DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 24. – 26. travnja 2023.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** U nekoj školi je manje od 300 učenika. U šest razrednih odjeljenja je jednak broj učenika. Ukupan broj učenika u tih šest odjeljenja je veći od 90. Preostalih učenika je 20 % više nego je ukupno u ovih šest razrednih odjeljenja. Koliko je učenika u toj školi?

**Rješenje.**
Neka je $x$ jednak broj učenika u šest razreda. Ukupan broj učenika u tih šest razreda je $6x$ i taj je broj veći od 90. To znači da je

$$6x > 90, \qquad \text{tj.} \qquad x > 15.$$

Broj preostalih učenika u toj školi dobivamo tako da na ukupno $6x$ učenika dodamo 20 % od $6x$, što je:

$6x + 0.2 \cdot 6x = (1 + 0.2) \cdot 6x = 1.2 \cdot 6x = 7.2x.$

Ako se tom broju dodaju učenici iz šest razreda, dobije se ukupan broj učenika: $7.2x + 6x = 13.2x.$
Ukupan broj učenika u školi je manji od 300:

$$13.2x < 300, \quad \text{tj.} \qquad x < 22.73.$$

Broj $x$ može biti samo prirodan broj, pa zaključujemo da je:

$$15 < x < 23, \text{ odnosno } x \in \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}.$$

Umnožak $13.2 \cdot x$ mora biti prirodan broj.

To će jedino biti ako je $x$ višekratnik broja 10, odnosno za $x = 20$ .

U školi je 264 učenika.

**2.** Marko je izvadio sve kovanice iz svoje štedne kasice te ih posložio na stol u jedan red. Prvo je poredao kovanice od 2 eura, a zatim je između svake dvije susjedne kovanice u nizu stavio po jednu kovanicu od 50 centi. Nakon toga je između svake dvije kovanice u nizu na stolu stavio kovanicu od 20 centi. I na kraju je između svake dvije kovanice u novom nizu ubacio kovanicu od 5 centa. Koliko je komada kovanica bilo posloženo na stolu, ako je njihova ukupna vrijednost 95 eura?

**Prvo rješenje.**
Na stol su prvo stavljene kovanice od 2 eura. Neka ih je bilo $n$.

Dakle, na stolu je $n$ kovanica vrijednih $2n$ eura.

Između $n$ kovanica može se ubaciti $n - 1$ nova kovanica.

Vrijednost svake je 50 centi ili 0.5 eura, pa je dodan iznos od $(n - 1) \cdot 0.5$ eura.

Sada je na stolu $n + n - 1 = 2n - 1$ kovanica,

u vrijednosti $2n + 0.5n - 0.5 = 2.5n - 0.5$ eura.

Između postojećih $2n - 1$ kovanice, može se staviti opet jedna kovanica manje, dakle $2n - 2$ kovanice.

Te su kovanice od 20 centi ili 0.2 eura, pa je i njihova vrijednost $(2n - 2) \cdot 0.2 = 0.4n - 0.4$ eura.

Sada su na stolu $2n - 1 + 2n - 2 = 4n - 3$ kovanice,

a njihova je vrijednost $2.5n - 0.5 + 0.4n - 0.4 = 2.9n - 0.9$ eura.

U zadnjem krugu, između $4n - 3$ kovanice može se postaviti $4n - 4$ kovanice.

Vrijednost svake je 5 centi ili 0.05 eura, pa je dodani iznos $(4n - 4) \cdot 0.05 = 0.2n - 0.2$ eura.

Konačno, na stolu je $4n - 3 + 4n - 4 = 8n - 7$ kovanica,

ukupne vrijednosti $2.9n - 0.9 + 0.2n - 0.2 = 3.1n - 1.1$ eura.

Kako je na stolu ukupno 95 eura, iz $3.1n - 1.1 = 95$ dobije se

$3.1n = 95 + 1.1$

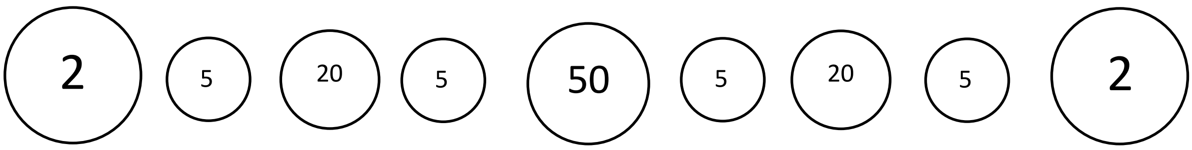
$3.1n = 96.1$

$n = 96.1 : 3.1$

$n = 31.$

Sada se izračuna da je na stolu $8 \cdot 31 - 7 = 241$ kovanica.

**Drugo rješenje.**
Neka je $n$ broj kovanica od 2 eura. Promotrimo što se dogodilo između prve dvije kovanice od 2 eura.
U prvom koraku je između njih stavljena jedna kovanica od 50 centi.
Nakon toga su stavljene dvije kovanice od 20 centi.
U zadnjem koraku su stavljene još četiri kovanice od 5 centi.
Dakle, imamo niz u kojem se ponavlja sljedeći uzorak




Prije druge kovanice od 2 eura nalazi se 8 kovanica ukupne vrijednosti od 3.10 eura.

Prije treće kovanice od 2 eura nalazi se 16 kovanica ukupne vrijednosti od $2 \cdot 3.10 = 6.20$ eura.

Nastavimo li tako zaključivati, dobivamo da se prije posljednje kovanice od 2 eura nalazi $8 \cdot (n - 1)$ kovanica ukupne vrijednosti $(n - 1) \cdot 3.10$ eura. Kad dodamo posljednju kovanicu od 2 eura, imamo $8n - 7$ kovanica u vrijednosti $(n - 1) \cdot 3.10 + 2$ eura. Ta vrijednost iznosi 95 eura, pa vrijedi

$3.1 \cdot (n - 1) = 95 - 2$

$3.1 \cdot (n - 1) = 93$

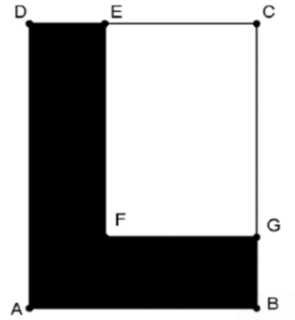
$n - 1 = 93.1 : 3.1 = 30$

$n = 31.$

Sada se izračuna da je na stolu $8 \cdot 31 - 7 = 241$ kovanica.

**3.** Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$ dane su redom točke $G$ i $E$ tako da vrijedi $|DE| = |BG|$ i $|DE| = \frac{1}{2}|EC|$. Točka $F$ je unutar pravokutnika $ABCD$ takva da je $CEFG$ također pravokutnik.

Ako je površina šesterokuta $ABGFED$ (obojanog lika na slici) jednaka površini pravokutnika $CEFG$ (neobojanog dijela na slici), koliko puta je $\overline{BC}$ dulja od $\overline{DE}$?



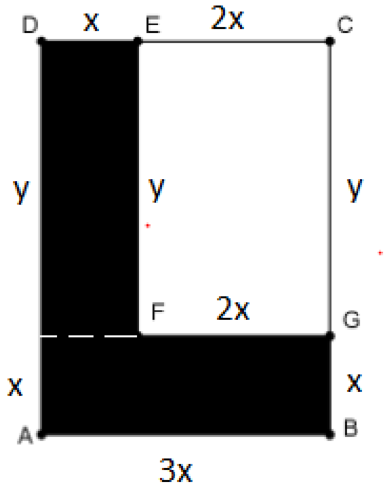

**Rješenje.**
Ako $|DE|$ označimo s $x$, tada iz $|DE| = \frac{1}{2}|EC|$ slijedi da je $|EC|$ dvostruko dulja od $|DE|$, odnosno

$$|EC| = 2x.$$

Označimo s $x$ na skici sve duljine koje su jednake kao $|DE|$ odnosno $|BG|$.

Tada je $|EC| = 2x$ i $|DC| = |AB| = x + 2x = 3x$.

Označimo s $y$ sve duljine jednake $|GC|$.




**Prvi način:**
Neka je točka $H$ takva da su $EDHF$ i $ABGH$ pravokutnici. Označimo njihove površine redom $P_1$ i $P_2$, a površinu pravokutnika $CEFG$ označimo s $P_3$.

Vrijedi

$$P_1 = x \cdot y, \qquad P_2 = 3x \cdot x, \qquad P_3 = 2x \cdot y$$

Iz uvjeta znamo da je $P_1 + P_2 = P_3$, iz čega slijedi jednakost: $x \cdot y + 3x \cdot x = 2x \cdot y$.

Na lijevoj strani primijenimo distributivnost množenja prema zbrajanju te lijevu i desnu stranu jednakosti podijelimo s $x$ (što smijemo jer duljina $x$ nije 0):

$x \cdot (y + 3x) = 2x \cdot y$,

$y + 3x = 2y$, tj. dobivamo $y = 3x$.

**Drugi način:**
Uvjet da su bijela i crna površina jednake zapravo znači da je površina pravokutnika $ABCD$ dvostruko veća od površine pravokutnika $FGCE$.

Uz oznake kao na skici slijedi:

$P_{ABCD} = 3x \cdot (x + y)$

$P_{FGCE} = 2x \cdot y$

$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{FGCE}$

$3x \cdot (x + y) = 2 \cdot 2x \cdot y$

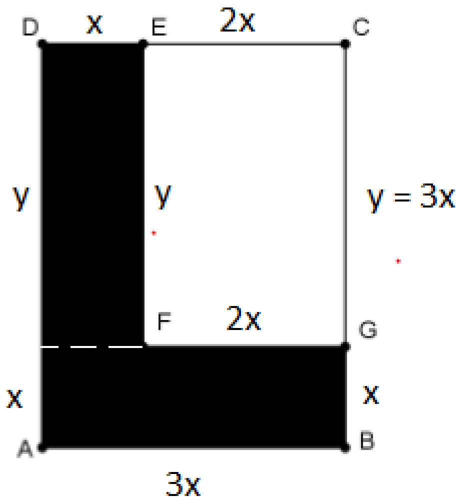
$3x \cdot (x + y) = 4x \cdot y \ /\!:x$, smijemo dijeliti i lijevu i stranu jednakosti s $x$ jer je $x \neq 0$.

$3(x + y) = 4y$ primijenimo distributivnost množenja prema zbrajanju na lijevoj strani jednakosti,

$3x + 3y = 4y$ te s obje strane jednakosti oduzmemo $3y$,

jednakost se neće promijeniti, a dobit ćemo da je $y = 3x$.

**Za oba načina slijedi zaključak:**




Na dužini $\overline{BC}$ označili smo $|BG| = x$ i $|GC| = y$.

Točka $G$ pripada dužini $\overline{BC}$ pa iz dobivenog izraza slijedi da vrijedi

$$|BC| = |BG| + |GC| = x + 3x = 4x.$$

Iz $|DE| = x$ i $|BC| = 4x$ slijedi da je $\overline{BC}$ 4 puta dulja od $\overline{DE}$.

**4.** Neka je

$$n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999 \ldots 999}_{99 \text{ znamenaka}}$$

Odredi broj i zbroj znamenaka broja $n$.

**Prvo rješenje.**

$n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999 \ldots 999}_{99 \text{ znamenaka}}$

Prvi pribrojnik ima 1 znamenku, drugi dvije, treći 3 znamenke, a posljednji 99 znamenki pa je ukupan broj pribrojnika 99.

$n = 9 + 90 + 9 + 900 + 90 + 9 + \ . \ . \ . \ +9\underbrace{00 \ldots 00}_{98 \text{ nula}} + 9\underbrace{00 \ldots 00}_{97 \text{ nula}} + . \ . \ . +900 + 90 + 9 =$

$n = 99 \cdot 9 + 98 \cdot 90 + 97 \cdot 900 + 96 \cdot 9000 + 95 \cdot 90000 + \ . \ . \ . \ +2 \cdot 9\underbrace{00 \ldots 00}_{98 \text{ nula}} + 9\underbrace{00 \ldots 00}_{97 \text{ nula}}$

$99 \cdot 9 = 891$, na dekadskom mjestu jedinica je znamenka 1

$98 \cdot 90 + 890 = 8820 + 890 = 9710$, na mjestu desetica je 1

$97 \cdot 900 + 9700 = 87300 + 9700 = 97000$, na mjestu stotica je 0

$96 \cdot 9000 + 97000 = 864000 + 97000 = 961000$, na mjestu tisućica je 1

$95 \cdot 9 + 96 = 855 + 96 = 951$, na mjestu deset tisućica je 1

$94 \cdot 9 + 95 = 94 \cdot 9 + 94 + 1 = 94 \cdot 10 + 1$, na mjestu sto tisućica je 1

$93 \cdot 9 + 94 = 93 \cdot 9 + 93 + 1 = 93 \cdot 10 + 1$, na mjestu milijuna je 1

$92 \cdot 9 + 93 = 92 \cdot 9 + 92 + 1 = 92 \cdot 10 + 1$, na mjestu deset milijuna je 1

$91 \cdot 9 + 92 = 91 \cdot 9 + 91 + 1 = 91 \cdot 10 + 1$, na mjestu sto milijuna je 1

$90 \cdot 9 + 91 = 90 \cdot 9 + 90 + 1 = 90 \cdot 10 + 1$, na mjestu milijarda je 1

$89 \cdot 9 + 90 = 89 \cdot 9 + 89 + 1 = 89 \cdot 10 + 1$, na mjestu deset milijarda je 1

$88 \cdot 9 + 89 = 88 \cdot 9 + 88 + 1 = 88 \cdot 10 + 1$, na mjestu sto milijarda je 1

$\vdots$

$4 \cdot 9 + 5 = 4 \cdot 9 + 4 + 1 = 4 \cdot 10 + 1$, na 96. mjestu brojeći od dekadskog mjesta jedinica je 1

$3 \cdot 9 + 4 = 3 \cdot 9 + 3 + 1 = 3 \cdot 10 + 1$, na 97. mjestu brojeći od dekadskog mjesta jedinica je 1

$2 \cdot 9 + 3 = 2 \cdot 9 + 2 + 1 = 2 \cdot 10 + 1$, na 98. mjestu brojeći od dekadskog mjesta jedinica je 1

$1 \cdot 9 + 2 = 1 \cdot 9 + 1 + 1 = 1 \cdot 10 + 1 = 11$, na prva dva vodeća mjesta su jedinice

$n = 11111 \ . \ . \ . \ 111111111011$, $n$ ima 100 znamenki, na dekadskom mjestu stotica je 0.

Zbroj svih znamenki je 99.

**Drugo rješenje.**

| Zbroj | Pomoćne radnje |
|---|---|
| 9 | $9 \cdot 99 = 891$ pišemo 1 pribrajamo 89 |
| 99 | $9 \cdot 98 + 89 = 971$ pišemo 1 pribrajamo 97 |
| 999 | $9 \cdot 97 + 97 = 970$ pišemo 0 pribrajamo 97 |
| 9999 | $9 \cdot 96 + 97 = 961$ pišemo 1 pribrajamo 96 |
| 99999 | $9 \cdot 95 + 96 = 951$ pišemo 1 pribrajamo 95 |
| … | $9 \cdot 94 + 95 = 941\ldots$ |
| + 99999…9999 | $9 \cdot 93 + 94 = 931$ |
| 11111…11011 | $9 \cdot 92 + 93 = 921$ |
| | … |
| | $9 \cdot 11 + 12 = 111$ |
| | $9 \cdot 10 + 11 = 101$ |
| | $9 \cdot 9 + 10 = 91$ |
| | … |
| | $9 \cdot 2 + 3 = 21$ pišemo 1 pribrajamo 2 |
| | $9 \cdot 1 + 2 = 11$ pišemo 11 |

U rješenju ima 99 znamenki 1 i jedna znamenka 0, tako da je znamenki ukupno 100, a zbroj znamenki je $99 \cdot 1 + 0 = 99$.

**Treće rješenje.**
Vrijedi

$$\underbrace{999\ldots999}_{n\text{ znamenaka}} = \underbrace{1000\ldots000}_{n+1\text{ znamenaka}} - 1.$$

Zato je

$$n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots999}_{99\text{ znamenaka}} = \underbrace{1111\ldots1110}_{100\text{ znamenaka}} - 99 \cdot 1 = \underbrace{1111\ldots1110}_{100\text{ znamenaka}} - 99$$
$$= \underbrace{1111\ldots1011}_{100\text{ znamenaka}}$$

Zbroj znamenaka broja $n$ je 99.
Broj $n$ ima 100 znamenaka.

**5.** Na nogometnom turniru sudjelovalo je 10 ekipa koje su igrale svaka protiv svake točno jednom. Za pobjedu ekipa dobiva 3 boda, za poraz 0 bodova, a kod neriješenog rezultata svaka ekipa dobiva po 1 bod. Na kraju je izračunat ukupan broj bodova za svaku ekipu. Označimo s $M$ najveći od tih brojeva, a s $m$ najmanji od tih brojeva.
a) Ako je ukupni broj bodova svih ekipa jednak 98, koliko najviše može iznositi $M$?
b) Ako je ukupni broj bodova svih ekipa jednak 98 i $M = 19$, koliko može iznositi $m$?

**Prvo rješenje.**
Ako je utakmica završila neriješeno, onda je ukupni broj bodova osvojen na toj utakmici jednak 2, a ako je završila pobjedom neke ekipe, onda je 3.

Ako je $x$ broj utakmica koje su završile neriješeno, a y broj utakmica koje su završile pobjedom neke ekipe, onda je $2x + 3y = 98$.

Ukupni broj utakmica je $9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 45$. Dakle, vrijedi $x + y = 45$, tj. $x = 45 - y$.

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **8** | 9 | 10 | … | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | **37** | 36 | 35 | … | | |
| $2x + 3y$ | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | **98** | 99 | 100 | | | |

Povećanjem broja $y$ za 1, ukupni broj bodova $2x + 3y$ se povećava za 1.

Zato je jedino rješenje $y = 8$, $x = 37$.

Ukupni broj odigranih utakmica pojedine ekipe je 9.

Ako je samo 8 utakmica završilo pobjedom jedne ekipe, onda je ekipa koja je ostvarila maksimalni broj bodova mogla imati najviše 8 pobjeda i 1 neriješeno, tj. $M = 8 \cdot 3 + 1 = 25$.

To se može postići tako da je ta ekipa pobijedila sve ekipe osim jedne, a sve preostale utakmice su završile neriješeno. Stoga, odgovor na pitanje pod a) je 25.

Ako je $M = 19$, to znači da ekipa s najviše bodova, nazovimo ju ekipa A, mogla ostvariti

I. 6 pobjeda, 1 neriješeni ishod i 2 poraza
II. 5 pobjeda i 4 neriješena ishoda

U prvom slučaju preostalih 9 ekipa su međusobno morale igrati neriješeno jer su sve utakmice koje nisu završile neriješeno bile one u kojima je igrala ekipa A. To znači da dvije preostale ekipe imaju 8 neriješenih i 1 pobjedu, a šest preostalih ekipa ima 8 neriješenih i 1 poraz, pa je $m = 8$.

U drugom slučaju preostalih 9 ekipa ima u međusobnim utakmicama 3 pobjede i poraza te 33 neriješena ishoda. Promatramo sljedeće slučajeve.

Ukoliko sva ta tri poraza ima ista ekipa, onda ona ima ukupno tri ili četiri poraza i pet ili šest neriješenih ishoda, ovisno o njezinom rezultatu s A, te je $m = 5$ ili $m = 6$.

Ukoliko od ta tri poraza, dvije ima ista ekipa, onda ona ima ukupno ima dva ili tri poraza i šest ili sedam neriješenih ishoda, ovisno o rezultatu s A. Kako i ekipa s jednim od ta tri poraza ne može imati više od jednog dodatnog poraza s A, onda je $m = 6$ ili $m = 7$.

Ako ta tri poraza imaju tri različite ekipe, onda one imaju jedan ili dva poraza (ovisno o rezultatu s A), a kako ostale ekipe ne mogu imati više od jednog poraza (eventualno s A), onda je $m = 7$ ili $m = 8$.

Dakle, $m$ može biti 5, 6, 7 ili 8.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 24. – 26. travnja 2023.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** Dokaži da je zbroj $1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+4^{2023}+5^{2023}$ djeljiv s 5, ali nije s 10.

**Rješenje.**
Treba odrediti znamenku jedinica zbroja $1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+4^{2023}+5^{2023}$.

Kako je $1^{2023}=1$, onda je 1 znamenka jedinica prvog pribrojnika.

Potencije broja 2, $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64,\ ...$ završavaju redom znamenkama 2, 4, 8, 6, 2, 4, … Četiri znamenke, 2, 4, 8 i 6 se periodički ponavljaju, a kako je

2023 = 4 · 505 + 3, onda je 8 znamenka jedinica drugog pribrojnika, $2^{2023}$.

Potencije broja 3, $3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ 3^6=729,\ ...$ završavaju redom znamenkama 3, 9, 7, 1, 3, 9, … Četiri znamenke, 3, 9, 7 i 1 se periodički ponavljaju, a kako je

2023 = 4 · 505 + 3, onda je 7 znamenka jedinica trećeg pribrojnika, $3^{2023}$.

Potencije broja 4, $4^1=4,\ 4^2=16,\ 4^3=64,\ 4^4=256,\ ...$ završavaju redom znamenkama 4, 6, 4, … Dvije znamenke, 4 i 6 se periodički ponavljaju, a kako je 2023 = 2 · 1011 + 1, onda je 4 znamenka jedinica četvrtog pribrojnika, $4^{2023}$.

Potencije broja 5 završavaju znamenkom 5, pa je 5 znamenka jedinica petog pribrojnika, $5^{2023}$.

Zbrojimo li znamenke jedinica zadanih pribrojnika dobivamo 1 + 8 + 7 + 4 + 5 = 25. Dakle, znamenka jedinica zbroja $1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+4^{2023}+5^{2023}$ je 5.

To znači da je taj zbroj djeljiv brojem 5, ali nije djeljiv brojem 10 jer mu posljednja znamenka nije nula.

**2.** Zbroj uzastopnih prirodnih brojeva je 2023. Koliko pribrojnika može imati taj zbroj?

**Rješenje.**
Označimo s $n$ prvi, a s $n+m$ posljednji pribrojnik tog zbroja. Očito, taj zbroj ima $m+1$ pribrojnika.

$$n+(n+1)+(n+2)+...+(n+m)=2023$$
$$\underbrace{(n+n+...+n)}_{m+1}+(1+2+...+m)=2023$$
$$(m+1)n+(1+2+...+m)=2023$$

$(m+1)n+\frac{m(m+1)}{2}=2023$

$2(m+1)n+m(m+1)=4046$

$(m+1)(2n+m)=4046$

Odredimo proste faktore broje 4046.

$4046 = 2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17$

Kako su $m$ i $n$ prirodni brojevi, vrijedi:

$m + 1 \neq 1$

$2n + m \neq 1$

$2n + m > m + 1$

| $m+1$ | $2n + m$ | $m$ | $2n$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2023 | 1 | 2022 | 1011 |
| 7 | 578 | 6 | 572 | 286 |
| 17 | 238 | 16 | 222 | 111 |
| 14 | 289 | 13 | 276 | 138 |
| 34 | 119 | 33 | 86 | 43 |
| 119 | 34 | 118 | $-84 \notin \mathbb{N}$ | / |

Uočimo da nakon $m + 1 = 34$ vrijedi $2n + m < m + 1$.

Stoga nije ispunjen uvjet pa nema potrebe nastavljati niz. Zaključujemo da traženi zbroj može imati 2, 7, 14, 17 ili 34 pribrojnika.

**3.** Koje je godine rođena Lovrina teta koja je 1999. navršila onoliko godina koliki je dvostruki zbroj znamenki godine njezinog dvadesetog rođendana?

**Prvo rješenje.**

Neka je $\overline{19ab}$ godina tetinog rođenja.

1. *slučaj*: Teta je dvadeseti rođendan navršila u 20. stoljeću.

Tada je $\overline{19ab}+20=\overline{19(a+2)b}$ godina njezinog 20. rođendana pa iz uvjeta zadatka vrijedi:

$1999-\overline{19ab}=2\cdot(1+9+a+2+b)$

$1999-1900-\overline{ab}=2\cdot(12+a+b)$

$99-10a-b=24+2a+2b.$

Sada je $75 = 12a + 3b$ , odnosno $25 = 4a + b$.

Zbroj je neparan ako je jedan pribrojnik paran, a drugi neparan pa je $b$ neparan, tj.

$b\in\{1,3,5,7,9\}.$

Promotrimo sve mogućnosti pomoću tablice:

| $b$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $4a$ | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 |
| $a$ | 6 | $\notin \mathbb{N}$ | 5 | $\notin \mathbb{N}$ | 4 |

Godine tetinog rođenja mogu biti 1961., 1955. i 1949.

2. *slučaj*: Teta je dvadeseti rođendan navršila u 21. stoljeću.

U tom slučaju teta se rodila poslije 1979. pa je $a \in \{8, 9\}$.

- Ako je $a = 8$ onda je godina njezinog 20. rođendana veća ili jednaka 2000., a manja ili jednaka 2009. tj. $\overline{198b} + 20 = \overline{200b}$ je godina tetinog rođendana.
  Iz uvjeta zadatka vrijedi:
  $1999 - \overline{198b} = 2 \cdot (2 + 0 + 0 + b)$
  $19 - b = 4 + 2b$
  Sada je $3b = 15$, odnosno $b = 5$.
  Godina tetinog rođenja može biti 1985.
- Ako je $a = 9$ onda je godina njezinog 20. rođendana veća ili jednaka 2010., a manja ili jednaka 2019. tj. $\overline{199b} + 20 = \overline{201b}$ je godina tetinog rođendana.
  Iz uvjeta zadatka vrijedi:
  $1999 - \overline{199b} = 2 \cdot (2 + 0 + 1 + b)$
  $9 - b = 6 + 2b$
  Sada je $3b = 3$, odnosno $b = 1$.
  Godina tetinog rođenja može biti 1991.

Lovrina teta se mogla roditi 1949., 1955., 1961., 1985. ili 1991. godine.

**Drugo rješenje.**

Zbog uvjeta zadatka Lovrina teta rodila se prije 1999. godine pa je 20. rođendan proslavila prije 2019. godine.

Od svih prirodnih brojeva manjih od 2019, broj 1999 ima najveći zbroj znamenaka pa je dvostruki zbroj znamenaka najviše $2 \cdot (1 + 9 + 9 + 9) = 56$. Dakle, Lovrina se teta nije mogla roditi prije 1998 – 56 = 1942. godine.

Budući da u 1999. godini navršava paran broj godina (dvostruki zbroj znamenaka je paran broj) ona se rodila u neparnoj godini.

Godina njenog rođenja je oblika $\overline{19ab}$, $a \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Prikažimo tablicom sve mogućnosti.

| Godina rođenja | Starost 1999. godine | Godina kad navršava 20. rođendan | Dvostruki zbroj znamenaka godine kad navršava 20. rođendan |
|---|---|---|---|
| 1943. | 56 | 1963. | 38 |
| 1945. | 54 | 1965. | 42 |
| 1947. | 52 | 1967. | 46 |

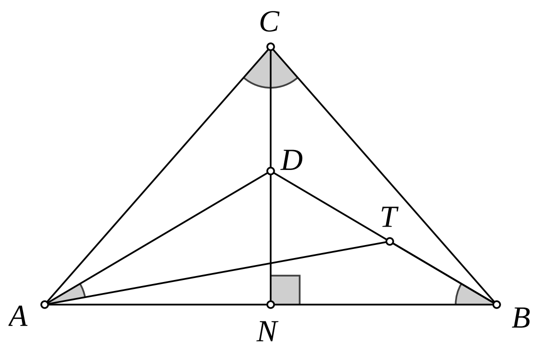
| | | | |
|---|---|---|---|
| **1949.** | **50** | **1969.** | **50** |
| 1951. | 48 | 1971. | 36 |
| 1953. | 46 | 1973. | 40 |
| **1955.** | **44** | **1975.** | **44** |
| 1957. | 42 | 1977. | 48 |
| 1959. | 40 | 1979. | 52 |
| **1961.** | **38** | **1981.** | **38** |
| 1963. | 36 | 1983. | 42 |
| 1965. | 34 | 1985. | 46 |
| 1967. | 32 | 1987. | 50 |
| 1969. | 30 | 1089. | 54 |
| 1971. | 28 | 1991. | 40 |
| 1973. | 26 | 1993. | 44 |
| 1975. | 24 | 1995. | 48 |
| 1977. | 22 | 1997. | 52 |
| 1979. | 20 | 1999. | 56 |
| 1981. | 18 | 2001. | 6 |
| 1983. | 16 | 2003. | 10 |
| **1985.** | **14** | **2005.** | **14** |
| 1987. | 12 | 2007. | 18 |
| 1089. | 10 | 2009. | 22 |
| **1991.** | **8** | **2011.** | **8** |
| 1993. | 6 | 2013. | 12 |
| 1995. | 4 | 2015. | 16 |
| 1997. | 2 | 2017. | 20 |

Lovrina teta se mogla roditi 1949., 1955., 1961., 1985. ili 1991. godine.

**4.** U jednakokračnom trokutu $ABC$ kut nasuprot osnovice $\overline{AB}$ je veličine 80°. Na visini na osnovicu tog trokuta odabrana je točka $D$ tako da je $|\angle DBA| = 30°$. Na dužini $\overline{BD}$ odabrana je točka $T$ tako da je $|\angle TAD| = 20°$. Odredi veličinu kuta $\angle TCA$.

**Rješenje.**

$\Delta ABC$ je jednakokračan, a $\angle ACB$ je kut nasuprot osnovice pa je $|\angle ACB| = 80°$.

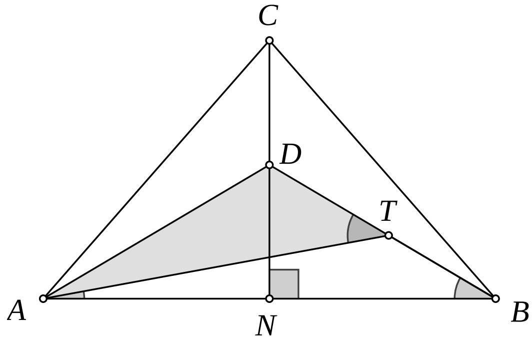



Kako je $|\angle ACB| = 80°$ kut nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta $ABC$, onda vrijedi: $|AC| = |BC|$ i veličine preostala dva kuta tog trokuta su $|\angle BAC| = |\angle CBA| = (180° - 80°) : 2 = 50°$.

Neka je točka $N$ nožište visine na osnovicu trokuta $ABC$.

Kako visina na osnovicu jednakokračnog trokuta raspolavlja osnovicu, pravac *NC* je simetrala osnovice trokuta *ABC* pa vrijedi $|AD|=|BD|$ što znači da je i trokut *ABD* jednakokračan. Zato je $|\angle BAD|=|\angle DBA|=30°$.

To znači da je $|\angle BDA|=180°-2\cdot 30°=120°$.




Promotrimo trokut *ATD*.

$|\angle DTA|=180°-(120°+20°)=40°$.

Odredimo veličinu kuta $\angle BAT$.

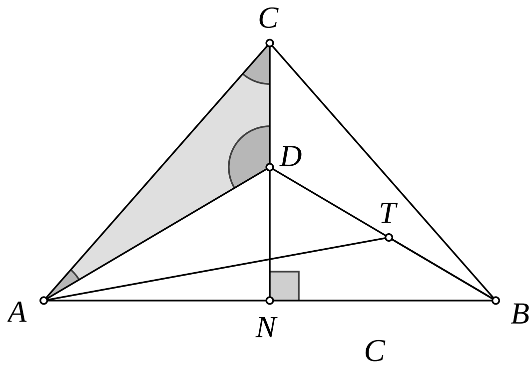
$|\angle BAT|=|\angle BAD|-|\angle TAD|$
$|\angle BAT|=30°-20°=10°$.

Odredimo sad kutove trokuta *ADC*.

Kako je *CN* simetrala osnovice jednakokračnog trokuta *ABC*, ona je ujedno i simetrala kuta nasuprot osnovici pa je $|\angle ACD|=80°:2=40°$.

$|\angle DAC|=|\angle BAC|-|\angle BAD|$
$|\angle DAC|=50°-30°=20°$.

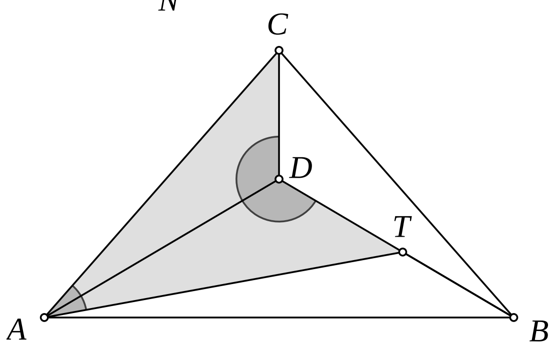
Sada je $|\angle CDA|=180°-(40°+20°)=120°$.

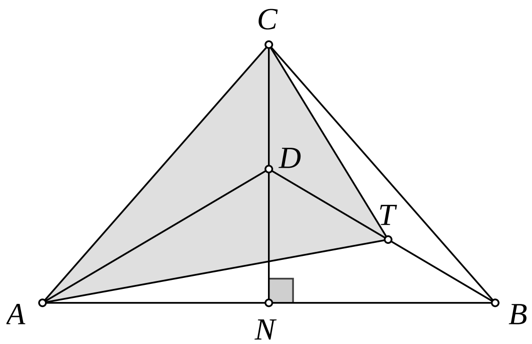



Vrijedi: $\Delta ATD\cong\Delta ADC$

jer imaju zajedničku stranicu $\overline{AD}$ i odgovarajuće sukladne kutove uz nju (poučak K-S-K).

Iz te sukladnosti slijedi $|AT|=|AC|$ pa je trokut *ATC* jednakokračan.



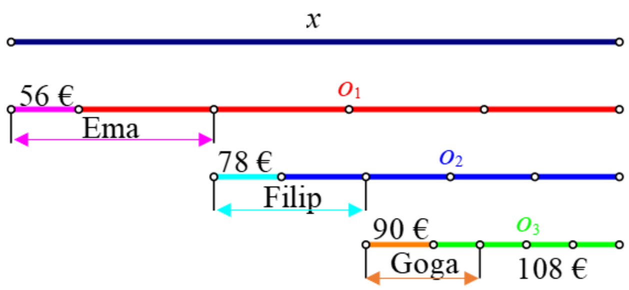




Kut nasuprot osnovice tog trokuta je $\angle TAC$ i vrijedi:

$|\angle TAC|=50-10°=40°$ pa je veličina traženog kuta $|\angle TCA|=(180°-40°):2=70°$.

**5.** Ema, Filip i Goga podijelili su određenu svotu novaca. Ema je dobila 56 € i četvrtinu ostatka novaca. Nakon toga Filip je od preostale svote dobio 78 € i četvrtinu novog ostatka. Na kraju je Goga od preostale svote dobila 90 € i četvrtinu novog ostatka. Kako Ema, Filip i Goga trebaju podijeliti preostalih 108 € da svatko od njih dobije jednaku svotu novaca?

**Prvo rješenje.**
Označimo s $x$ ukupnu svotu novca, $o_1$ prvi ostatak, $o_2$ drugi ostatak i $o_3$ treći ostatak.




Nakon što je **Goga** dobila svoj dio ostalo je $\frac{3}{4}$ trećeg ostatka, odnosno 108 €.

To znači da je treći ostatak 144 €.

Goga je dobila 90 € i još $\frac{1}{4}$ od 144 €, odnosno 90 + 36 = 126 €.

$\frac{3}{4}$ drugog ostatka je 90 + 144 = 234 €.

Nakon što je **Filip** dobio svoj dio ostalo je $\frac{3}{4}$ drugog ostatka, odnosno 234 €.

To znači da je drugi ostatak 312 €.

Filip je dobio 78 € i još $\frac{1}{4}$ od 312 €, odnosno 78 + 78 = 156 €.

$\frac{3}{4}$ prvog ostatka je 78 + 312 = 390 €.

Nakon što je **Ema** dobila svoj dio ostalo je $\frac{3}{4}$ prvog ostatka, odnosno 390 €.

To znači da je prvi ostatak 520 €.

Ema je dobila 56 € i još $\frac{1}{4}$ od 520 €, odnosno 56 + 130 = 186 €.

Početni iznos je bio 56 + 520 = 576 €.
Goga je dobila 126 €, Filip 156 €, Ema 186 €, a ostalo je 108 € .
Gogi nedostaje 186 – 126 = 60 € da bi imala koliko i Ema.
Filipu nedostaje 186 – 156 = 30 € da bi imao koliko i Ema.
Od ostalih 108 – 90 = 18 € svatko od njih treba dobiti 18 : 3 = 6 €.
To znači da će od preostalih 108 € Goga dobiti 66 €, Filip 36 €, a Ema 6 €.

**Drugo rješenje.**
Neka je $x$ svota novaca koju su podijelili Ema, Filip i Goga, a $e$ svota novaca koju je dobila Ema, $f$ svota novaca koju je dobio Filip i $g$ svota novaca koju je dobila Goga.

Ema je dobila:

$e = 56 + \frac{1}{4}(x - 56)$

$e = 56 + \frac{1}{4}x - 14$

$e = \frac{1}{4}x + 42.$

Nakon što je Ema dobila novce ostalo je:

$x - \left(42 + \frac{1}{4}x\right) =$

$x - 42 - \frac{1}{4}x =$

$\frac{3}{4}x - 42.$

Filip je dobio:

$f = 78 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}x - 42 - 78\right)$

$f = 78 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}x - 120\right)$

$f = 78 + \frac{3}{16}x - 30$

$f = \frac{3}{16}x + 48.$

Nakon što je Filip dobio novce ostalo je:

$\left(\frac{3}{4}x - 42\right) - \left(\frac{3}{16}x + 48\right) =$

$\frac{3}{4}x - 42 - \frac{3}{16}x - 48 =$

$\frac{9}{16}x - 90.$

Goga je dobila:

$g = 90 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{9}{16}x - 90 - 90\right)$

$g = 90 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{9}{16}x - 180\right)$

$g = 90 + \frac{9}{64}x - 45$

$g = \frac{9}{64}x + 45.$

Nakon što je Goga dobila novce ostalo je:

$\left(\frac{9}{16}x - 90\right) - \left(\frac{9}{64}x + 45\right) =$

$\frac{9}{16}x - 90 - \frac{9}{64}x - 45 =$

$\frac{27}{64}x - 135.$

Slijedi:

$\frac{27}{64}x - 135 = 108$

$\frac{27}{64}x = 108 + 135$

$\frac{27}{64}x = 243 \,/ : \frac{27}{64}$

$x = 576.$

Ema, Filip i Goga podijelili su 576 €.

Ema je dobila $\frac{1}{4} \cdot 576 + 42 = 186$ €.

Filip je dobio $\frac{3}{16} \cdot 576 + 48 = 156$ €.

Goga je dobila $\frac{9}{64} \cdot 576 + 45 = 126$ €.

Kako je 576 : 3 = 192, Ema treba dobiti još 192 € − 186 € = 6 €, Filip 192 € − 156 € = 36 €, a Goga 192 € − 126 € = 66 €.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 24. – 26. travnja 2023.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** Odredi sve uređene parove $(a, b)$ cijelih brojeva za koje je $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$.

**Prvo rješenje.**
Brojevi $a$ i $b$ su nazivnici razlomaka pa mora biti $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i $a \neq 0$, $b \neq 0$. Vrijedi

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{5}$$

$$ab = 5b - 5a$$

$$ab + 5a = 5b$$

$$a(b+5) = 5b$$

$$a = \frac{5b + 25 - 25}{b+5}$$

$$a = 5 - \frac{25}{b+5}$$

Kako bi $a$ bio cijeli broj, nazivnik $b + 5$ razlomka mora biti djelitelj brojnika $25$. Zato je

$$b + 5 \in \{-1, 1, -5, 5, -25, 25\}$$

$$b \in \{-6, -4, -10, 0, -30, 20\}$$

Kako je $b \neq 0$,

$$b \in \{-6, -4, -10, -30, 20\}.$$

| $b$ | $-6$ | $-4$ | $-10$ | $-30$ | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $30$ | $-20$ | $10$ | $6$ | $4$ |

Traženi uređeni parovi su $(30, -6)$, $(-20, -4)$, $(10, -10)$, $(6, -30)$ i $(4, 20)$.

**Napomena.** Analogno možemo izraziti

$$b = -5 - \frac{25}{a-5}$$

Kako je $a \neq 0$, dobivamo

$$a \in \{4, 6, 10, -20, 30\}.$$

Dobivamo iste parove kao rješenje.

**Drugo rješenje.**

Brojevi $a$ i $b$ su nazivnici razlomaka pa mora biti $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{5}$$

$$ab = 5b - 5a$$

$$25 = 25 + 5b - 5a - ab$$

$$25 = 5(5 + b) - a(5 + b)$$

$$25 = (5 - a)(5 + b)$$

Imamo sljedećih šest mogućnosti

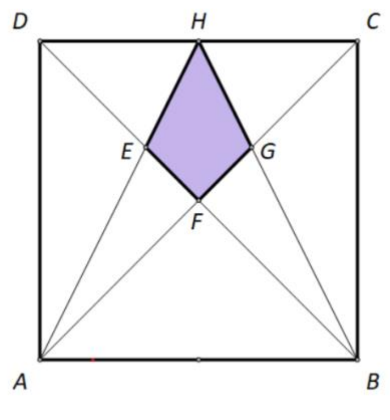
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $5 + b$ | $-1$ | $1$ | $-5$ | $5$ | $-25$ | $25$ |
| $5 - a$ | $-25$ | $25$ | $-5$ | $5$ | $-1$ | $1$ |

Kako je $a \neq 0$ i $b \neq 0$, imamo samo sljedeće mogućnosti

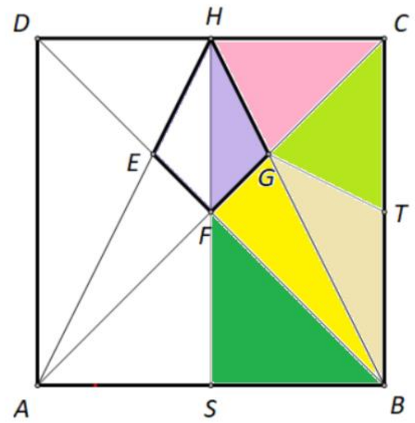
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | $-6$ | $-4$ | $-10$ | $-30$ | $20$ |
| $a$ | $30$ | $-20$ | $10$ | $6$ | $4$ |

Traženi uređeni parovi su $(30, -6)$, $(-20, -4)$, $(10, -10)$, $(6, -30)$ i $(4, 20)$.

**2.** Neka je $H$ je polovište stranice $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ površine $36\ \text{cm}^2$. Točka $F$ je sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, točka $E$ je sjecište dužina $\overline{AH}$ i $\overline{BD}$, a točka $G$ je sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BH}$. Odredi površinu četverokuta $EFGH$.



**Prvo rješenje.**




Označimo s $T$ polovište stranice $\overline{BC}$ i nacrtajmo dužinu $\overline{GT}$.

$|HC| = |TC|$ jer su $H$ i $T$ polovišta stranica kvadrata

$\overline{GC}$ je zajednička stranica

$|\measuredangle HCG| = |\measuredangle GCT| = 45°$ (dijagonala kvadrata pripada simetrali pravoga kuta)

Trokut $HGC$ i trokut $TCG$ sukladni su prema SKS poučku o sukladnosti trokuta.

Tada su i njihove površine jednake, tj. vrijedi $P_{\Delta HGC} = P_{\Delta TCG}$

Trokut $BTG$ i trokut $TCG$ imaju sukladne osnovice, $|BT| = |TC|$, i zajedničku visinu iz vrha $G$ pa su im jednake površine:

$$P_{\Delta BTG} = P_{\Delta TCG}$$

Površina trokuta $HBC$ je 9 cm$^2$ (četvrtina površine kvadrata) i jednaka je zbroju površina trokuta $BTG$, $TCG$ i $HGC$. Vrijedi

$$P_{\Delta BTG} + P_{\Delta TCG} + P_{\Delta HGC} = 9 \text{ cm}^2.$$

Stoga je površina svakog od trokuta $BTG$, $TCG$ i $HGC$ jednaka 3 cm$^2$, tj. vrijedi

$$P_{\Delta BTG} = P_{\Delta TCG} = P_{\Delta HGC} = 3 \text{ cm}^2.$$

Površina trokuta $HFC$ je 4.5 $cm^2$ jer je taj trokut osmina čitavog kvadrata.

Stoga površina trokuta $HGF$ iznosi

$$P_{\Delta HGF} = P_{\Delta HFC} - P_{\Delta HGC} = 4.5 - 3 = 1.5 \text{ cm}^2.$$

Pravac $HF$ je os simetrije kvadrata $ABCD$ pa je površina četverokuta $EFGH$

$$P_{EFGH} = 2 \cdot 1.5 = 3 \text{ cm}^2.$$

**Napomena.** Postoje i mnogi drugi načini da se kvadrat podijeli na manje trokute.

Površina trokuta $BCF$ je 9 $cm^2$ (četvrtina površine kvadrata), pa je

$$P_{\Delta BGF} = P_{\Delta BCF} - P_{\Delta BTG} - P_{\Delta TCG} = 3 \text{ cm}^2.$$

Neka je $S$ polovište stranice $\overline{AB}$. Površina trokuta $SBH$ je 9 $cm^2$ (četvrtina površine kvadrata).

Površina trokuta $SBF$ je 4.5 $cm^2$ (osmina površine kvadrata), pa je površina trokuta $FGH$ je

$$P_{\Delta FGH} = P_{\Delta SBH} - P_{\Delta BGF} - P_{\Delta SBF}$$

$$P_{\Delta FGH} = 9 - 3 - 4.5 = 1.5 \text{ cm}^2$$

**Drugo rješenje.**
Promotrimo trokut $ACD$.
Točka $H$ polovište je stranice $\overline{DC}$, a točka $F$ sjecište je dijagonala kvadrata pa je ujedno i polovište stranice $\overline{AC}$. Dakle, dužine $\overline{AH}$ i $\overline{DF}$ težišnice su toga trokuta i sijeku se u točki $E$. Zaključujemo da je točka $E$ težište trokuta $ACD$.

Težište dijeli težišnicu $\overline{AH}$ u omjeru $2 : 1$. Neka je $|AE| = 2x$, a $|EH| = x$.

Neka je $v$ duljina visine iz vrha $D$ trokuta $AHD$ na stranicu $\overline{AH}$.

Uočimo da je tada $v$ i duljina visine trokuta $AED$ i trokuta $EHD$.

Tada površina trokuta $AED$ je

$$P_{\Delta AED} = \frac{2x \cdot v}{2} = x \cdot v.$$

Površina trokuta $EHD$ je

$$P_{\Delta EHD} = \frac{x \cdot v}{2}.$$

Dakle, $P_{\Delta AED} = 2P_{\Delta EHD}$.

Površina trokuta $AHD$ je 9 $\text{cm}^2$ (četvrtina površine kvadrata $ABCD$).

Površina trokuta $AHD$ zbroj je površina trokuta $AED$ i $EHD$:

$$P_{\Delta AED} + P_{\Delta EHD} = P_{\Delta AHD}$$

$$2P_{\Delta EHD} + P_{\Delta EHD} = 9 \text{ cm}^2$$

$$3P_{\Delta EHD} = 9 \text{ cm}^2$$

$$P_{\Delta EHD} = 3 \text{ cm}^2$$

Pravac $HF$ je os simetrije kvadrata $ABCD$, te su trokuti $EHD$ i $GCH$ međusobno osnosimetrični obzirom na taj pravac i zato sukladni. Njihove su površine tada jednake, to jest

$$P_{\Delta EHD} = P_{\Delta GCH} = 3 \text{ cm}^2.$$

Promotrimo trokut $FCD$. Njegova je površina 9 $\text{cm}^2$ (četvrtina površine kvadrata $ABCD$).

Površina trokuta $FCD$ jednaka je zbroju površina trokuta $EHD$, četverokuta $EFGH$ i površini trokuta $GCH$, to jest vrijedi:

$$P_{\Delta EHD} + P_{EFGH} + P_{\Delta GCH} = P_{\Delta FCD}$$

$$3 \text{ cm}^2 + P_{EFGH} + 3 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$$

$$P_{EFGH} = 3 \text{ cm}^2$$

**3.** Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva $n$ kojima je zbroj količnika i ostatka pri dijeljenju sa 100 djeljiv s 11?

**Prvo rješenje.**
Pri dijeljenju peteroznamenkastog broja $n$ sa $100$, prve tri znamenke broja $n$ čine količnik $a$, a posljednje dvije ostatak $b$. Tada je $100 \leq a \leq 999$ i $0 \leq b \leq 99$

Brojeva $a$ ima $999 - 99 = 900$, tj. broj $a$ se može odabrati na $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ načina.

Za svaku mogućnost za broj $a$, promatramo i prebrojavamo mogućnosti za broj $b$.

| $a$ | $b$ | |
|---|---|---|
| $100$ | $10, 21, \dots, 98$ | 9 načina |
| ... | | … |
| $109$ | $1, 12, \dots, 89$ | 9 načina |
| $110$ | $0, 11, 22, \dots, 99$ | 10 načina |
| $111$ | $10, 21, \dots, 98$ | 9 načina |
| ... | | … |
| $120$ | $1, 12, \dots, 89$ | 9 načina |
| $121$ | $0, 11, 22, \dots, 99$ | 10 načina |
| | … | |

Kako bi zbroj $a + b$ bio djeljiv s $11$, za svaki od $900$ odabira broja $a$, broj $b$ može se odabrati na barem onoliko načina koliki je nepotpuni količnik brojeva $100$ i $11$, to jest na $9$ načina.

Kada je $a \in \{110, 121, 132, \dots, 990\}$, tj. kada je $a$ djeljiv s $11$, broj $b$ se može odabrati na još jedan, deseti način.

Brojeva $a$ koji pripadaju skupu $\{110, 121, 132, \dots, 990\}$ ima onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva $900$ i $11$, to jest $81$.

Traženih brojeva $n$ ima
$$900 \cdot 9 + 81 = 8100 + 81 = 8181.$$

**Drugo rješenje.**
Prema uvjetu zadatka je
$$n = 100 \cdot a + b$$

Umnožak $99 \cdot a$ je djeljiv s $11$ jer je faktor $99$ djeljiv s $11$ (djeljivost umnoška).

Pribrojnici $99a$ i $a + b$ su djeljivi s $11$, pa je i zbroj
$$99a + a + b = 100a + b$$
djeljiv s $11$.

Kako je $100a + b = n$, trebamo odrediti koliko je peteroznamenkastih brojeva $n$ koji su djeljivi s $11$.

Peteroznamenkastih brojeva $n$ ima $99\,999 - 9\,999 = 90\,000$ tj. broj $n$ može se odabrati na
$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000 \text{ načina.}$$

Brojeva $n$ s traženim svojstvom ima onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva $90000$ i $11$, tj. $8181$.

**4.** Humanitarno je društvo od prodaje 150 karata za dobrotvornu predstavu zaradilo 2023 €. Više od 100 karata prodano je po punoj cijeni, koja ima cjelobrojni iznos. Preostale su karte prodane „u pola cijene“. Kolika je zarada od karata prodanih po punoj cijeni?

**Rješenje.**
Neka je $x$ cijena karte koja je prodana po punoj cijeni, $x \in \mathbb{N}$.

Tada je $\frac{x}{2}$ cijena karte koja je prodana „u pola cijene“.

Neka je $y$ broj karata koje su prodane po punoj cijeni.

Tada je $150 - y$ broj karata koje su prodane „u pola cijene“.

Zarada od prodaje karata je, tada:

$$x \cdot y + \frac{x}{2} \cdot (150 - y) = 2023.$$

Slijedi

$$x \cdot y + 75x - \frac{x}{2} \cdot y = 2023$$

$$2xy + 150x - xy = 4046$$

$$xy + 150x = 4046$$

$$x \cdot (y + 150) = 4046$$

Broj karata prodanih po punoj cijeni je veći od 100 i manji od 150,

$$100 < y < 150,$$

pa je

$$250 < y + 150 < 300.$$

Kako je $x \in \mathbb{N}$, slijedi da je $y + 150$ djelitelj broja 4046, a kako je rastav broja 4046 na proste faktore $4046 = 2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17$, jedina mogućnost je $y + 150 = 289$, tj. $y = 139$

Tada je $x = 4046 : 289 = 14$.
Zarada od karata koje su prodane po punoj cijeni je $14 \cdot 139 = 1946$ €

Napomena. Iz jednadžbe

$$x \cdot (y + 150) = 4046$$

moguće je odrediti rješenje provjerom svih slučajeva

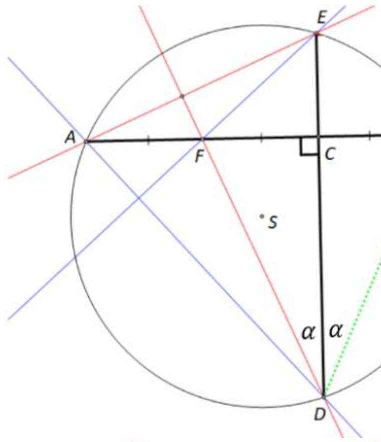
$$x \in \{1, 2, 7, 14, 17, 34, 119, 238, 289, 578, 2023, 4046\}.$$

**5.** Na tetivi $\overline{AB}$ kružnice $k$ nalazi se točka $C$ tako da je $|AC| = 2 \cdot |CB|$. Tetiva $\overline{DE}$ kružnice $k$ okomita je na tetivu $\overline{AB}$ i siječe ju u točki $C$. Ako je $F$ polovište dužine $\overline{AC}$, dokaži da je

$$DF \perp AE \text{ i } EF \perp AD.$$

**Rješenje.**

**I. Dokažimo da je $DF \perp AE$**

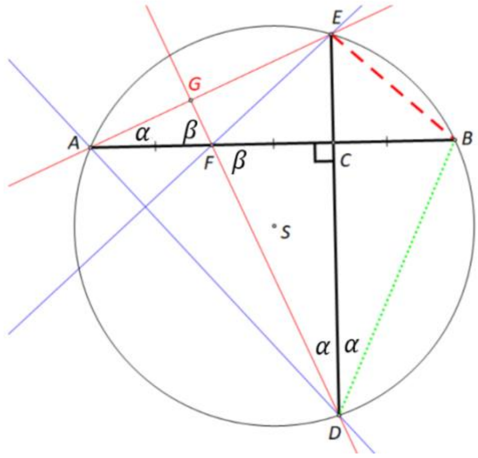



Promotrimo trokute $\Delta DBC$ i $\Delta DCF$:

- stranica $\overline{DC}$ im je zajednička
- $|CB| = |FC|$
- $|\measuredangle DCB| = |\measuredangle FCD| = 90°$

Prema SKS poučku trokuti su sukladni, $\Delta DBC \cong \Delta DFC$.
Tada je i $|\measuredangle BDC| = |\measuredangle CDF| = \alpha$.

Neka je točka $G$ sjecište pravaca $DF$ i $AE$.
Promotrimo trokute $\Delta GAF$ i $\Delta CFD$:




- $|\measuredangle FAG| = |\measuredangle BDC| = \alpha$ jer su to dva obodna kuta nad tetivom $\overline{BE}$ pa je i $|\measuredangle FAG| = |\measuredangle CFD| = \alpha$
- $|\measuredangle GFA| = |\measuredangle DFC| = \beta$ jer su to vršni kutovi

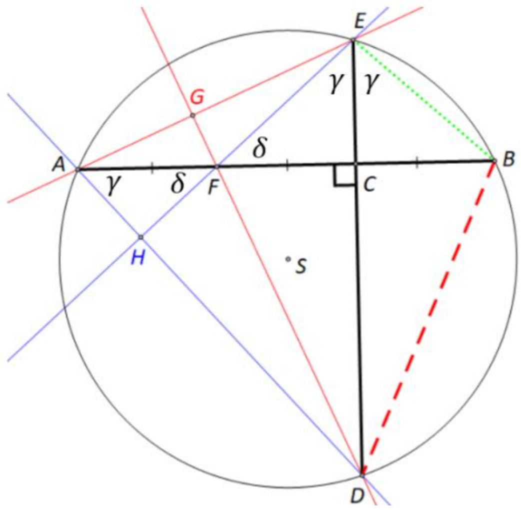
Trokuti $\Delta GAF$ i $\Delta CFD$ imaju dva kuta jednake veličine pa je i

$|\measuredangle AGF| = |\measuredangle FCD| = 90°$,

odnosno $DF \perp AE$, što je i trebalo dokazati.

**II. Dokažimo da je $EF \perp AD$**

Dokaz provodimo analognim razmišljanjem kao i za dokaz da je $DF \perp AE$.




Promotrimo trokute $\Delta FCE$ i $\Delta CBE$: stranica $\overline{CE}$ im je zajednička, $|CB| = |FC|$ i $|\measuredangle ECF| = |\measuredangle BCE| = 90°$.
Prema SKS poučku trokuti su sukladni, $\Delta FCE \cong \Delta CBE$.
Tada je i $|\measuredangle CEB| = |\measuredangle FEC| = \gamma$.

Neka je točka $H$ sjecište pravaca $EF$ i $AD$.
Promotrimo trokute $\Delta AHF$ i $\Delta FCE$:

- $|\measuredangle HAF| = |\measuredangle DEB| = \gamma$ jer su to dva obodna kuta nad tetivom $\overline{DB}$ pa je i $|\measuredangle HAF| = |\measuredangle FEC| = \gamma$
- $|\measuredangle AFH| = |\measuredangle CFE| = \delta$ jer su to vršni kutovi

Trokuti $\Delta AHF$ i $\Delta FCE$ imaju dva kuta jednake veličine pa je i

$|\measuredangle FHA| = |\measuredangle ECF| = 90°$,

odnosno $EF \perp AD$, što je i trebalo dokazati.

**Napomena:** Drugi dio dokaza može se provesti, koristeći dokazano u prvom dijelu, pomoću ortocentra. Promotrimo $\Delta ADE$. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{DG}$ su visine tog trokuta i sijeku se u točki $F$ (ortocentru). I visina iz vrha $E$ mora prolaziti ortocentrom $F$. Stoga je $EF \perp AD$, što je i trebalo dokazati.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 24. – 26. travnja 2023.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**6.** Na raspolaganju imamo dvije legure bakra i cinka. Omjer mase bakra i cinka u jednoj je leguri $5:2$, a u drugoj $3:4$. Koliko kilograma od svake legure valja uzeti kako bismo načinili $35$ kg nove legure s jednakom količinom bakra i cinka u njoj?

**Prvo rješenje.**
Neka je $x$ kg masa prve legure koju treba uzeti i neka je $y$ kg masa druge legure koju treba uzeti. Tada je $x+y=35$.

Kako je omjer bakra i cinka u prvoj leguri $5:2$, znači da $x$ kg legure sadrži $7$ jednakih dijelova, pri čemu $5$ takvih jednakih dijelova čini bakar, a $2$ takva jednaka dijela čini cink.

Zato $x$ kg prve legure sadrži $\frac{5}{7}x$ kg bakra i $\frac{2}{7}x$ kg cinka.

Analogno, zbog omjera $3:4$ u drugoj leguri zaključujemo da $y$ kg legure sadrži $7$ jednakih dijelova, pri čemu $3$ takvih jednakih dijelova čini bakar, a $4$ takva jednaka dijela čini cink.

To znači da $y$ kg druge legure sadrži $\frac{3}{7}y$ kg bakra i $\frac{4}{7}y$ kg cinka.

Kako u novoj leguri mora biti jednaka količina bakra i cinka, vrijedi jednakost

$$\frac{5}{7}x+\frac{3}{7}y=\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}y.$$

Množenjem sa 7 dobivamo:

$$5x+3y=2x+4y$$

$$5x-2x=4y-3y$$

$$3x=y$$

Zamjenom vrijednosti za $y$ u jednakost $x+y=35$ dobivamo redom jednakosti:

$$x+3x=35$$

$$4x=35$$

$$x=35:4=8.75,$$

pa zbog $3x=y$ slijedi da je $y=3\cdot 8.75=26.25$.

Prema tome, valja uzeti $8.75$ kg prve legure i $26.25$ kg druge legure kako bismo dobili $35$ kg nove legure u kojoj će biti jednaka količina bakra i cinka.

**Drugo rješenje.**
Neka je $x$ kg masa prve legure koju treba uzeti. Tada je $(35 - x)$ kg masa druge legure koju treba uzeti.

Kako je omjer bakra i cinka u prvoj leguri $5 : 2$, znači da $x$ kg legure sadrži 7 jednakih dijelova, pri čemu 5 takvih jednakih dijelova čini bakar, a 2 takva jednaka dijela čini cink.

Zato $x$ kg prve legure sadrži $\frac{5}{7}x$ kg bakra i $\frac{2}{7}x$ kg cinka.

Analogno, zbog omjera $3 : 4$ u drugoj leguri zaključujemo da $(35 - x)$ kg legure sadrži 7 jednakih dijelova, pri čemu 3 takvih jednakih dijelova čini bakar, a 4 takva jednaka dijela čini cink.

To znači da $(35 - x)$ kg druge legure sadrži $\frac{3}{7}(35 - x)$ kg bakra i $\frac{4}{7}(35 - x)$ kg cinka.

Kako u novoj leguri mora biti jednaka količina bakra i cinka, vrijedi jednakost

$\frac{5}{7}x + \frac{3}{7}(35 - x) = \frac{35}{2}$ za bakar ili $\frac{2}{7}x + \frac{4}{7}(35 - x) = \frac{35}{2}$ za cink.

Množenjem s 14 dobivamo:

| | |
|---|---|
| $10x + 6(35 - x) = 245$ | $4x + 8(35 - x) = 245$ |
| $10x - 6x = 245 - 210$ | $4x - 8x = 245 - 280$ |
| $4x = 35$ | $-4x = -35$ |
| $x = 8.75$ | $x = 8.75$ |

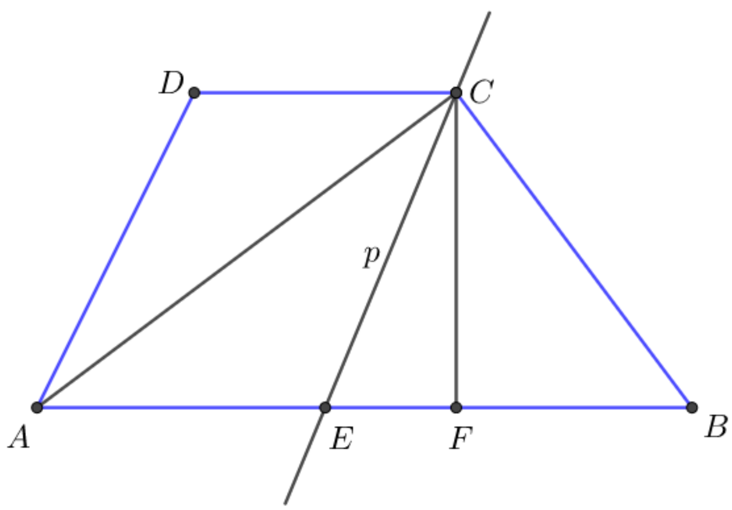
Izračunamo masu druge legure:

$35 - x = 35 - 8.75 = 26.25$

Prema tome, valja uzeti 8.75 kg prve legure i 26.25 kg druge legure kako bismo dobili 35 kg nove legure u kojoj će biti jednaka količina bakra i cinka.

**7.** Četverokut $ABCD$ ima paralelne stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ i vrijedi $|AB| = 25$ cm, $|CD| = 11$ cm, $|BC| = 15$ cm i $|AD| = 13$ cm. Dokaži da je $|\angle ACB| = 90°$.

**Prvo rješenje.**
Skica:



Vrhom $C$ nacrtamo pravac $p$ tako da je $p \parallel AD$.

Neka je točka $E$ presjek pravca $p$ i stranice $\overline{AB}$.

Četverokut $AECD$ je paralelogram, pa slijedi da je $|CE| = |AD| = 13$ cm, $|AE| = |CD| = 11$ cm i $|EB| = 25 - 11 = 14$ cm.

Zbog $15^2 < 13^2 + 14^2$, trokut $EBC$ je šiljastokutan.

Neka je točka $F$ nožište visine iz vrha $C$ na stranicu $\overline{AB}$ trokuta $ABC$.

Neka je $|EF| = x$ i $|CF| = v$. Tada je $|FB| = 14 - x$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut $EFC$ i na pravokutni trokut $FBC$ dobivamo ove dvije jednakosti:

$v^2 = 13^2 - x^2$

$v^2 = 15^2 - (14 - x)^2$

Zbog jednakosti lijevih strana nužno slijedi jednakost desnih strana pa imamo redom:

$15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$

$225 - (196 - 28x + x^2) = 169 - x^2$

$29 + 28x - x^2 = 169 - x^2$

$28x = 140$

$x = 5$ cm

Iz jednakosti $v^2 = 13^2 - x^2$ dobivamo da je $v = 12$ cm.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut $AFC$ dobivamo $|AC|^2 = v^2 + |AF|^2$.

Kako je $|AF| = |AE| + |EF|$, slijedi da je $|AF| = 11 + 5 = 16$ cm.

Zbog toga je $|AC|^2 = 12^2 + 16^2$, tj. $|AC| = 20$ cm.

Primijenimo obrat Pitagorina poučka na trokut $ABC$:

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

$25^2 = 20^2 + 15^2$

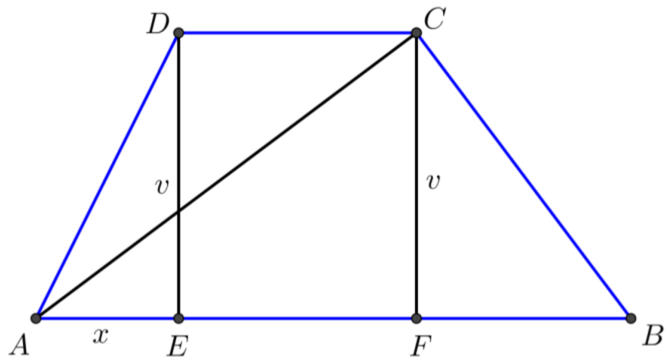
$625 = 400 + 225$

$625 = 625$

Zaključujemo da je trokut $ABC$ pravokutan s pravim kutom nasuprot stranici $\overline{AB}$, a to znači da je $|\angle ACB| = 90°$.

**Drugo rješenje.**

Skica:




Iz točke $C$ nacrtamo okomicu $\overline{CF}$ na dužinu $\overline{AB}$, a iz točke $D$ nacrtamo okomicu $\overline{DE}$ na dužinu $\overline{AB}$. Četverokut $EFCD$ je pravokutnik, pa slijedi da je $|EF| = |CD| = 11$ cm.

Neka je $|AE| = x$ i $|CF| = |DE| = v$. Tada je $|FB| = 25 - x - 11 = 14 - x$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut $AED$ i na pravokutni trokut $FBC$ dobivamo ove dvije jednakosti:

$v^2 = 13^2 - x^2$

$v^2 = 15^2 - (14 - x)^2$

Zbog jednakosti lijevih strana nužno slijedi jednakost desnih strana pa imamo redom:

$15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$

$225 - (196 - 28x + x^2) = 169 - x^2$

$29 + 28x - x^2 = 169 - x^2$

$28x = 140$

$x = 5$ cm

Iz jednakosti $v^2 = 13^2 - x^2$ dobivamo da je $v = 12$ cm.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut $AFC$ dobivamo $|AC|^2 = v^2 + |AF|^2$.

Kako je $|AF| = |AE| + |EF|$, slijedi da je $|AF| = 11 + 5 = 16$ cm.

Zbog toga je $|AC|^2 = 12^2 + 16^2$, tj. $|AC| = 20$ cm.

Primijenimo obrat Pitagorina poučka na trokut $ABC$:

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

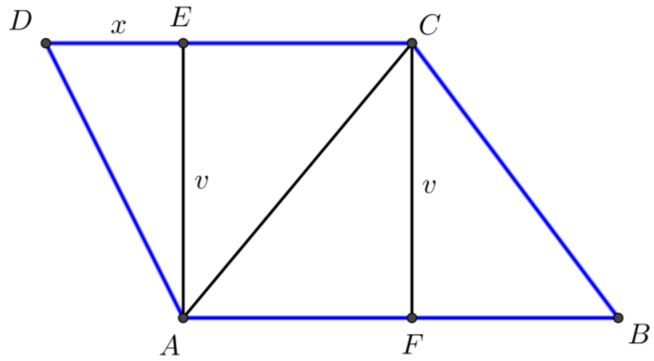
$25^2 = 20^2 + 15^2$

$625 = 400 + 225$

$625 = 625$

Zaključujemo da je trokut $ABC$ pravokutan s pravim kutom nasuprot stranici $\overline{AB}$, a to znači da je $|\angle ACB| = 90°$.

Razmotrimo i mogućnost da su nasuprotni kutovi četverokuta tupi. Uzimajući u obzir zadane duljine stranica četverokuta, to je moguće jedino ako su tupi kutovi pri vrhovima $A$ i $C$. U ovom slučaju bi iz točke $A$ nacrtali okomicu $\overline{AE}$ na stranicu $\overline{CD}$ i skica bi izgledala ovako:




Četverokut $AFCE$ je pravokutnik.

Iz $|EC| = 11 - x$ slijedi $|FB| = 25 - (11 - x) = 14 + x$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut $AED$ i na pravokutni trokut $FBC$ dobivamo jednakosti:

$v^2 = 13^2 - x^2$

$v^2 = 15^2 - (14 + x)^2$

Zbog jednakosti lijevih strana nužno slijedi jednakost desnih strana pa imamo redom:

$15^2 - (14 + x)^2 = 13^2 - x^2$

$225 - (196 + 28x + x^2) = 169 - x^2$

$29 - 28x - x^2 = 169 - x^2$

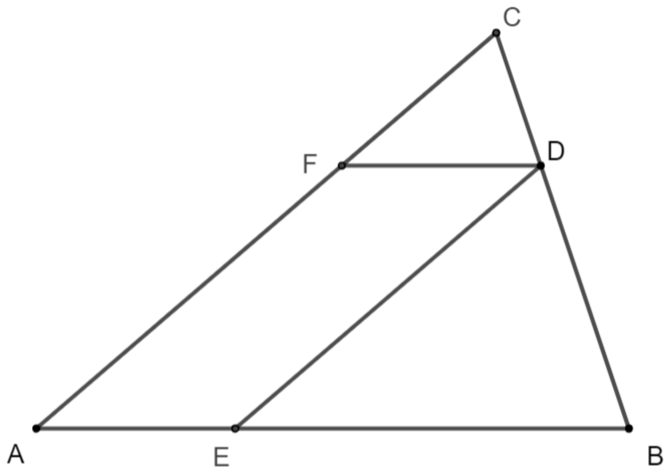
$-28x = 140$

$x = -5$

Budući da duljina stranice ne može biti negativna, zaključujemo da je ovaj slučaj nemoguć.

**8.** Površina trokuta $\Delta ABC$ je $27$. Na stranici $\overline{BC}$ izabrana je točka $D$ kojom prolaze pravci paralelni sa stranicom $\overline{AB}$ i stranicom $\overline{AC}$. Stranicu $\overline{AB}$ pravac siječe u točki $E$, stranicu $\overline{AC}$ u točki $F$, a razlika površina trokuta $\Delta EBD$ i $\Delta FDC$ je 9. Izračunaj površine trokuta $\Delta EBD$ i $\Delta FDC$.

**Rješenje.**
Skica:




Budući da stranice leže na paralelnim pravcima, $\Delta ABC$, $\Delta FDC$ i $\Delta EBD$ su međusobno slični.

Označimo površine trokuta $\Delta EBD$, $\Delta FDC$ i $\Delta ABC$ redom $P_1$, $P_2$ i $P_3$, a duljine stranica $\overline{EB}$, $\overline{FD}$ i $\overline{AB}$ redom $a_1$, $a_2$ i $a_3$.

Zbog sličnosti trokuta postoje koeficijenti sličnosti $k_1$ i $k_2$ takvi da je $a_1 = k_1 a_3$ i $a_2 = k_2 a_3$.

Kako je $a_1 + a_2 = a_3$, slijedi da je $k_1 a_3 + k_2 a_3 = a_3$, tj. $k_1 + k_2 = 1$. (1)

Zbog sličnosti trokuta također vrijedi $P_1 = {k_1}^2 P_3$ i $P_2 = {k_2}^2 P_3$.

Kako je $P_3 = 27$ i razlika površina $\Delta EBD$ i $\Delta FDC$ iznosi 9, slijedi

${k_1}^2 \cdot 27 - {k_2}^2 \cdot 27 = 9$, tj. ${k_1}^2 - {k_2}^2 = \frac{1}{3}$. (2)

Rastavimo razliku kvadrata na faktore:

$$(k_1 + k_2)(k_1 - k_2) = \frac{1}{3}.$$

Kako je prema (1) $k_1 + k_2 = 1$, zaključujemo da je $k_1 - k_2 = \frac{1}{3}$.

Rješavanjem sustava

$$k_1 + k_2 = 1$$
$$k_1 - k_2 = \frac{1}{3}$$

dobivamo da je $2k_1 = \frac{4}{3}$, tj. $k_1 = \frac{2}{3}$, $k_2 = \frac{1}{3}$.

Površina $\Delta EBD$ je $P_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 27 = \frac{4}{9} \cdot 27 = 12$.

Površina $\Delta FDC$ je $P_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 27 = \frac{1}{9} \cdot 27 = 3$.

**9.** Odredi sve prirodne brojeve $k$ koji se mogu prikazati kao razlika kvadrata dva prirodna broja.

**Rješenje.**
Ako je $k = 2l + 1$, gdje je $l$ prirodan broj, tada imamo

$$k = 2l + 1 = (l + 1)^2 - l^2.$$

Ako je $k = 4l$, gdje je $l \geq 2$ prirodan broj, tada imamo

$$k = 4l = (l + 1)^2 - (l - 1)^2.$$

Iz rastava $k = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$, slijedi da ne može biti $k = 1$, jer bi tada oba broja $m + n$ i $m - n$ trebala biti jednaka 1, što je nemoguće, a također niti $k = 4$, jer bi tada oba broja $m + n$ i $m - n$ trebala biti jednaka 2, s obzirom da su $m + n$ i $m - n$ iste parnosti.

Pretpostavimo da prirodan broj $k = 4l - 2 = 2(2l - 1)$, gdje je $l$ prirodan broj, možemo prikazati kao razliku kvadrata, tj.

$$k = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n).$$

To bi značilo da je točno jedan od brojeva $m + n$ i $m - n$ paran, što je nemoguće, jer su oni uvijek iste parnosti.

Dakle, svi prirodni brojevi koji se mogu prikazati kao razlika kvadrata su oblika $k = 2l + 1$, gdje je $l$ prirodan broj i $k = 4l$, gdje je $l \geq 2$ prirodan broj.

**10.** Koliko ima djelitelja broja $30^{30}$ koji završavaju s točno 15 nula?

**Rješenje.**
Djelitelji broja $30^{30}$ s oblika $2^a 3^b 5^c$ pri čemu su $a, b, c = 0, 1, 2, \dots, 30$.

Da bi takav djelitelj završio s točno 15 nula, oba broja $a$ i $c$ moraju biti jednaka 15 ili jedan od njih mora biti jednak 15, a drugi mora biti veći od 15.

U slučaju kad su oba broja $a$ i $c$ jednaki 15, takvih djelitelja ima 31. (za $b = 0, 1, 2, \dots, 30.$)

U slučaju kad je $a = 15$ i $c > 15$, takvih djelitelja ima $31 \cdot 15$, a jednako toliko ih ima u slučaju kad je $c = 15$ i $a > 15$.

Ukupan broj djelitelja broja $30^{30}$ s traženim svojstvom je

$$31 \cdot (15 + 15 + 1) = 31^2 = 961.$$