo

$$a_{840(k+j)+515} = a_{840k+515} + a_{840j} - 1 = 5.$$

Međutim, to je kontradikcija s (3) jer time dobivamo beskonačno mnogo brojeva koji nisu lijepi. Dakle, nikoji od 7 promatranih brojeva nije jednak 5.

Ako je neki od njih jednak 1, onda iz svojstva (1) primijenjenog na njegov indeks i višekratnike od 840 dobivamo i da su svi brojevi nakon njega jednaki 1, pa je posebno $a_{5555} = 1$.

Ako nikoji od njih nije jednak 1, onda po Dirichletovom principu među njima postoje neka dva jednaka, recimo $a_{840a+515} = a_{840b+515}$ uz $b > a$. Sada slično kao u dokazu tvrdnje (3) dobivamo da nužno vrijedi $a_{840a+515} \mid 840a + 515$, pa je $a_{840a+515} \in \{1, 5\}$, što je kontradikcija s pretpostavkama.

Zaključujemo da je jedino moguće $a_{5555} = 1$. S obzirom da niz $1, 1, 1 \ldots$ zadovoljava uvjete zadatka, vidimo da je to stvarno moguće.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 4. lipnja 2022.

Zadatak 1.

Neka je $\mathbb{R}^+$ skup svih pozitivnih, a $\mathbb{R}_0^+$ skup svih nenegativnih realnih brojeva.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ takve da za sve pozitivne realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x) - f(x+y) = f(x^2 f(y) + x).$$

Prvo rješenje.

Lako vidimo da je $f \equiv 0$ jedno rješenje.

Neka je f neko drugo rješenje. S $P(x, y)$ označimo uvrštavanje brojeva x i y u početni uvjet.

Uočimo da je f nerastuća jer je $f(x) \geqslant f(x+y)$ za sve $x, y > 0$.

Pretpostavimo da postoje brojevi $0 < a_0 < a_1$ za koje vrijedi $f(a_0) = f(a_1)$. Onda uvrštavanjem $P(a_0, a_1 - a_0)$ dobivamo da f ima nultočku.

Kako je f nerastuća i $f \not\equiv 0$, vrijedi da postoji $c > 0$ takav da je $f(x) > 0$ za $x < c$ i $f(x) = 0$ za $x > c$.

Neka je $z > 0$, te neka je $0 < \epsilon < z$. Iz $P(c-\epsilon, z)$ slijedi da je $0 < f(c-\epsilon) = f(c-\epsilon) - f(c-\epsilon+z) = f((c-\epsilon)^2 f(z) + c - \epsilon)$, pa je nužno $(c-\epsilon)^2 f(z) < \epsilon$. Međutim, to ne može vrijediti za proizvoljno mali ϵ, pa smo dobili kontradikciju. Zaključujemo da je f injektivna.

Promotrimo sada $P(x, 1)$ i $P(x, x^2 f(1))$. Imamo

$$f(x+1) = f(x) - f(x^2 f(z) + x) = f(x^2 f(x^2 f(z)) + x),$$

pa zbog injektivnosti slijedi $1 = x^2 f(x^2 f(1))$, odnosno $f(x^2 f(1)) = \frac{1}{x^2}$.

Zaključujemo da postoji $b > 0$ takav da je $f(x) = \frac{b}{x}$ za svaki $x > 0$, pa su to jedini preostali kandidati za rješenja.

Uvrštavanjem u početni uvjet dobivamo

$$\frac{b}{x} - \frac{b}{x+y} = \frac{b}{bx^2/y + x},$$

a jedini b za koji to vrijedi za sve $x, y > 0$ je 1.

Zaključujemo da je $f(x) = \frac{1}{x}$ za svaki $x > 0$ jedino nenul rješenje.

Drugo rješenje.

Slično kao u prvom rješenju, ako pretpostavimo da f nije injekcija zaključimo da postoji c takav da je $f(x) > 0$ za svaki $x < c$ i $f(x) = 0$ za svaki $x > c$.

Sad uzmimo proizvoljan $y < c$, te uzmimo x takav da je $x < c$ ali $x^2 f(y) + x > c$ i $x + y > c$. Lako se vidi da takav x postoji, na primjer uzmemo bilo koji $x < c$ takav da je $x > \frac{c}{2}$, $x > c - y$ i $x > c - \frac{c^2}{4} f(y)$. Onda je $x^2 f(y) > \frac{c^2}{4} f(y)$, pa je $x^2 f(y) + x > c$.

Međutim, za taj izbor x i y imamo $f(x) > 0$ ali $f(x+y) = 0$ i $f(x^2 f(y) + x) = 0$, što je kontradikcija. Dakle, f poprima samo pozitivne vrijednosti, pa iz početne jednadžbe vidimo da je f strogo padajuća, pa je injekcija.

Uvrštavanjem $(1, y)$ i $(1, f(y))$ u jednadžbu dobivamo $f(1) = f(y+1) + f(f(y)+1) = f(f(y)+1) + f(f(f(y))+1)$ pa zbog injektivnosti dobivamo $f(f(y)) = y$ za svaki $y > 0$.

Uvrštavanjem $\left(x, f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right)$ u početnu jednadžbu dobivamo $f(x) = f(y+x) + f\left(x + f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right)$ iz čega uspoređivanjem s početnom jednadžbom slijedi

$$f\left(\frac{y}{x^2}\right) = x^2 f(y),$$

pa zaključujemo da za svaki x vrijedi $f(x) = \frac{b}{x}$ za neki $b > 0$. Dovršetak je isti kao u prvom rješenju.

Zadatak 2.

Neka je n prirodan broj. U grupi od n ljudi, neki među njima su prijatelji, a neki nisu. Prijateljstva su uzajamna.

Grupa je posjetila vidovnjaka. Svaka od n osoba rekla je vidovnjaku koliko ima prijatelja u grupi. Vidovnjak je nakon toga rekao da za svaki par osoba iz grupe može sa sigurnošću odrediti jesu li prijatelji ili ne.

Ako je vidovnjak rekao istinu, dokaži da u grupi ili postoji osoba koja je prijatelj sa svima ostalima, ili postoji osoba koja nije prijatelj ni s kim.

Prvo rješenje.

Promotrimo graf u kojem su vrhovi osobe iz grupe, a bridovi prijateljstva između njih. Treba dokazati da ako ne postoji vrh koji je povezan sa svim ostalima i ako ne postoji vrh koji nije spojen ni s kim, tada je moguće promijeniti skup bridova na način da stupnjevi vrhova ostanu isti.

Za to je dovoljno pronaći četiri vrha A, B, C, D takva da su A i B povezani, B i C nisu, C i D jesu, te D i A nisu. Naime, tada možemo maknuti bridove između A i B te C i D, a dodati bridove između D i A te B i C. Graf se mijenja, a stupnjevi svakog vrha ostaju isti, pa iz niza stupnjeva nije moguće jedinstveno odrediti graf.

Promotrimo vrh A najvećeg stupnja d. Neka je D neki vrh koji nije povezan s njim. Neka je C neki vrh koji je povezan s D.

Ako je C povezan s A, onda je povezan s najviše $d-2$ susjeda od A, jer bi inače bio povezan s barem $d - 1 + 2$ vrha jer je povezan s D i A, što je nemoguće zbog maksimalnosti od A.

Ako C nije povezan s A, onda je povezan s najviše $d-1$ susjeda od A jer bi inače bio povezan s $d+1$ vrhova jer je povezan s D.

U oba slučaja, postoji vrh B koji je susjed od A i nije susjed od C. Zaključujemo da su A, B, C, D tražena četiri vrha.

Drugo rješenje.

Promotrimo graf u kojem su vrhovi osobe iz grupe, te povežimo vrhove koji su prijatelji plavim bridom, a vrhove koji nisu crvenim bridom. Recimo da je vrh *monokromatski* ako su svi bridovi koji iz njega izlaze iste boje. Pretpostavka je da iz informacije o broju bridova pojedine boje iz svakog vrha možemo jedinstveno rekonstruirati bojanje bridova. Dovoljno je dokazati sljedeću tvrdnju:

Tvrdnja. Ako u grafu ne postoji monokromatski vrh, tada postoji ciklus u kojemu boje bridova alterniraju između crvene i plave.

Dokaz. Dokazujemo tvrdnju matematičkom indukcijom po n. Za $n \leqslant 3$ ta je tvrdnja trivijalno istinita jer uvijek postoji monokromatski vrh, stoga pretpostavimo da je $n \geqslant 4$.

Pretpostavimo li suprotno, tada po pretpostavci indukcije slijedi da za svaki vrh $v \in V$ postoji neki drugi vrh $f(v)$ koji postaje monokromatski ukoliko uklonimo v. To znači da se boja brida $\{v, f(v)\}$ razlikuje od boje svih drugih bridova koji izlaze iz $f(v)$. Promotrimo sada funkcijski graf funkcije $f : V \to V$, tj. usmjeren graf sa skupom vrhova V te bridovima $(v, f(v))$ za $v \in V$. Uzmimo neki ciklus C u tom grafu. Ako je C duljine barem 3, tada on odgovara alternirajućem ciklusu u polaznom grafu te smo gotovi. U suprotnom, C mora biti duljine 2. Recimo da se C sastoji od vrhova u i v (dakle $f(u) = v$ i $f(v) = u$) te da je brid $\{u, v\}$ crvene boje. Tada su svi bridovi $\{x, y\}$ za $x \in \{u, v\}$ i $y \notin \{u, v\}$ plave boje. Ako postoji brid $\{x, y\}$ crvene boje koji je disjunktan s $\{u, v\}$, tada smo gotovi jer u, v, x, y čine traženi ciklus. U suprotnom je $\{u, v\}$ jedini crveni brid u grafu te imamo kontradikciju (svaki je vrh osim u, v monokromatski). $\square$

Jednom kada imamo ciklus u kojem boje alterniraju između plave i crvene, možemo invertirati boje na njemu i dobiti drugačije bojanje koje daje iste informacije o broju bridova pojedine boje iz svakog vrha.

Zadatak 3.

Neka je ABC raznostraničan šiljastokutan trokut. Točka N je polovište duljeg luka $\widehat{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC. Neka je k kružnica promjera $\overline{BC}$.

Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe kružnicu k u točkama D i E, a D_1 i E_1 su točke takve da su $\overline{DD_1}$ i $\overline{EE_1}$ promjeri kružnice k.

Dokaži da polovište dužine $\overline{BC}$ pripada kružnici opisanoj trokutu NE_1D_1.

Prvo rješenje.

Označimo sa M polovište stranice $\overline{BC}$. Želimo dokazati da su M, E_1, D_1, N konciklične. Označimo sa N_1 točku centralnosimetričnu točki N u odnosu na točku M. Onda je dovoljno dokazati da su točke M, E, D, N_1 konciklične, jer su te četvorke točaka međusobno centralnosimetrične.

Dakle, želimo dokazati da je N_1 na kružnici τ opisanoj trokutu MED. Neka je N' drugi presjek pravca NM i kružnice τ. Želimo dokazati da je $|N'M| = |NM|$, iz čega će slijediti $N' = N_1$.

Neka je P polovište kraćeg luka BC na opisanoj kružnici trokuta ABC. Tada su A, P, D, E kolinearne.

Promotrimo potenciju točke P u odnosu na kružnicu τ. To je jednako $|PM| \cdot |PN'|$. Međutim, kako je BC radikalna os od k i τ, to je jednako potenciji od P u odnosu na k. Ta potencija je

$|MC|^2 - |PM|^2$, jer je $|MC|$ radijus od k. Dakle, vrijedi jednakost

$$|PM| \cdot |PN'| = |MC|^2 - |PM|^2.$$

Kako je $|PN'| = |MN'| - |PM|$, dobivamo

$$|PM| \cdot |MN'| - |PM|^2 = |MC|^2 - |PM|^2,$$

odnosno $|PM| \cdot |MN'| = |MC|^2$.

Međutim, prepoznajemo da je izraz na desnoj strani potencija točke M s obzirom na kružnicu opisanu trokutu ABC. S druge strane, ta potencija je jednaka $|PM| \cdot |MN|$. Onda slijedi da je $|PM||MN'| = |PM||MN|$, odnosno $|MN| = |MN'|$, kao što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Zadržimo iste oznake kao iz prvog rješenja.

Promotrimo inverziju I_M sa središtem M i radijusom $|MA| = |MB| = |MD| = |ME|$. Vidimo da je $I_M(D) = D$ te $I_M(E) = E$, pa iz poznatih svojstava inverzije slijedi da je $MDEN_1$ tetivan ako i samo ako su točke $D, E, I_M(N_1)$ kolinearne.

Međutim, imamo $|MP||MN_1| = |MP||MN| = |MA|^2$ pa je $I_M(N_1) = P$. Kako su točke D, E, P kolinearne, tvrdnja je dokazana.

Zadatak 4.

Označimo s $\tau(k)$ broj pozitivnih djelitelja prirodnog broja k, a s $\varphi(k)$ broj prirodnih brojeva koji nisu veći od k, a relativno su prosti s k. Za prirodan broj m kažemo da je *lijep* ako postoji prirodan broj n takav da vrijedi

$$\frac{\tau(m)}{m} = \frac{\varphi(n)}{n}.$$

Postoji li beskonačno mnogo lijepih brojeva?

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da je skup lijepih brojeva podskup skupa $S = \{2^a 3^b 5^c 7^d : 0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 4\}$, odakle direktno slijedi da ih nema beskonačno mnogo.

Neka je m lijepi broj te neka je n broj takav da m i n zadovoljavaju uvjet zadatka.

Zbog formule za funkciju φ, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je n kvadratno slobodan. Tada je $\varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1)$ za $n = p_1 \ldots p_k$, gdje su p_i različiti prosti brojevi.

Primijetimo da za svaki prost broj p i svaki prirodan broj α vrijedi $\frac{\alpha+1}{p^\alpha} \leqslant \frac{2}{p} \leqslant 1$, jer je $(\alpha + 1)p \leqslant \alpha p + p^\alpha \leqslant 2p^\alpha$ jer je $\alpha \leqslant 2^{\alpha-1} \leqslant p^{\alpha-1}$ za svaki prirodan broj α.

Zapišimo jednadžbu u ovom obliku:

$$n \cdot \tau(m) = m \cdot \phi(n).$$

Najveći prost broj koji dijeli n ne dijeli $\varphi(n)$, pa mora dijeliti m.

Dokažimo prvo da prosti faktori od m nisu veći od 7. Pretpostavimo suprotno. Neka je $q \geqslant 11$ najveći prosti faktor od m. Iz gornje tvrdnje, najveći prosti faktor od n je manji ili jednak od q, pa vrijedi sljedeća ograda:

$$\frac{\varphi(n)}{n} \geqslant \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11}\frac{11}{12}\frac{12}{13}\frac{13}{14} \cdots \frac{q-1}{q} = \frac{8}{35} \cdot \frac{10}{q} = \frac{16}{7} \cdot \frac{1}{q} > \frac{2}{q}.$$

S druge strane, ako s α označimo eksponent uz q u rastavu od m, vrijedi:

$$\frac{\tau(m)}{m} = \frac{\alpha+1}{q^\alpha} \cdot \frac{\tau(m/q^\alpha)}{m/q^\alpha} \leqslant \frac{\alpha+1}{q^\alpha} \leqslant \frac{2}{q}.$$

Sada imamo

$$\frac{\tau(m)}{m} \leqslant \frac{2}{q} < \frac{\varphi(n)}{n},$$

što je kontradikcija.

Dakle, svi prosti faktori od m su najviše 7. Neka je m oblika $2^a 3^b 5^c 7^d$, gdje su a, b, c, d nenegativni cijeli brojevi od kojih je barem jedan veći od 4. Onda n ima proste faktore iz skupa $\{2, 3, 5, 7\}$, pa je zato

$$\frac{\varphi(n)}{n} \geqslant \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} = \frac{8}{35}.$$

S druge strane, budući da je neki od eksponenata α uz prost broj p u rastavu od m barem 5, vrijedi

$$\frac{\tau(m)}{m} \leqslant \frac{\alpha+1}{p^\alpha} \leqslant \frac{6}{2^6} = \frac{3}{16} < \frac{8}{35} \leqslant \frac{\varphi(n)}{n}.$$

Dakle, svi lijepi brojevi se nalaze u skupu S, čime je dokaz gotov.

Drugo rješenje.

Neka su m i n brojevi koji zadovoljavaju uvjet zadatka. Onda je

$$m\varphi(n) = n\tau(m). \tag{3}$$

Kao i u prvom rješenju, bez smanjenja općenitosti je n kvadratno slobodan.

Za prirodan broj k, označimo s $\Omega(k)$ broj njegovih prostih faktora, ne nužno različitih. Imamo $\Omega(xy) = \Omega(x) + \Omega(y)$ za sve x, y. Nadalje, ako je $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_j^{\alpha_j}$ rastav od m na proste faktore, onda je

$$\Omega(m) - \Omega(\tau(m)) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_j - \Omega(\alpha_1 + 1) - \ldots - \Omega(\alpha_j + 1).$$

Iz očite nejednakosti $\Omega(\alpha_i + 1) \leqslant \alpha_i$, slijedi $\Omega(m) \geqslant \Omega(\tau(m))$. Onda mora vrijediti $\Omega(n) \geqslant \Omega(\varphi(n))$. Međutim, za svaki prost broj $p > 3$ vrijedi $2 = \Omega(p) < \Omega(\varphi(p)) = \Omega(p-1)$ jer $p-1$ tada nije prost. Za $p = 3$ imamo $\Omega(3) = \Omega(2)$ i za $p = 2$ imamo $\Omega(2) = \Omega(1) + 1$. Zaključujemo da postoji najviše jedan prost broj p veći od 3 koji dijeli n. Međutim, onda je

$$\frac{\varphi(n)}{n} \geqslant \frac{p-1}{p}\frac{2}{3}\frac{1}{2} \geqslant \frac{4}{15}.$$

S druge strane, za svaki prirodan broj m vrijedi poznata nejednakost $\tau(m) \leqslant 2\sqrt{m}$, pa je $\frac{\tau(m)}{m} \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}$, a postoji samo konačno mnogo m takvih da je $\frac{2}{\sqrt{m}} \geqslant \frac{4}{15}$. Dakle, postoji samo konačno mnogo lijepih brojeva.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 4. lipnja 2022.

Zadatak 1.

Neka je $\mathbb{Q}_0^+$ skup svih nenegativnih racionalnih brojeva.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Q}_0^+ \to \mathbb{Q}_0^+$ takve da za sve nenegativne racionalne brojeve x, y vrijedi

$$yf(x+y) + (y-1)f(xy) = f(y^2)f(x+1).$$

Rješenje.

Označimo s $P(a,b)$ uvrštavanje brojeva a i b na mjesto x i y u jednakost iz zadatka.

Primijetimo da funkcija f takva da je $f(x) = 0$ za svaki x zadovoljava uvjet. Nadalje u rješenju, neka je f nenul funkcija koja zadovoljava uvjet.

Iz $P(0,0)$ slijedi $-f(0) = f(1)f(0)$. Kako je $f(1) \geqslant 0$, vrijedi $f(0) = 0$.

Iz $P(0,1)$ slijedi $f(1) = f(1)^2$. Iz toga slijedi da je ili $f(1) = 1$ ili $f(1) = 0$.

Pretpostavimo da je $f(1) = 0$. Iz $P(0,y)$ tada slijedi da za svaki y vrijedi $yf(y) = f(y^2)f(1) = 0$. Međutim, onda je $f(y) = 0$ za svaki y, kontradikcija. Dakle, $f(1) = 1$.

Onda iz $P(0,y)$ vrijedi $yf(y) = f(y^2)$, pa uvjet iz zadatka možemo zapisati ovako:

$$yf(x+y) + (y-1)f(xy) = yf(y)f(x+1),$$

te će nadalje $P(a,b)$ označavati uvrštavanje brojeva a i b u tu jednakost.

Iz $P(1,3)$ slijedi $3f(4) + 2f(3) = 3f(3)f(2)$.

Iz $P(2,2)$ slijedi $3f(4) = 2f(2)f(3)$.

Iz tih dviju jednadžbi dobivamo $2f(2)f(3) = 3f(2)f(3) - 2f(3)$, što je ekvivalentno s

$$f(3)(f(2)-2) = 0.$$

Dakle, ili je $f(3) = 0$ ili je $f(2) = 2$.

Pretpostavimo da je $f(3) = 0$. Onda iz $P(1,3)$ slijedi $f(4) = 0$, a iz $f(4) = f(2^2) = 2f(2)$ slijedi $f(2) = 0$.

Iz $P(1,y)$ dobivamo $yf(y+1) + (y-1)f(y) = 0$. Za $y > 1$ su oba pribrojnika s lijeve strane nenegativni, pa su oba jednaki 0. Zaključujemo da je $f(y) = 0$ za svaki $y > 1$.

Međutim, ako uzmemo različite brojeve x i y takve da je $xy = 1$ i promotrimo $P(x,y)$, zbog $x+y > 1$ i $x+1 > 1$ imamo $(y-1)f(1) = 0$, odnosno $f(1) = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $f(2) = 2$.

Iz $P(1,y)$ za $y > 0$ sada dobivamo $yf(y+1) + (y-1)f(y) = 2yf(y)$, odnosno

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(y+1)}{y+1}. \tag{4}$$

Sada matematičkom indukcijom možemo dokazati da je $f(n) = n$ za svaki prirodan broj n. Naime, bazu smo već dokazali, a ako pretpostavimo $f(n) = n$, onda iz (4) slijedi $f(n+1) = n+1$.

Neka je sada y bilo koji pozitivan racionalan broj koji nije cijeli, a n prirodan broj takav da je ny isto prirodan broj.

Iz $P(n, y)$, korištenjem da su $n + 1$ i ny prirodni, dobivamo

$$yf(y + n) + (y - 1)ny = yf(y)(n + 1).$$

Međutim, primijetimo da primjenom (4) n puta slijedi

$$\frac{f(y + n)}{y + n} = \frac{f(y + n - 1)}{y + n - 1} = \ldots = \frac{f(y)}{y}.$$

Onda vrijedi

$$\frac{y(y + n)f(y)}{y} + (y - 1)ny = yf(y)(n + 1).$$

Raspisivanjem te jednakosti dobivamo

$$(y - 1)ny = f(y)(ny + y - n - y) = n(y - 1)f(y),$$

iz čega slijedi $f(y) = y$.

Dokazali smo da za svaki nenegativan racionalan broj y nužno vrijedi $f(y) = y$, a direktnim uvrštavanjem vidimo da ta funkcija stvarno zadovoljava uvjet zadatka.

Zadatak 2.

Neka je n prirodan broj. U selu živi $2n$ ljudi. Neki među njima su su prijatelji, a prijateljstva su uzajamna. *Savršeno sparivanje* je podjela stanovnika sela na n parova tako da su u svakom paru dvije osobe koje su prijatelji.

Pretpostavimo da u selu postoji točno jedno savršeno sparivanje. Koji je najveći mogući broj prijateljstava u selu?

Prvo rješenje.

Ljude u selu poistovjećujemo s vrhovima, a prijateljstva s bridovima u grafu s $2n$ vrhova.

Tvrdimo da je odgovor n^2.

Dokažimo prvo da je moguće postići da u selu ima točno n^2 prijateljstava. Označimo vrhove s $1, 2, \ldots, 2n$. Promotrimo graf u kojem je svaki vrh s parnom oznakom povezan sa svakim vrhom koji ima oznaku manju od njega, te neka su to jedini bridovi. Ovaj graf ima $2n - 1 + 2n - 3 + \ldots + 3 + 1 = n^2$ bridova.

Sparivanje M dano s $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n - 1, 2n\}\}$ je savršeno sparivanje u tom grafu. Nadalje, primijetimo da svako savršeno sparivanje mora imati $\{2n - 1, 2n\}$ kao par, jer vrh $2n - 1$ nema drugih susjeda. Slično zaključujemo da $2n - 3$ mora biti sparan s $2n - 2$ jer mu je jedini preostali susjed, $2n$, već sparen. Potpuno analogno zaključujemo da za svaki $k \leqslant n$ vrh $2k - 1$ mora biti sparen s vrhom $2k$. Iz toga slijedi da je M jedinstveno savršeno sparivanje u grafu.

Dokažimo sada da graf koji ima više od n^2 bridova ne može imati jedinstveno savršeno sparivanje. Ponovno promotrimo graf s vrhovima $1, 2, \ldots, 2n$, te pretpostavimo da je

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n - 1, 2n\}\}$$

jedino savršeno sparivanje u njemu.

Pretpostavimo da postoje 3 brida između skupova $\{2a-1, 2a\}$ i $\{2b-1, 2b\}$ za neke $1 \leqslant a < b \leqslant n$. Onda su ili $\{2a-1, 2b-1\}$ i $\{2a, 2b\}$ oba bridovi u grafu, ili su $\{2a-1, 2b\}$ i $\{2a, 2b-1\}$ oba bridovi u grafu. U oba slučaja, dobivamo drugačije sparivanje od početnog ako zamijenimo bridove $\{2a-1, 2a\}$ i $\{2b-1, 2b\}$ s tim bridovima, što je kontradikcija. Dakle, postoje najviše dva brida između $\{2a-1, 2a\}$ i $\{2b-1, 2b\}$.

Prebrojimo sada bridove. Imamo n bridova unutar savršenog sparivanja, te zbog maloprije dokazane tvrdnje imamo najviše $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ bridova izvan savršenog sparivanja. Zaključujemo da ukupno ima najviše n^2 bridova.

Drugo rješenje.

Dokazat ćemo matematičkom indukcijom da je broj bridova najviše n^2. Tvrdnja je očita za $n = 1$, te se lako provjeri za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n - 1 \geqslant 2$, te promotrimo graf s $2n$ vrhova koji ima jedinstveno savršeno sparivanje, te neka je

$$\{\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}\}$$

to sparivanje. Neka je m broj bridova tog grafa.

Primijetimo da onda graf dobiven micanjem vrhova x_i i y_i za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$ također ima jedinstveno savršeno sparivanje, pa ima najviše $(n-1)^2$ bridova. Ako označimo s $\deg(v)$ stupanj vrha v, onda jer su x_i i y_i povezani, za svaki i nužno vrijedi

$$\deg(x_i) + \deg(y_i) - 1 + (n-1)^2 \geqslant m.$$

Sumiranjem po svim $i \in \{1, \ldots, n\}$ dobivamo

$$\sum_{v \text{ vrh}} \deg(v) - n + n(n-1)^2 \geqslant mn.$$

Međutim, kako je suma stupnjeva jednaka dvostrukom broju bridova u grafu, gornja nejednakost je zapravo

$$2m - n + n(n-1)^2 \geqslant mn,$$

odnosno $m \leqslant \frac{n((n-1)^2-1)}{n-2} = n^2$.

Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ paralelogram takav da je $|AC| = |BC|$. Neka je P točka na pravcu AB takva da B leži između A i P. Opisana kružnica trokuta ACD siječe dužinu $\overline{PD}$ u točki Q, $Q \neq D$. Opisana kružnica trokuta APQ siječe dužinu $\overline{PC}$ u točki R, $R \neq P$.

Dokaži da se pravci CD, AQ i BR sijeku u jednoj točki.

Prvo rješenje.

Kako je $|AC| = |BD| = |AD|$, imamo $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$. Kako su $APRQ$ i $AQCD$ tetivni, vrijedi

$$\sphericalangle CRA = 180^\circ - \sphericalangle ARP = 180^\circ - \sphericalangle AQP = \sphericalangle DQA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle CBA,$$

pa je $ABCR$ tetivan. Označimo s γ njegovu opisanu kružnicu.

Neka je $X = AQ \cap CD$. Trebamo dokazati da su B, R i X kolinearne. Iz tetivnosti $APQR$ imamo

$$\sphericalangle RQX = 180 - \sphericalangle AQR = \sphericalangle RPA = \sphericalangle RCX,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz paralelnosti AB i CD. Dakle, četverokut $CQRX$ je također tetivan. Neka je δ njemu opisana kružnica.

Konačno, korištenjem kružnica δ i γ, imamo

$$\sphericalangle XRC = \sphericalangle XQC = 180^\circ - \sphericalangle CQA = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle CRB,$$

iz čega slijedi tražena kolinearnost.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, dokažemo tetivnost $ABCR$, i definiramo točku X na isti način, kao presjek AQ i CD.

Označimo sa α kružnicu opisanu četverokutu $APQR$, te definiramo Y kao drugi presjek od α i RB.

Prema teoremu o tetivi i tangenti, vidimo da je CD tangenta na γ. Korištenjem toga i kružnice α, dobivamo

$$\sphericalangle RYA = \sphericalangle RPA = \sphericalangle RCX = \sphericalangle RBC.$$

Dakle, AY je paralelno s BC, pa Y leži na pravcu DA.

Sada imamo $\sphericalangle RYA = \sphericalangle RYD$, ali $\sphericalangle RYA = \sphericalangle RCX$, što smo već dokazali prije. Zaključujemo $\sphericalangle RYD = \sphericalangle RCX$, pa točke C, D, Y, R sve leže na kružnici, koju označimo s β.

Sada vidimo da su pravci CD, YBR i AQ radikalne osi parova kružnica $(AQCD), \alpha, \beta$ pa se sijeku u jednoj točki, a to je upravo X.

Zadatak 4.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost, $m < n$, sa svojstvom da postoje prirodni brojevi a, b, c, d koji nisu djeljivi s p takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} ab + cd &= p^m, \\ ac + bd &= p^n. \end{aligned}$$

Rješenje.

Zbrojimo dvije jednadžbe i dobivamo

$$ab + bd + dc + ca = (a + d)(b + c) = p^m(p^{n-m} + 1),$$

pa $p^m \mid (a+d)(b+c)$. Ako p ne dijeli $a+d$, onda $p^m \mid b+c$, pa je $ab+cd \leqslant b+c$, što je jedino moguće ako je $a = d = 1$. Međutim, tada dobivamo $b + c = p^m = p^n$, kontradikcija s $m < n$. Dakle, p dijeli $a + d$. Analogno, p dijeli $b + c$.

Međutim, onda je $a \equiv -d \pmod{p}$ i $b \equiv -c \pmod{p}$, pa je $ab \equiv cd \pmod{p}$. S druge strane, prva jednadžba nam daje $ab \equiv -cd \pmod{p}$. Zaključujemo da p dijeli $2cd$, pa je nužno $p = 2$.

Kao što je već spomenuto, ako zbrojimo jednadžbe dobivamo $2^m \mid (a + d)(b + c)$. Također, ako oduzmemo jednadžbe dobivamo $2^m \mid (a - d)(b - c)$.

Ako su $a-d$ i $b-c$ oba djeljivi s 4, onda $a+d$ i $b+c$ oba nisu djeljivi s 4, pa $8 \nmid (a+d)(b+c)$ i vrijedi $m \leqslant 2$. Za $m = 1$ dobili bismo $a = b = c = d = 1$, što je nemoguće jer bi bilo $n = m = 1$. Za $m = 2$ dobili bismo $ab = 3$, $cd = 1$ ili $ab = 1$, $cd = 3$. U svakom od tih slučaja dobili bismo $n = m = 2$, kontradikcija.

Dakle, ili $a - d$ ili $b - c$ nije djeljiv s 4. Bez smanjenja općenitosti neka $a - d$ nije djeljiv s 4, te neka je $b < c$. Tada je $b - c$ djeljiv s 2^{m-1}, pa je $b \geqslant 2^{m-1} + 1$. Kako je $ab < 2^m$, zaključujemo $a = 1$.

Nadalje, kako je $b - c$ djeljiv s 4, slijedi da $b + c$ nije djeljiv s 4, pa je $a + d = 1 + d$ djeljiv s 2^{m-1}. Ako bi bilo $c > 1$, onda bi bilo $ab+cd > 2(a+d) \geqslant 2 \cdot 2^{m-1}$, kontradikcija. Dakle, $c = 1$.

Sada imamo sustav jednadžbi $b + d = 2^m$ i $1 + bd = 2^n$. Znamo da $2^{m-1} \mid d + 1$ i $2^{m-1} \mid b - 1$, pa je $b + d = b - 1 + d + 1 \geqslant 2 \cdot 2^{m-1}$ uz jednakost samo ako je $b - 1 = d + 1 = 2^{m-1}$. Dakle, nužno je $b = 2^{m-1} + 1$, $d = 2^{m-1} - 1$.

Direktnim uvrštavanjem dobivamo $1 + bd = 2^{2m-2}$. Dakle, $n = 2m - 2$.

Zaključujemo da je skup rješenja jednak $\{(2, m, 2m - 2) \mid m \geqslant 3\}$.