Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

1. Odredi sve trojke (p, q, r) prostih brojeva za koje vrijedi $pq + r = 1 + rp + qr$.

2. Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$a^2 + b^2 + |ab - 1| + |ab - 4|$$

za neke realne brojeve a i b.

3. Dan je trokut ABC u kojem je $\sphericalangle BAC = 45°$, $|AB| = 4$, $|AC| = 3\sqrt{2}$. Neka su $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ visine tog trokuta. Okomica na $\overline{AB}$ kroz točku E siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki P.

Odredi $|EP|$.

4. Za realne brojeve a, b i c vrijedi

$$abc = -1, \qquad a + b + c = 4 \qquad \text{i}$$

$$\frac{a}{a^2 - 3a - 1} + \frac{b}{b^2 - 3b - 1} + \frac{c}{c^2 - 3c - 1} = \frac{4}{9}.$$

Dokaži da je $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{33}{2}$.

5. Neka je n prirodni broj. Dana su dva jednaka kompleta od po n kartica s oznakama od 1 do n. Na stol su nekim redom slijeva nadesno posložene sve kartice prvog kompleta, a u nastavku istim redom sve kartice drugog kompleta. Kažemo da je takav poredak kartica *dobar* ako je moguće odabrati i ukloniti nekih n kartica tako da preostane n kartica s brojevima od 1 do n poredanih u rastućem poretku slijeva nadesno. Koliko ima dobrih rasporeda kartica?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

1. Odredi polumjer osnovke stošca čija je izvodnica duljine 1, tako da razlika površina njegovog plašta i njegove osnovke bude maksimalna.

2. Odredi, ako postoje, racionalne brojeve a i b tako da jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$ bude $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$.

3. Manda je, za odabrani prirodni broj $n > 3$, izradila sve stranice i sve dijagonale pravilnog n-terokuta od tankog pruća. Zatim je Ivan tih $\frac{1}{2}n(n-1)$ štapova podijelio u grupe po tri štapa tako da se od svake grupe može napraviti trokut.

Za koje je brojeve n to moguće?

4. Simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ siječe stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC u točki K, a opisanu kružnicu u točki L (L je različito od C). Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a S središte opisane kružnice trokuta IKB. Neka je P sjecište pravca SL i stranice $\overline{AB}$. Dokaži da je pravac SK tangenta kružnice opisane trokutu KLP.

5. Postoji li skup od 100 prirodnih brojeva takav da za svaka četiri elementa tog skupa njihov umnožak dijeli zbroj njihovih četvrtih potencija?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

1. Koliko ima prirodnih brojeva n za koje postoji trokut sa stranicama duljina

$$3, \quad \log_2 n \quad \text{i} \quad \log_4 n \quad ?$$

2. Označimo s $\tau(n)$ broj prirodnih djelitelja broja n. Prirodni brojevi a i b zadovoljavaju jednakost

$$a + \tau(a) = b^2 + 2.$$

Dokaži da je broj $a + b$ paran.

3. Dan je trokut ABC. Neka je točka D nožište visine iz vrha A, a točka E sjecište simetrale kuta $\sphericalangle CBA$ s nasuprotnom stranicom. Ako je $\sphericalangle BEA = 45°$, odredi $\sphericalangle EDC$.

4. Odredi najmanji prirodan broj n za koji postoje realni brojevi $x_1, \ldots, x_n \in [1, 4]$ koji zadovoljavaju nejednakosti:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &\geqslant \frac{7}{3} n, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} &\geqslant \frac{2}{3} n. \end{aligned}$$

5. Na ploči dimenzija 3×2023 koja je na početku prazna igra se igra za dva igrača koji naizmjence vuku poteze. U pojedinom potezu igrač odabire dva prazna polja koja se nalaze u istom retku ili istom stupcu te stavlja po jedan žeton na ta polja. Gubi igrač koji ne može odigrati dopušteni potez.

Ako Kristina igra prva, a Ana druga, koja od njih može osigurati svoju pobjedu?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

1. Za realni broj $c \neq 0$ i prirodni broj n, neka je a_k koeficijent uz x^k u izrazu $(1+cx)^n$, a b_k koeficijent uz x^k u izrazu $(1+2cx)^n$. Poznato je da su a_1, a_3 i a_4 uzastopni članovi geometrijskog niza, te da su b_1, $2b_2$ i $2b_3$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. Odredi brojeve c i n.

2. Neka je S skup svih prirodnih brojeva manjih od 1000 čije su sve znamenke u dekadskom zapisu parne. Neka je ω kompleksni broj takav da je $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Izračunaj zbroj $\sum_{k \in S} \omega^k$ tj. zbroj vrijednosti ω^k za sve k iz skupa S.

3. Postoje li međusobno različiti pozitivni realni brojevi $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2023}$ takvi da se od

jednog kvadrata stranice duljine a_1,
tri kvadrata stranica duljine a_3, $\ldots$,
k kvadrata stranice duljine a_k, $\ldots$,
2023 kvadrata stranica duljine a_{2023}

može sastaviti kvadrat?

4. Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem je $|AC| < |BC|$. Njegove visine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u ortocentru H. Dužine $\overline{DE}$ i $\overline{CH}$ sijeku u točki I, a pravci DE i AB u točki X. Neka je H_1 ortocentar trokuta XAC, a H_2 ortocentar trokuta XIC.

Ako je $|AH_1| = |IH_2|$, dokaži da je $|AI| = |DH_2|$.

5. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $a, b \in \mathbb{N}$ za koje je $f(a) \neq b$ vrijedi

$$f(a) - b \mid f(a)^2 + 2b + 1 - f(b)^2.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.