Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

25. travnja 2023.

1. Odredite sve realne brojeve $p \neq 2$ takve da za rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x + py = 3 \\ px + 4y = 6 \end{cases}$$

vrijedi $y - x < p$.

2. Riješite jednadžbu

$$||x - 2023| + 2022x| = |2022 - |2023 - x|| \,.$$

3. Vrhovima kvadrata $ABCD$, Matko je pridružio različite prirodne brojeve manje od 16 tako da pri odabiru bilo koja tri vrha kvadrata, aritmetička sredina njima pridruženih brojeva bude cijeli broj. Na koliko je različitih načina Matko mogao numerirati vrhove kvadrata?

4. Kut $\sphericalangle CBA$ trokuta ABC je dvostruko veći od kuta $\sphericalangle BAC$. Ako je $|BC| : |AB| = 4 : 5$ i $|AC| = 18$, odredite opseg i površinu trokuta ABC.

5. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(mn - 3)^2 = m^2 + n^2 - 4mn.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

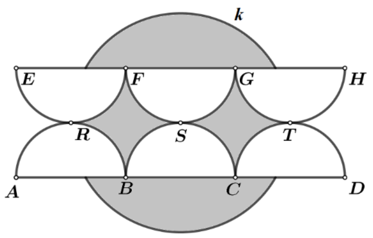
25. travnja 2023.

1. Izračunajte koliko je $\left(\dfrac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\dfrac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2$.

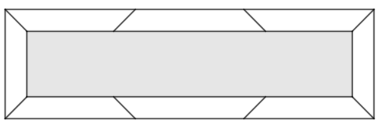
2. Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da rješenja jednadžbe $a(x^2-1)+4x=5$ budu različiti realni brojevi veći od 1.

3. Dvije jednake posude od po 30 litara sadrže ukupno 30 litara svježe cijeđenoga soka od naranče. U prvu posudu dolijemo vode do vrha, a zatim dobivenom mješavinom soka i vode napunimo drugu posudu do vrha. Potom u prvu posudu prelijemo 12 litara nove mješavine soka i vode iz druge posude. Sada je u drugoj posudi 2 litre svježe cijeđenoga soka manje nego u prvoj posudi. Koliko je soka bilo u pojedinoj posudi na početku?

4. Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{EH}$, duljine 12, podijeljene su točkama B i C, odnosno F i G, na tri jednaka dijela. Nad svakime od tih dijelova konstruirani su polukrugovi koji se međusobno dodiruju u točkama R, S i T kao što je prikazano na slici. Kružnica k sa središtem u točki S polumjera je duljine 4. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar kružnice k neće biti unutar polukrugova, već u osjenčanom dijelu?



5. Na slici je prikazana pravokutna slika s okvirom. Osjenčani dio predstavlja sliku, a okvir je sastavljen od osam sukladnih trapeza. Duljine osnovica tih trapeza prirodni su brojevi, a iznos površine svakoga pojedinog trapeza prost je broj. Ako je površina slike manja od 200 kvadratnih jedinica, kolika je najveća moguća površina slike?



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

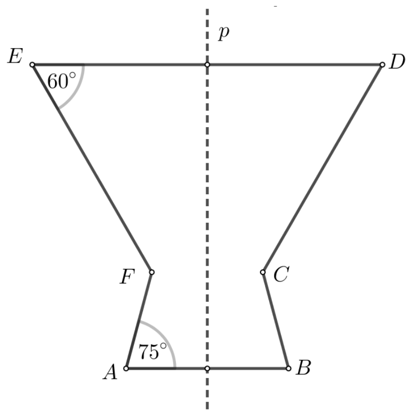
25. travnja 2023.

1. Zadan je trokut ABC. Na pravcu $2x + y + 10 = 0$ leži stranica $\overline{BC}$ toga trokuta, na pravcu $2x - y - 2 = 0$ stranica $\overline{AC}$ i na pravcu $2x - 7y + 10 = 0$ leži težišnica iz vrha A. Odredite koordinate vrhova trokuta ABC.

2. Odredite šiljasti kut α ako je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}2^\circ)-2}$.

3. Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve $\overline{abc}$ za koje je $a + b + c = a\log_b c$.

4. Glinena posuda za cvijeće visine 4 dm ima oblik geometrijskoga tijela koje nastaje rotacijom geometrijskog lika sa slike oko njegove osi simetrije, pravca p. Pri tome je sjecište pravaca AF i BC u polovištu dužine $\overline{ED}$, a pravaca EF i CD u polovištu dužine $\overline{AB}$. Koliko iznosi volumen posude (zanemarite debljinu stjenke)?



5. Neka je f realna funkcija sa sljedećim svojstvima:

- $\mathcal{D}_f = [-4, \infty\rangle$,
- $f(0) \cdot f(1) < 0$,
- funkcija f strogo je padajuća na čitavoj domeni i ima jednu nultočku.

Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi nejednakost $f(a^{2x} + 2a^x - 7) < f(a^x - 5)$, pri čemu je a nultočka zadane funkcije f.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

25. travnja 2023.

1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$(x+5)^5 = x^5 + 5^5.$$

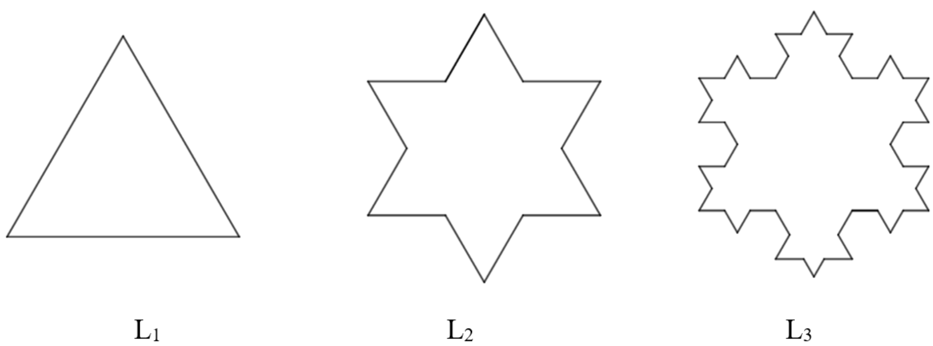
2. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\log_{x^2-4}\left(x^2 - 4x + 3\right)}$.

3. Odredite sve polinome P s realnim koeficijentima za koje je jednakost

$$x \cdot P(x-1) = (x - 2023) \cdot P(x)$$

ispunjena za sve realne brojeve x.

4. Zadani su geometrijski likovi L_1, L_2, L_3, $\ldots$. Lik L_1 jednakostranični je trokut površine 1. Svaki sljedeći lik nastaje tako da se svaka od stranica prethodnog lika podijeli na tri jednaka dijela i iznad srednjeg dijela konstruira novi jednakostranični trokut. Nakon konstrukcije jednakostraničnog trokuta briše se srednji dio iznad kojeg je napravljena konstrukcija (vidi sliku).



Odredite površinu n-tog lika L_n konstruiranog na opisani način.

5. Težištem jednakostraničnog trokuta stranice a prolazi proizvoljni pravac. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta do tog pravca konstantan, to jest ne ovisi o izboru pravca.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.