DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak B-1.1.

Odredite sve realne brojeve $p \neq 2$ takve da za rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x + py = 3 \\ px + 4y = 6 \end{cases}$$

vrijedi $y - x < p$.

Rješenje.

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $x = 3 - py$ i uvrstimo u drugu jednadžbu, nakon sređivanja dobivamo

$$y(2-p)(2+p) = 3(2-p).$$

Budući da je $p \neq 2$, jednadžbu možemo podijeliti s $(p-2)$, iz čega proizlazi $y(2+p) = 3$. Zaključujemo da p ne smije biti ni -2 kako bi sustav imao rješenja. U tom slučaju vrijedi $y = \dfrac{3}{p+2}$, $p \neq \pm 2$. Sada iz $x = 3 - py$ slijedi $x = \dfrac{6}{2+p}$, $p \neq \pm 2$.

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti od x i y u uvjet $y - x < p$ dobivamo nejednadžbu

$$\frac{3}{2+p} - \frac{6}{2+p} < p.$$

Prebacimo li sve članove na lijevu stranu redom dobivamo sljedeći niz ekvivalentnih nejednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+p} - \frac{6}{2+p} - p &< 0 \\ \frac{-3-2p-p^2}{2+p} &< 0 \\ \frac{-2-(1+p)^2}{2+p} &< 0 \end{aligned}$$

Budući da brojnik dobivenog razlomka na lijevoj strani nejednakosti ima uvijek negativnu vrijednost, nazivnik mora biti pozitivan kako bi cijeli razlomak bio negativan, odnosno $2+p > 0$, pa za traženi parametar p koji zadovoljava dane uvjete vrijedi

$$p > -2,\ p \neq 2.$$

Zadatak B-1.2.

Riješite jednadžbu

$$||x - 2023| + 2022x| = |2022 - |2023 - x||\,.$$

Rješenje.

Dva realna broja imaju istu apsolutnu vrijednost ako i samo ako su to ili jednaki brojevi ili suprotni brojevi. Dakle, vrijedi da je

$$|x-2023|+2022x=2022-|2023-x| \text{ ili } |x-2023|+2022x=-2022+|2023-x|\,.$$

Uočimo da vrijedi $|x-2023|=|2023-x|$. U prvom slučaju dobijemo jednadžbu

$$\begin{aligned} 2|x-2023| &= 2022-2022x, \text{ odnosno} \\ |x-2023| &= 1011-1011x. \end{aligned}$$

Ova će jednadžba imati rješenje ako je $1011-1011x \geqslant 0$, odnosno ako je $x \leqslant 1$. Tada je ili

$$\begin{aligned} x-2023 &= 1011-1011x \\ 1012x &= 3034 \\ x &= \frac{3034}{1012} > 1, \end{aligned}$$

pa to nije rješenje, ili je

$$\begin{aligned} x-2023 &= -1011+1011x \\ -1010x &= 1012 \\ x &= -\frac{1012}{1010} = -\frac{506}{505}, \end{aligned}$$

što jest rješenje.

U drugom slučaju iz $|x-2023|+2022x=-2022+|2023-x|$ dobivamo $2022x=-2022$, pa slijedi $x=-1$.

Sva rješenja dane jednadžbe su $x=-\frac{506}{505}$ i $x=-1$.

Zadatak B-1.3.

Vrhovima kvadrata $ABCD$, Matko je pridružio različite prirodne brojeve manje od 16 tako da pri odabiru bilo koja tri vrha kvadrata, aritmetička sredina njima pridruženih brojeva bude cijeli broj. Na koliko je različitih načina Matko mogao numerirati vrhove kvadrata?

Rješenje.

Označimo brojeve pridružene vrhovima kvadrata s a, b, c i d pri čemu su $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 15\}$. Prema uvjetima iz zadatka, zbrojevi $a+b+c$, $a+b+d$, $a+c+d$, $b+c+d$ moraju biti djeljivi s 3. Promatramo sve slučajeve u kojima to možemo postići.

Prvi slučaj: sva četiri odabrana broja su djeljiva s 3.
Tada četiri broja biramo iz skupa $\{3, 6, 9, 12, 15\}$. Od 5 različitih brojeva, četiri različita broja možemo odabrati na 5 načina (jer biramo jedan koji nećemo uzeti).

Drugi slučaj: sva četiri odabrana broja pri dijeljenju s 3 *daju ostatak* 1.
Tada četiri broja biramo iz skupa $\{1, 4, 7, 10, 13\}$. Njih ponovno možemo odabrati na 5 načina.

Treći slučaj: sva četiri odabrana broja pri dijeljenju s 3 *daju ostatak* 2.
Tada četiri broja biramo iz skupa $\{2, 5, 8, 11, 14\}$. Njih ponovno možemo odabrati na 5 načina.

Četvrti slučaj: u svakoj trojci čiji zbroj promatramo, jedan od odabranih brojeva pri dijeljenju s 3 *daje ostatak* 0*, drugi* 1*, a treći* 2*.*
Pokažimo da je ovo nemoguće postići za sve odabire tri broja iz skupa $\{a, b, c, d\}$. Bez smanjenja općenitosti promatrajmo odabir u kojem je broj a djeljiv s 3, broj b pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, a broj c ostatak 2.

Ako je sada broj d djeljiv s 3, zbrojevi $a+b+d$ i $a+c+d$ neće biti djeljivi s 3. Ako broj d pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, zbrojevi $a+b+d$ i $b+c+d$ nisu djeljivi s 3. Ako broj d pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2, zbrojevi $a+c+d$ i $b+c+d$ nisu djeljivi s 3.

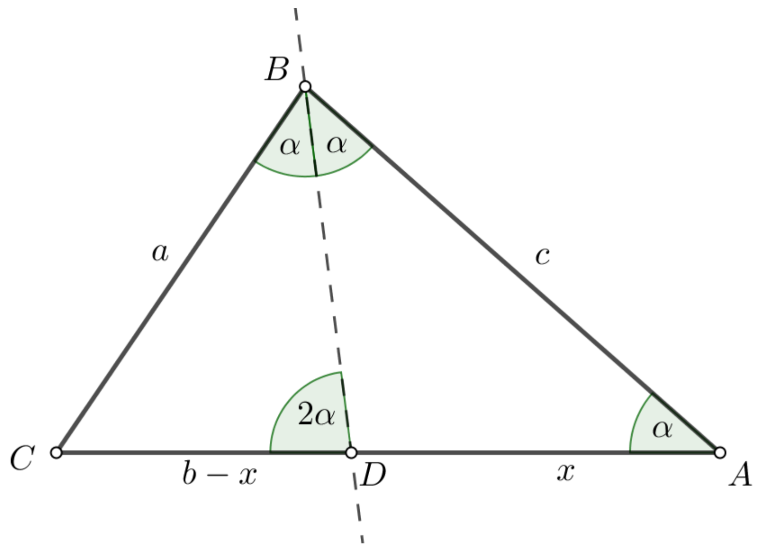
Dakle, ostatci pri dijeljenju s 3 moraju biti jednaki za sva 4 broja a, b, c i d, pa je ukupan broj odabira brojeva za numeriranje vrhova kvadrata jednak $5+5+5=15$. Za svaki od tih odabira, četiri broja možemo razmjestiti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina, pa je ukupno $15 \cdot 24 = 360$ različitih mogućnosti numeracije vrhova kvadrata uz dane uvjete.

Zadatak B-1.4.

Kut $\sphericalangle CBA$ trokuta ABC je dvostruko veći od kuta $\sphericalangle BAC$. Ako je $|BC| : |AB| = 4 : 5$ i $|AC| = 18$, odredite opseg i površinu trokuta ABC.

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$. Tada je $\sphericalangle CBA = 2\alpha$. Neka je D točka u kojoj simetrala kuta $\sphericalangle CBA$ siječe stranicu $\overline{AB}$. Uz oznake kao na slici vrijedi $\sphericalangle BDC = 2\alpha$ (vanjski kut trokuta ABD), $a : c = 4 : 5$, $b = 18$, $|BD| = x$.



Prema poučku o simetrali kuta u trokutu vrijedi da je

$$\frac{b-x}{x} = \frac{a}{c} = \frac{4}{5},$$

pa redom imamo

$$\begin{aligned} 4x &= 5(18-x) \\ 9x &= 90 \\ x &= 10 \\ \implies b - x &= 8. \end{aligned}$$

Trokuti ABC i BDC su slični prema poučku KK, pa vrijedi

$$\frac{b-x}{a} = \frac{a}{b} = \frac{x}{c},$$

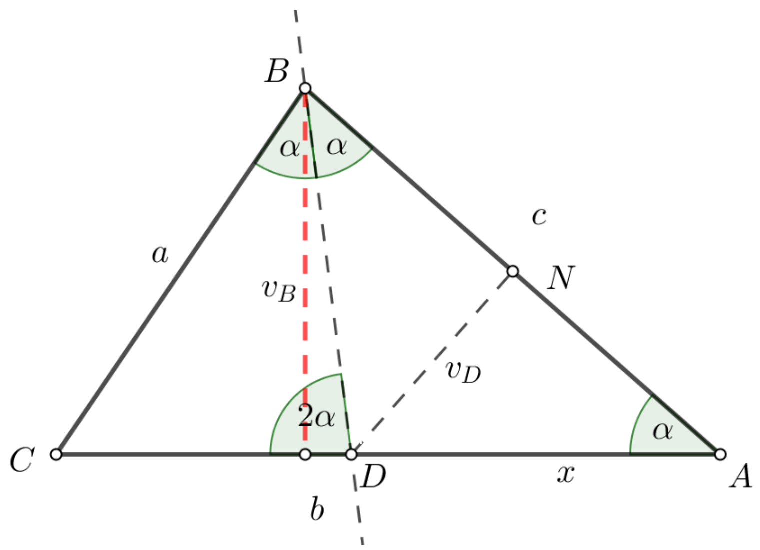
iz čega dobivamo $a^2 = 18 \cdot 8$, odnosno $a = 12$. Sada iz uvjeta zadatka (ili sličnosti) slijedi $c = 15$.

Opseg trokuta ABC iznosi $12 + 15 + 18 = 45$. Površinu možemo izračunati koristeći Heronovu formulu:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{45}{2}\left(\frac{45}{2} - 12\right)\left(\frac{45}{2} - 15\right)\left(\frac{45}{2} - 18\right)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{45 \cdot 21 \cdot 15 \cdot 9} = \frac{135}{4}\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Napomena: Duljina x može se izračunati i koristeći, uz zadane uvjete, samo sličnost gore navedenih trokuta, umjesto korištenjem poučka o simetrali kuta.

Površinu trokuta ABC možemo izračunati i na sljedeći način.



U jednakokračnom trokutu ADB visina na osnovicu $\overline{AB}$ jednaka je $v_D = \sqrt{x^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Tada iz pravokutnog trokuta AND dobivamo $\sin\alpha = \frac{\frac{5\sqrt{7}}{2}}{10} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, pa tražena površina iznosi:

$$P = \frac{b \cdot v_B}{2} = \frac{b \cdot c \sin\alpha}{2} = \frac{18 \cdot 15 \cdot \sqrt{7}}{8} = \frac{135\sqrt{7}}{4}.$$

Zadatak B-1.5.

Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(mn-3)^2 = m^2 + n^2 - 4mn.$$

Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu u drugačijem obliku:

$$\begin{aligned}(mn-3)^2 &= m^2+n^2-4mn\\ (mn)^2-6mn+9 &= m^2+n^2-4mn\\ (mn)^2+9 &= m^2+n^2+2mn\\ (mn)^2+9 &= (m+n)^2.\end{aligned}$$

Premještanjem kvadratnih članova na istu stranu jednakosti i faktorizacijom razlike kvadrata dobivamo:

$$\begin{aligned}(m+n)^2-(mn)^2 &= 9\\ (m+n-mn)(m+n+mn) &= 9.\end{aligned}$$

Budući da su m i n cijeli brojevi, iz zadnje jednakosti dobivamo šest mogućih slučajeva:

$$1.\ \begin{cases} m+n-mn=1\\ m+n+mn=9\end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} m+n-mn=-1\\ m+n+mn=-9\end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} m+n-mn=9\\ m+n+mn=1\end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} m+n-mn=-9\\ m+n+mn=-1\end{cases}$$

$$5.\ \begin{cases} m+n-mn=3\\ m+n+mn=3\end{cases}$$

$$6.\ \begin{cases} m+n-mn=-3\\ m+n+mn=-3\end{cases}$$

U prvom slučaju se nakon zbrajanja i oduzimanja danih jednadžbi te sređivanja dobiva sustav:

$$\begin{cases} m+n=5\\ \quad mn=4.\end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi da je $(m,n) \in \{(1,4),(4,1),(-4,-1),(-1,-4),(-2,-2),(2,2)\}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu zaključujemo da su jedina rješenja $(m,n) \in \{(1,4),(4,1)\}$.

U drugom slučaju dobije se sustav:

$$\begin{cases} m+n=-5\\ \quad mn=-4.\end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi da je $(m,n) \in \{(-1,4),(4,-1),(-4,1),(1,-4),(-2,2),(2,-2)\}$, ali niti jedan od tih uređenih parova nije rješenje danog sustava, a onda ni početne jednadžbe.

U trećem slučaju sustav je

$$\begin{cases} m+n=5 \\ mn=-4. \end{cases}$$

Analogno, kao u prethodnom slučaju dobivamo da sustav nema cjelobrojnih rješenja.

U četvrtom slučaju rješavamo sustav

$$\begin{cases} m+n=-5 \\ mn=4. \end{cases}$$

čija su rješenja $(m,n) \in \{(-1,-4),(-4,-1)\}$.

U petom slučaju rješavamo sustav

$$\begin{cases} m+n=3 \\ mn=0. \end{cases}$$

čija su rješenja $(m,n) \in \{(0,3),(3,0)\}$.

U šestom slučaju rješavamo sustav

$$\begin{cases} m+n=-3 \\ mn=0. \end{cases}$$

čija su rješenja $(m,n) \in \{(0,-3),(-3,0)\}$.

Konačno, sva cjelobrojna rješenja polazne jednadžbe su:

$$(m,n) \in \{(1,4),(4,1),(-1,-4),(-4,-1),(0,-3),(-3,0),(0,3),(3,0)\}.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak B-2.1.

Izračunajte koliko je $\left(\dfrac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\dfrac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2$.

Rješenje.

Uočimo da vrijedi:

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{4+4\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}=|2+\sqrt{2}|=2+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{4-4\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}.$$

Uvrštavanjem dobivenih jednakosti u početni brojevni izraz odredimo njegovu vrijednost.

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2=$$

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}\right)^2=$$

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}\cdot\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2}+\frac{6-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}\cdot\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{12\sqrt{2}+16-12-8\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2-2^2}+\frac{12\sqrt{2}-16+12-8\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2-2^2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{4\sqrt{2}+4}{4}+\frac{4\sqrt{2}-4}{4}\right)^2=$$

$$\left(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1\right)^2=$$

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$$

Zadatak B-2.2.

Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da rješenja jednadžbe $a(x^2-1)+4x=5$ budu različiti realni brojevi veći od 1.

Prvo rješenje.

Zadana je jednadžba ekvivalentna jednadžbi $ax^2+4x-a-5=0$.

Kako bi navedena jednadžba imala dva različita realna rješenja, mora vrijediti:

$D=16-4a(-a-5)=16+20a+4a^2>0$ i $a \neq 0$, to jest $a \in \langle -\infty,\ -4\rangle \cup \langle -1,\ 0\rangle \cup \langle 0,\ +\infty\rangle$.

Prema uvjetu zadatka, za rješenja x_1 i x_2 mora vrijediti $x_1>1$ i $x_2>1$, odnosno $t_1=x_1-1>0$ i $t_2=x_2-1>0$.

Dva su realna broja pozitivna ako su im i umnožak i zbroj pozitivni brojevi.

1. uvjet: $t_1 \cdot t_2 > 0$

$(x_1-1)\cdot(x_2-1)>0$

$x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 > 0$

$\frac{c}{a}-\left(-\frac{b}{a}\right)+1>0$

$\frac{-a-5}{a}+\frac{4}{a}+1=\frac{-a-5+4+a}{a}=\frac{-1}{a}>0$

Rješavanjem nejednadžbe dobiva se rješenje prvoga uvjeta:

$a \in \langle -\infty, 0\rangle$.

2. uvjet: $t_1+t_2>0$

$x_1-1+x_2-1>0$

$x_1+x_2-2=-\frac{b}{a}-2=-\frac{4}{a}-2=\frac{-4-2a}{a}>0$

Rješavanjem nejednadžbe dobiva se rješenje drugoga uvjeta:

$a \in \langle -2,\ 0\rangle$.

Konačno rješenje presjek je svih uvjeta: $a \in \langle -1,\ 0\rangle$.

Drugo rješenje.

Zadana je jednadžba ekvivalentna jednadžbi $ax^2+4x-a-5=0$.

Kako bi navedena jednadžba imala dva različita realna rješenja, mora vrijediti:

$D=16-4a(-a-5)=16+20a+4a^2>0$ i $a \neq 0$, to jest $a \in \langle -\infty,\ -4\rangle \cup \langle -1,\ 0\rangle \cup \langle 0,\ +\infty\rangle$.

Rješenja x_1 i x_2 jednadžbe $ax^2+4x-a-5$ glase:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4a(-a-5)}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4a^2+20a}}{2a}=\frac{-4\pm 2\sqrt{a^2+5a+4}}{2a}.$$

Vrijedi da je: $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $x_1=\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}>1$ i $x_2=\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}>1$.

1. slučaj: $a \in \langle -\infty,\ -4\rangle \cup \langle -1,\ 0\rangle$.

$$\begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \\ \dfrac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} < a \\ -2-\sqrt{a^2+5a+4} < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+5a+4} < a+2 \\ \sqrt{a^2+5a+4} > -a-2 \end{cases}$$

Ako je $a \in \langle -\infty,\ -4\rangle$, vrijedi da je $a+2<0$ pa prva nejednadžba, a time i cijeli sustav, nema rješenja.

Ako je $a \in \langle -1,\ 0\rangle$, nejednakost $\sqrt{a^2+5a+4} > -a-2$ uvijek vrijedi pa je rješenje sustava nejednadžbi jednako rješenju prve nejednadžbe u sustavu.

$\sqrt{a^2+5a+4} < a+2 /^2$

$a^2+5a+4 < a^2+4a+4$

$a<0$

Rješenje nejednadžbe je $a \in \langle -\infty,\ 0\rangle$.

Uzmemo li u obzir i uvjet, rješenje ovoga slučaja glasi $a \in \langle -1,\ 0\rangle$.

2. slučaj: $a \in \langle 0,\ +\infty\rangle$.

$$\begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \\ \dfrac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} > 1 / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} > a \\ -2-\sqrt{a^2+5a+4} > a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+5a+4} > a+2 \\ \sqrt{a^2+5a+4} < -a-2 \end{cases}$$

Kako je u ovome slučaju $a \in \langle 0,\ +\infty\rangle$, vrijedi da je $-a-2<0$ pa druga nejednadžba, a time i cijeli sustav, nema rješenja.

Konačno, jednadžba ima dva rješenja veća od 1 kada je $a \in \langle -1,\ 0\rangle$.

Zadatak B-2.3.

Dvije jednake posude od po 30 litara sadrže ukupno 30 litara svježe cijeđenoga soka od naranče. U prvu posudu dolijemo vode do vrha, a zatim dobivenom mješavinom soka i vode napunimo drugu posudu do vrha. Potom u prvu posudu prelijemo 12 litara nove mješavine soka i vode iz druge posude. Sada je u drugoj posudi 2 litre svježe cijeđenoga soka manje nego u prvoj posudi. Koliko je soka bilo u pojedinoj posudi na početku?

Rješenje.

Neka je c udio soka u x litara mješavine.

	prva posuda		druga posuda	
prelijevanje	udio soka	količina /L	udio soka	količina /L
početak	$c_0 = 1$	x	$c_0 = 1$	$30 - x$
1.	$c_1 = \frac{x}{30}$	30	$c_0 = 1$	$30 - x$
2.	$c_1 = \frac{x}{30}$	$30 - x$	$c_2 = \frac{c_0 \cdot (30 - x) + c_1 \cdot x}{30}$	30
3.	$c_3 = \frac{c_1 \cdot (30 - x) + 12c_2}{42 - x}$	$42 - x$	$c_2 = \frac{30 - x + c_1 \cdot x}{30}$	18

Nakon svih prelijevanja količina soka u prvoj posudi iznosi $c_3 \cdot (42 - x) = c_1 \cdot (30 - x) + 12c_2$, a u drugoj posudi $c_2 \cdot 18 = 18c_2$.

Prema uvjetima zadatka, za konačnu količinu soka vrijedi:

$c_1 \cdot (30 - x) + 12c_2 = 2 + 18c_2$

$c_1 \cdot (30 - x) = 2 + 6c_2$

$\frac{x}{30} \cdot (30 - x) = 2 + 6 \cdot \frac{30 - x + c_1 \cdot x}{30}$

$x(30 - x) = 60 + 6\left(30 - x + \frac{x}{30} \cdot x\right)$

$30x - x^2 = 60 + 180 - 6x + \frac{x^2}{5}$

$x^2 - 30x + 200 = 0$

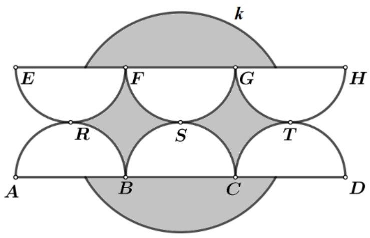
$x_1 = 10 \qquad x_2 = 20$

U prvoj posudi ne može biti 10 litara soka jer bi tada po završetku prelijevanja u prvoj posudi bile 32 L smjese.

Prema tome, u prvoj je posudi na početku bilo 20 L, a u drugoj 10 L soka od naranče.

Zadatak B-2.4.

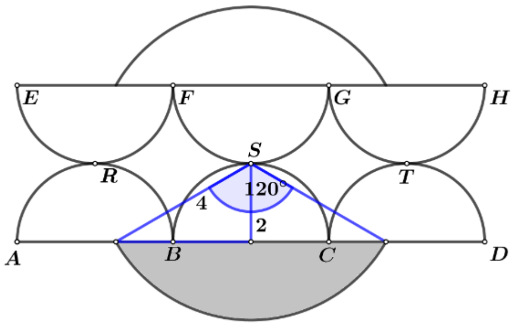
Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{EH}$, duljine 12, podijeljene su točkama B i C, odnosno F i G, na tri jednaka dijela. Nad svakime od tih dijelova konstruirani su polukrugovi koji se međusobno dodiruju u točkama R, S i T kao što je prikazano na slici. Kružnica k sa središtem u točki S polumjera je duljine 4. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar kružnice k neće biti unutar polukrugova, već u osjenčanom dijelu?



Rješenje.

Polumjer svake od polukružnica jednak je $12 : 6 = 2$.

Odredimo najprije površinu osjenčanoga kružnog odsječka prikazanoga na slici.

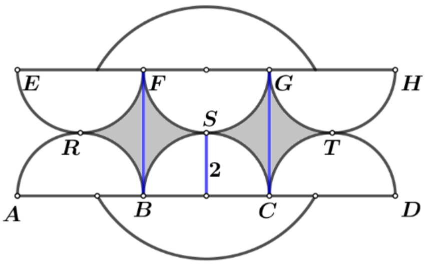


Udaljenost tetive kružnice k (kojoj pripadaju točke B i C) od središta S jednaka je polumjeru polukružnice i iznosi 2. Označimo s α pripadni kut kružnoga isječka kao na slici. Budući radijus kružnice k iznosi 4, vrijedi da je $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, odnosno $\alpha = 120°$.

Tada je površina P_1 označenoga kružnog odsječka jednaka:

$$P_1 = \frac{4^2\pi \cdot 120°}{360°} - \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

Odredimo i površinu osjenčanoga dijela između polukružnica.



Površina dvaju osjenčanih dijelova sa slike jest $P_2 = 2(4^2 - 2^2\pi) = 32 - 8\pi$.

Ukupna površina svih osjenčanih dijelova zadane kružnice k jednaka je:

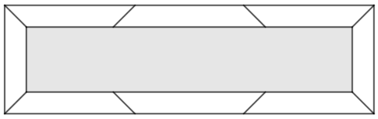
$$P_O = 2P_1 + P_2 = 2\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) + 32 - 8\pi = \frac{8}{3}\pi + 32 - 8\sqrt{3}.$$

Tražena vjerojatnost jednaka je omjeru osjenčane površine i površine kruga k, odnosno:

$$p = \frac{P_O}{P_k} = \frac{\frac{8}{3}\pi + 32 - 8\sqrt{3}}{16\pi}.$$

Zadatak B-2.5.

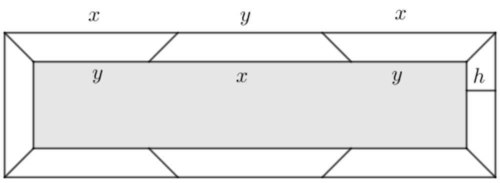
Na slici je prikazana pravokutna slika s okvirom. Osjenčani dio predstavlja sliku, a okvir je sastavljen od osam sukladnih trapeza. Duljine osnovica tih trapeza prirodni su brojevi, a iznos površine svakoga pojedinog trapeza prost je broj. Ako je površina slike manja od 200 kvadratnih jedinica, kolika je najveća moguća površina slike?



Prvo rješenje.

Neka su x i y, $x > y$, osnovice trapeza i neka je h visina trapeza, a p njegova površina.

Tada vrijedi da je $p = \dfrac{x+y}{2} \cdot h$.



Dulja stranica okvira iznosi $2x+y$, a duljina njegove kraće stranice iznosi x. Dulja stranica slike iznosi $x+2y$, dok je duljina njezine kraće stranice jednaka y. Površina slike iznosi $P = y(x+2y)$.

Uočimo da vrijedi da je $2x + y = x + 2y + 2h$, odnosno da je $h = \dfrac{x-y}{2}$.

Za površinu trapeza tada vrijedi da je $p = \dfrac{x+y}{2} \cdot \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{(x+y)(x-y)}{4}$.

Promotrimo umnožak $(x+y)(x-y) = 4p$.

Kako su x, y i p prirodni brojevi, umnožak $(x+y)(x-y)$ mora biti paran broj. Kako su brojevi $x+y$ i $x-y$ iste parnosti, možemo zaključiti da oba moraju biti parna. Uočimo također da je $x - y < x + y$.

1. slučaj: $p = 2$

Tada je $(x+y)(x-y) = 8$, odnosno $x+y = 4$ i $x-y = 2$. Tada je $x = 3$, $y = 1$ te je površina slike $P = 1 \cdot (3+2) = 5$ kvadratnih jedinica.

2. slučaj: p prost broj veći od dva

U ovome je slučaju p neparan broj, a kako su faktori $x+y$ i $x-y$ prema prethodnome zaključku oba parni brojevi, mora vrijediti da je jedan od njih jednak 2, a drugi $2p$. Uzmemo li u obzir da je $x - y < x + y$, očito vrijedi $x - y = 2$ i $x + y = 2p$.

Rješavanjem dobivenoga sustava jednadžbi dobivamo da je $x = p + 1$, a $y = p - 1$. Površina slike tada je jednaka $P = y(x + 2y) = (p - 1)(3p - 1)$.

Za $p = 3$ površina slike iznosi $P = 2 \cdot 8 = 16$ kvadratnih jedinica.

Za $p = 5$ površina slike iznosi $P = 4 \cdot 14 = 56$ kvadratnih jedinica.

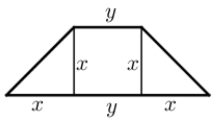
Za $p = 7$ površina slike iznosi $P = 6 \cdot 20 = 120$ kvadratnih jedinica.

Za $p = 11$ površina slike iznosi $P = 10 \cdot 32 = 320 > 200$ kvadratnih jedinica.

Budući da površina slike mora biti manja od 200 kvadratnih jedinica, zaključujemo da je najveća moguća površina jednaka 120 kvadratnih jedinica.

Drugo rješenje.

Budući su zadani trapezi sukladni i jednakokračni, a zbroj veličina dvaju šiljastih kutova uz osnovicu jednak je $90°$, možemo zaključiti da su šiljasti kutovi trapeza veličine $45°$.



Označimo s x visinu trapeza, a s y duljinu njegove kraće osnovice kao na slici. Tada je duljina veće osnovice trapeza jednaka $2x + y$.

Površina pojedinoga trapeza tada iznosi $p = \dfrac{2x + y + y}{2} \cdot x = (x + y) \cdot x$.

Površina trapeza prost je broj, a x i y prirodni su brojevi, znači da mora vrijediti da je $x = 1$. Površina trapeza tada je jednaka $p = y + 1$.

Površina slike iznosi $P = y \cdot (y + 2x + y + y) = y(3y + 2) = 3y^2 + 2y$.

Mora vrijediti da je $3y^2 + 2y < 200$, pri čemu je y prirodan broj. Navedena nejednakost zadovoljena je za $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Kako broj $y + 1$ mora biti prost, zaključujemo da y može poprimiti neku od vrijednosti 1, 2, 4 ili 6. Za $y = 6$ slika je najveće površine koja iznosi $P = 3 \cdot 36 + 2 \cdot 6 = 120$ kvadratnih jedinica.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

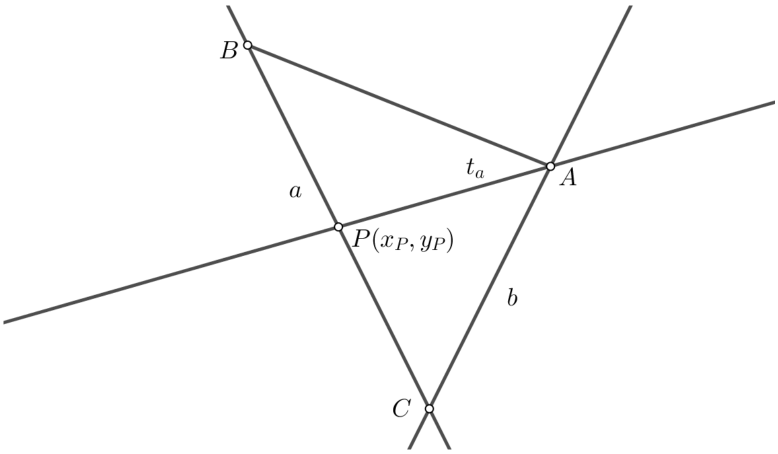
3. razred – srednja škola – B varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak B-3.1.

Zadan je trokut ABC. Na pravcu $2x + y + 10 = 0$ leži stranica $\overline{BC}$ toga trokuta, na pravcu $2x - y - 2 = 0$ stranica $\overline{AC}$ i na pravcu $2x - 7y + 10 = 0$ leži težišnica iz vrha A. Odredite koordinate vrhova trokuta ABC.

Rješenje.



Neka je a pravac BC, b pravac AC, a t_a pravac AP na kojemu leži težišnica iz vrha A. Tada je $a \cap b = \{C\}$, a $b \cap t_a = \{A\}$.

Dakle, koordinate vrha C dobit ćemo kao rješenje sustava

$$2x + y + 10 = 0,$$

$$2x - y - 2 = 0.$$

Zbrojimo li jednadžbe dobivamo $x = -2$, a zatim iz jedne od jednadžbi $y = -6$. Dakle, vrh C jest $C(-2, -6)$.

Koordinate vrha A dobit ćemo kao rješenje sustava

$$2x - 7y + 10 = 0,$$

$$2x - y - 2 = 0.$$

Oduzmemo li jednadžbe sustava dobivamo $y = 2$, a zatim iz jedne od jednadžbi $x = 2$. Dakle, vrh A jest $A(2, 2)$.

Polovište stranice $\overline{BC}$ je točka $P(x_P, y_P)$ i za njezine koordinate vrijedi

$$x_P = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{x_B - 2}{2},$$

$$y_P = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{y_B - 6}{2}.$$

Budući da se točka P nalazi na težišnici, odnosno pravcu t_a, a točka B na pravcu a, njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbe tih pravaca. Dakle, vrijedi:

$$2 \cdot \frac{x_B - 2}{2} - 7 \cdot \frac{y_B - 6}{2} + 10 = 0,$$

$$2x_B + y_B + 10 = 0.$$

Nakon sređivanja dobivamo sustav jednadžbi

$$2x_B - 7y_B + 58 = 0,$$

$$2x_B + y_B + 10 = 0.$$

Oduzmemo li jednadžbe toga sustava dobivamo $y_B = 6$, a zatim iz jedne od jednadžbi $x_B = -8$. Dakle, vrh B jest $B(-8, 6)$.

Zadatak B-3.2.

Odredite šiljasti kut α ako je $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) - 2}{(1 - \operatorname{tg} 1^\circ)(1 - \operatorname{tg} 2^\circ) - 2}$.

Prvo rješenje.

Uredimo desnu stranu dane jednakosti. Prvo ćemo izmnožiti izraze u zagradama i malo pojednostavniti.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) - 2}{(1 - \operatorname{tg} 1^\circ)(1 - \operatorname{tg} 2^\circ) - 2} = \frac{1 + \operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ - 2}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 2^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ - 2}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ - 1}{-\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 2^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ - 1}.$$

Nakon sređivanja, podijelimo brojnik i nazivnik s $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ - 1$. Slijedi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ - 1} + 1}{-\dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ - 1} + 1}.$$

Kako je $\operatorname{tg} 3^\circ = \dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ}$, onda je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} 3^\circ}{1 + \operatorname{tg} 3^\circ}.$$

Desnu stranu u danom izrazu, uz činjenicu da je $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, možemo zapisati kao

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} 3^\circ}{1 + \operatorname{tg} 3^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 3^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ} = \operatorname{tg}(45^\circ - 3^\circ) = \operatorname{tg} 42^\circ.$$

Dakle, $\alpha = 42^\circ$.

Drugo rješenje.

Uredimo desnu stranu dane jednakosti. Prvo ćemo izmnožiti izraze u zagradama i malo pojednostavniti.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}2^\circ)-2}=\frac{1+\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}2^\circ+\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ-2}{1-\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}2^\circ+\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ-2}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}2^\circ+\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ-1}{-\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}2^\circ+\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ-1}.$$

Ovu jednakost možemo pisati u obliku

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}+\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\cdot\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}-1}{-\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}-\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\cdot\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}-1}$$

$$=\frac{\frac{\sin 1^\circ\cdot\cos 2^\circ+\sin 2^\circ\cdot\cos 1^\circ+\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ-\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}}{\frac{-\sin 1^\circ\cdot\cos 2^\circ-\sin 2^\circ\cdot\cos 1^\circ+\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ-\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}}$$

$$=\frac{(\sin 1^\circ\cdot\cos 2^\circ+\sin 2^\circ\cdot\cos 1^\circ)-(\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ-\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ)}{-(\sin 1^\circ\cdot\cos 2^\circ+\sin 2^\circ\cdot\cos 1^\circ)-(\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ-\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ)}$$

$$=\frac{\sin 3^\circ-\cos 3^\circ}{-(\sin 3^\circ+\cos 3^\circ)}=\frac{\cos 3^\circ-\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ+\sin 3^\circ}=\frac{\cos 3^\circ(1-\operatorname{tg}3^\circ)}{\cos 3^\circ(1+\operatorname{tg}3^\circ)}.$$

Prema tome je

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}3^\circ}{1+\operatorname{tg}3^\circ}.$$

Desnu stranu u danom izrazu, uz činjenicu da je $\operatorname{tg}45^\circ=1$, možemo zapisati kao

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}3^\circ}{1+\operatorname{tg}3^\circ}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}3^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}=\operatorname{tg}(45^\circ-3^\circ)=\operatorname{tg}42^\circ.$$

Dakle, $\alpha=42^\circ$.

Zadatak B-3.3.

Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve $\overline{abc}$ za koje je $a+b+c=a\log_b c$.

Rješenje.

Dani će izraz imati smisla ako je $a>0$, $b>1$ i $c>1$.

U danom je izrazu lijeva strana prirodan broj, pa to mora biti i desna strana. Da bi desna strana bila prirodan broj mora biti $c=b^k$.

Uvrštavanjem te jednakosti u zadani izraz dobivamo da je $a+b+b^k=ak$.

Iz $b+b^k=a(k-1)$ slijedi da je broj $k>1$ jer bi u protivnom lijeva strana bila negativna, što je nemoguće. Budući da je c prirodan broj između 2 i 9 te $c=b^k$, broj k može imati vrijednost 2 ili 3.

Ako je $k=2$, tada je

$$a+b+b^2=2a,$$

$$b(b+1)=a.$$

Dakle, znamenka a je umnožak dvije uzastopne znamenke, što je moguće samo ako je $b=2$ i $a=6$. Tada je $c=b^2=4$, pa se radi o broju 624.

Ako je $k=3$, tada je

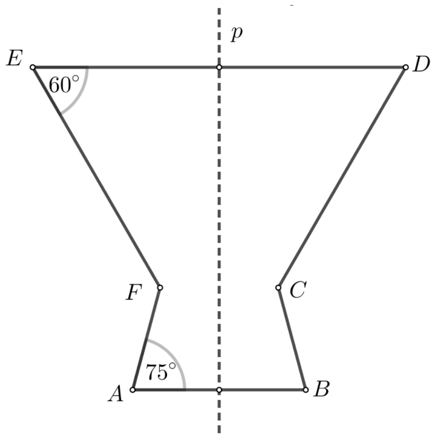
$$a+b+b^3=3a,$$
$$b(b^2+1)=2a.$$

Ako je $b=2$ slijedi da je $a=5$. Ako je vrijednost broja b veća od 2, vrijednost broja a će biti veća od 9, što je nemoguće. Slijedi da je $c=b^3=8$, pa se radi o broju 528.

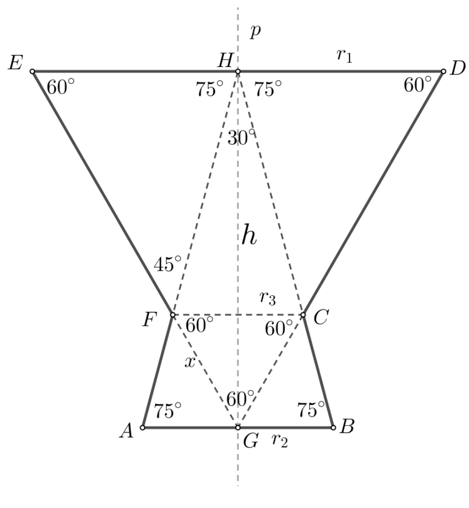
Dakle, traženi troznamenkasti brojevi su 528 i 624.

Zadatak B-3.4.

Glinena posuda za cvijeće visine 4 dm ima oblik geometrijskoga tijela koje nastaje rotacijom geometrijskog lika sa slike oko njegove osi simetrije, pravca p. Pri tome je sjecište pravaca AF i BC u polovištu dužine $\overline{ED}$, a pravaca EF i CD u polovištu dužine $\overline{AB}$. Koliko iznosi volumen posude (zanemarite debljinu stjenke)?



Rješenje.



Volumen posude izračunati ćemo tako da zbrojimo volumene dva stošca (V_1 je volumen stošca promjera baze $\overline{ED}$ i visine $h = 4$ dm, V_2 je volumen stošca promjera baze $\overline{AB}$ i iste visine) te oduzmemo zajednički dio (V_3 i V_4 su volumeni stožaca promjera baze $\overline{FC}$, a zbroj njihovih visina je $h = 4$ dm).

$$V = V_1 + V_2 - V_3 - V_4 = \frac{r_1^2 \pi h}{3} + \frac{r_2^2 \pi h}{3} - \frac{r_3^2 \pi h}{3} = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2\right).$$

Primjenom trigonometrijskih omjera na trokute GHE i AGH odrediti ćemo polumjere r_1 i r_2.

Kako je $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = \dfrac{h}{r_1}$, dobivamo $r_1 = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Nadalje je

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} = \frac{h}{r_2},$$

pa je $r_2 = \dfrac{4}{2 + \sqrt{3}}$.

Primjenom poučka o sinusu na trokut AGF odrediti ćemo polumjer r_3. Dobivamo

$$\frac{x}{\sin 75^\circ} = \frac{r_2}{\sin 45^\circ}.$$

Nadalje je

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Sada je

$$\frac{x}{\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\dfrac{4}{2 + \sqrt{3}}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}},$$

pa je $x = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$, odnosno $r_3 = \dfrac{x}{2} = \sqrt{3} - 1$.

Uvrštavanjem u početnu formulu računamo volumen

$$V = \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{2 + \sqrt{3}}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - 1\right)^2\right] = \left(\frac{1360}{9} - \frac{248}{3}\sqrt{3}\right)\pi \text{ dm}^3.$$

Zadatak B-3.5.

Neka je f realna funkcija sa sljedećim svojstvima:

- $\mathcal{D}_f = [-4, \infty\rangle$,
- $f(0) \cdot f(1) < 0$,
- funkcija f strogo je padajuća na čitavoj domeni i ima jednu nultočku.

Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi nejednakost $f(a^{2x} + 2a^x - 7) < f(a^x - 5)$, pri čemu je a nultočka zadane funkcije f.

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $a^x = y$. Tada je $f(y^2+2y-7) < f(y-5)$.

Da bi ova nejednadžba imala smisla vrijednosti izraza u zagradama trebaju biti u domeni funkcije f. Dakle, mora vrijediti

$$y^2+2y-7 \geqslant -4 \qquad \text{i} \qquad y-5 \geqslant -4$$

ili nakon sređivanja

$$y^2+2y-3 \geqslant 0 \qquad \text{i} \qquad y \geqslant 1.$$

Tada je

$$y \in (\langle -\infty, -3] \cup [1, \infty\rangle) \cap [1, \infty\rangle.$$

Prema tome, dana nejednadžba ima smisla ako je

$$y \in [1, \infty\rangle. \tag{*}$$

Kako je funkcija f strogo padajuća, polazna nejednadžba ekvivalentna je nejednadžbi

$$y^2+2y-7 > y-5,$$

odnosno

$$y^2+y-2 > 0.$$

Njezinim rješavanjem dobivamo $y \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, a zbog uvjeta (*) je $y \in \langle 1, \infty\rangle$.

Prema tome, polazna je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi $a^x > 1$.

Iz uvjeta $f(0) \cdot f(1) < 0$ slijedi da je nultočka funkcije f iz intervala $\langle 0, 1\rangle$.

Budući da je a nultočka funkcije f, funkcija $x \mapsto a^x$ je padajuća te iz $a^x > 1 = a^0$ slijedi $x < 0$.

Konačno rješenje dane nejednadžbe jest $x \in \langle -\infty, 0\rangle$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak B-4.1.

U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$(x+5)^5 = x^5 + 5^5.$$

Rješenje.

Primjenom binomnog poučka danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 5 + 10 \cdot x^3 \cdot 5^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 5^3 + 5 \cdot x \cdot 5^4 + 5^5 = x^5 + 5^5,$$

odakle sređivanjem dobivamo jednadžbu $25x^4 + 250x^3 + 1250x^2 + 3125x = 0$.

Faktorizacijom izraza na lijevoj strani jednadžbe dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} 25x\left(x^3 + 10x^2 + 50x + 125\right) &= 0 \\ 25x\left((x+5)\left(x^2 - 5x + 25\right) + 10x(x+5)\right) &= 0 \\ 25x(x+5)\left(x^2 + 5x + 25\right) &= 0. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednadžbe dobivamo da su rješenja dana jednadžbe:

$$x_1 = 0, x_2 = -5, x_3 = \frac{-5 + 5\sqrt{3}i}{2}, x_4 = \frac{-5 - 5\sqrt{3}i}{2}.$$

Zadatak B-4.2.

Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\log_{x^2-4}\left(x^2 - 4x + 3\right)}$.

Rješenje.

Kako baza logaritma ovisi o x trebamo razmotriti slučajeve $x^2 - 4 > 1$ i $0 < x^2 - 4 < 1$. U prvom je slučaju logaritamska funkcija rastuća, a u drugom padajuća.

Prvi slučaj.

Ako je $x^2 - 4 > 1$, onda je $x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{5} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{5}, +\infty \right\rangle$. $(\star)$

Izraz pod korijenom mora biti nenegativan, tj. $\log_{x^2-4}(x^2-4x+3) \geqslant 0$, odnosno $x^2-4x+2 \geqslant 0$, odakle je $x \in \left\langle -\infty, 2-\sqrt{2} \right] \cup \left[2+\sqrt{2}, +\infty \right\rangle$. $(\star\star)$

Konačno, logaritamska funkcija je definirana za pozitivne vrijednosti pa mora vrijediti $x^2 - 4x + 3 > 0$, no taj je uvjet ispunjen čim vrijedi $(\star\star)$. Dakle, rješenje prvog slučaja je presjek uvjeta $(\star)$ i $(\star\star)$, a to je $x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{5} \right\rangle \cup \left[2+\sqrt{2}, +\infty \right\rangle$.

Drugi slučaj.

Sada je $0 < x^2 - 4 < 1$, odakle je $2 < |x| < \sqrt{5}$, tj. $x \in \left\langle -\sqrt{5}, -2 \right\rangle \cup \left\langle 2, \sqrt{5} \right\rangle$. $(\triangle)$

Logaritamska funkcija je definirana za pozitivne vrijednosti, pa mora biti $x^2 - 4x + 3 > 0$, tj. $x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$. $(\triangle\triangle)$
Nadalje, izraz pod korijenom mora biti nenegativan, pa je $\log_{x^2-4}(x^2 - 4x + 3) \geqslant 0$, tj. $x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$. Rješnje ove nejednadžbe je $x \in \left[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right]$. $(\triangle\triangle\triangle)$
Presjek uvjeta $(\triangle)$, $(\triangle\triangle)$ i $(\triangle\triangle\triangle)$ je prazan pa je rješenje drugog slučaja prazan skup.

Domena funkcije je dakle $\mathcal{D}_f = \left\langle -\infty, -\sqrt{5}\right\rangle \cup \left[2 + \sqrt{2}, +\infty\right\rangle$.

Zadatak B-4.3.

Odredite sve polinome P s realnim koeficijentima za koje je jednakost

$$x \cdot P(x-1) = (x - 2023) \cdot P(x)$$

ispunjena za sve realne brojeve x.

Rješenje.

Kako jednakost $x \cdot P(x-1) = (x - 2023) \cdot P(x)$ vrijedi za sve realne brojeve x uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo $0 \cdot P(-1) = -2023 \cdot P(0)$, odakle slijedi da je $P(0) = 0$. Nadalje, za $x = 1$ dobivamo $1 \cdot P(0) = -2022 \cdot P(1)$, odakle slijedi da je $P(1) = 0$. Uvrštavanjem $x = 2$ u zadanu jednakost dobivamo $2 \cdot P(1) = -2021 \cdot P(2)$, odakle je i $P(2) = 0$.

Induktivno, za $x = 2022$ dobivamo da je $2022 \cdot P(2021) = -1 \cdot P(2022)$, pa je $P(2022) = 0$.

Kako su $0, 1, 2, \ldots, 2022$ nultočke polinoma P, polinom P možemo pisati u obliku $P(x) = x \cdot (x-1)(x-2) \cdots (x-2022) \cdot Q(x)$, za neki polinom Q.

Uvrstimo li sada ovaj raspis polinoma P u početnu jednakost, dobivamo

$$x \cdot (x-1)(x-2) \cdots (x-2022) \cdot (x-2023) \cdot Q(x-1) = (x-2023) \cdot x \cdot (x-1)(x-2) \cdots (x-2022) \cdot Q(x),$$

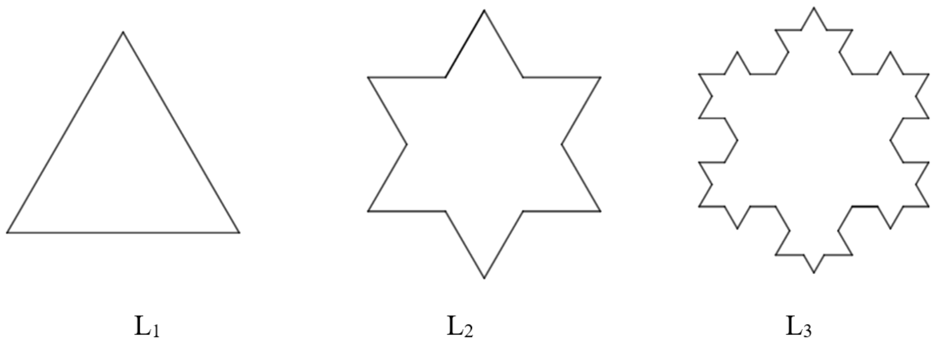
odakle slijedi da je $Q(x-1) = Q(x)$ za sve realne brojeve x. Jedini polinomi s ovim svojstvom su konstante. Stoga je $Q(x) = c$, za neki $c \in \mathbb{R}$.

Svi polinomi s traženim svojstvom su oblika

$$P(x) = c \cdot x \cdot (x-1)(x-2) \cdots (x-2022),\ c \in \mathbb{R}.$$

Zadatak B-4.4.

Zadani su geometrijski likovi L_1, L_2, L_3, $\ldots$. Lik L_1 jednakostranični je trokut površine 1. Svaki sljedeći lik nastaje tako da se svaka od stranica prethodnog lika podijeli na tri jednaka dijela i iznad srednjeg dijela konstruira novi jednakostranični trokut. Nakon konstrukcije jednakostraničnog trokuta briše se srednji dio iznad kojeg je napravljena konstrukcija (vidi sliku).



Odredite površinu n-tog lika L_n konstruiranog na opisani način.

Rješenje.

Prvi lik ima tri stranice. Podijelimo li svaku od stranica jednakostraničnog trokuta na tri jednaka dijela i iznad srednjeg dijela konstruiramo jednakostranični trokut, te nakon toga srednji dio obrišemo, drugi lik imati će $3 \cdot 4 = 12$ stranica. Nastavimo li opisani postupak, slijedi da je broj stranica trećeg lika $3 \cdot 4^2$, četvrtog $3 \cdot 4^3$, itd. Dakle, n-ti lik ima $3 \cdot 4^{n-1}$ stranica.

Znamo da je površina prvog lika 1. Površinu drugog lika dobijemo tako da površini prvog trokuta pribrojimo površine tri manja trokuta čije su stranice tri puta manje od stranica prvog trokuta. Kako je riječ o sličnim trokutima s koeficijentom sličnosti $\frac{1}{3}$, površina svakog manjeg trokuta je $\frac{1}{3^2}$, pa je površina drugog lika jednaka $P_2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{3}$.
Usporedimo li sada drugi i treći lik vidimo da je na drugi lik dodano $3 \cdot 4 = 12$ manjih trokuta čije su površine $\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3^2}$. Stoga je površina trećeg lika jednaka $P_3 = P_2 + 12 \cdot \frac{1}{3^4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}$.
Nastavimo li dalje opisani postupak, dobivamo da je površina četvrtog lika jednaka $P_4 = P_3 + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^6} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5}$, odnosno općenito

$$P_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \cdots + \frac{4^{n-2}}{3^{2n-3}}.$$

Uočimo da je $\frac{1}{3}, \frac{4}{3^3}, \frac{4^2}{3^5}, \ldots$ geometrijski niz s količnikom $\frac{4}{9}$. Prema tome, površinu n-tog lika računamo kao zbroj površine prvog lika i $(n-1)$-te sume geometrijskog niza:

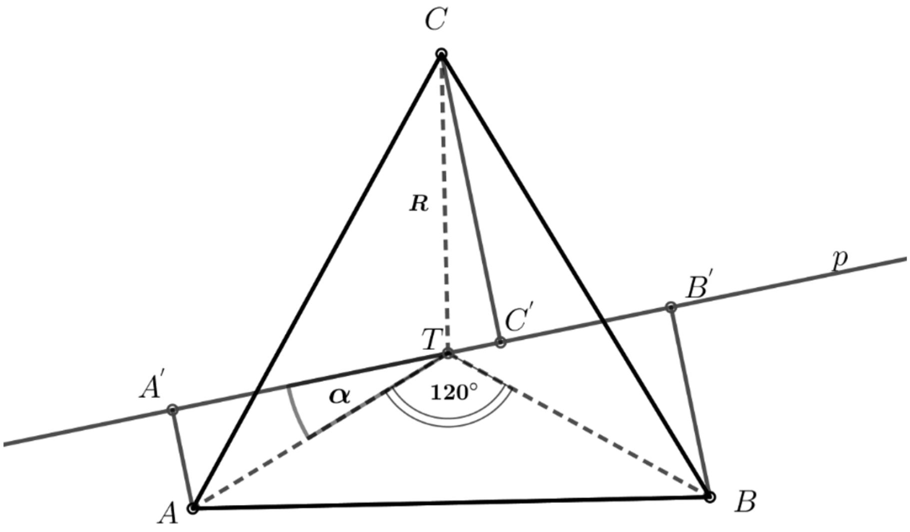
$$S_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Dakle, površina n-tog lika je $P_n = 1 + S_n = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$.

Zadatak B-4.5.

Težištem jednakostraničnog trokuta stranice a prolazi proizvoljni pravac. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta do tog pravca konstantan, to jest ne ovisi o izboru pravca.

Prvo rješenje.



Neka su A', B', C' ortogonalne projekcije točaka A, B, C na pravac p te neka je $\sphericalangle ATA' = \alpha$. Kako je $\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = 120°$, slijedi da je $\sphericalangle BTB' = 60° - \alpha$, $\sphericalangle CTC' = 60° + \alpha$.

Točka T je ujedno i središte trokutu opisane kružnice pa je $|AT| = |BT| = |CT| = R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Sada iz pravokutnih trokuta ATA', BTB', CTC' slijedi

$$\begin{aligned}
|AA'| &= |AT| \cdot \sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}\sin\alpha \\
|BB'| &= |BT| \cdot \sin(60° - \alpha) = \frac{a\sqrt{3}}{3}\sin(60° - \alpha) \\
|CC'| &= |CT| \cdot \sin(60° + \alpha) = \frac{a\sqrt{3}}{3}\sin(60° + \alpha)\,.
\end{aligned}$$

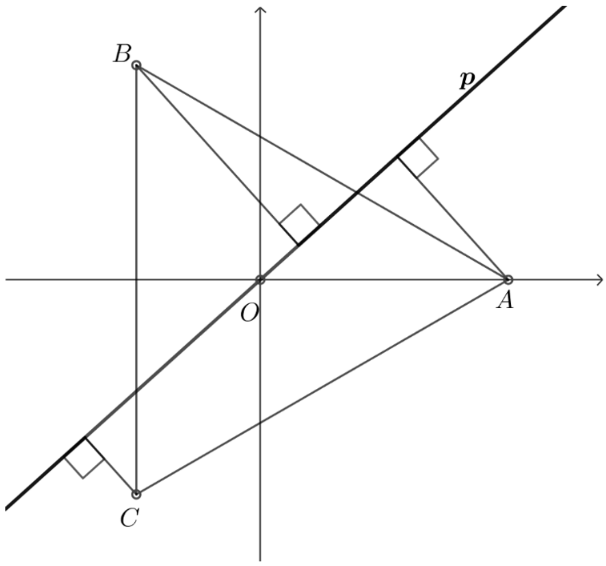
Štoviše, primjenom formule $\sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$ te adicijskih formula za kosinus zbroja i razlike imamo redom:

$$\begin{aligned}
|AA'|^2 + |BB'|^2 + |CC'|^2 &= R^2 \cdot \left[\sin^2\alpha + \sin^2(60° - \alpha) + \sin^2(60° + \alpha)\right] \\
&= \frac{a^2}{3} \cdot \left[\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos(120° - 2\alpha)}{2} + \frac{1-\cos(120° + 2\alpha)}{2}\right] \\
&= \frac{a^2}{3} \cdot \frac{[3 - \cos 2\alpha - 2\cos 120° \cos 2\alpha]}{2} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{a^2}{2},
\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Drugo rješenje.

Smjestimo jednakostranični trokut u koordinatni sustav tako da mu je težište u ishodištu koordinatnom sustava, te da vrh A leži na pozitivnom dijelu osi x. Tada vrhovi trokuta imaju koordinate $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}\right)$ i $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}, -\frac{a}{2}\right)$.



Povucimo kroz ishodište proizvoljni pravac kao na slici. Jednadžba tog pravca je $y = kx$, tj. $kx - y = 0$.

Primjenom formule za udaljenost točke od pravca dobivamo da je traženi zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta od pravca p jednak:

$$d = \left(\frac{k \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{a}{2} - k \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{2} - k \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2.$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$d = \frac{\frac{1}{3}k^2a^2 + 2 \cdot \frac{1}{12}k^2a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4}}{k^2+1} = \frac{\frac{1}{2}a^2 \cdot (k^2+1)}{k^2+1} = \frac{1}{2}a^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Provjerimo tvrdnju iz zadatka i u slučaju da težištem prolazi pravac $x = 0$. Tada je

$$d = \left|\frac{a\sqrt{3}}{3}\right|^2 + \left|-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right|^2 + \left|-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right|^2 = \frac{12a^2 + 3a^2 + 3a^2}{36} = \frac{1}{2}a^2,$$

pa tvrdnja vrijedi za sve pravce koji prolaze težištem trokuta.