DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve trojke (p, q, r) prostih brojeva za koje vrijedi $pq + r = 1 + rp + qr$.

Rješenje.

Ako su sva tri broja p, q i r neparna, izraz s lijeve strane je paran, a s desne neparan. Prema tome, barem jedan od brojeva je paran, što je moguće tek ako je jedan od njih jedan 2. Razlikujemo tri slučaja: $p = 2$, $q = 2$ i $r = 2$.

Ako je $p = 2$, uvrštavanjem i raspisivanjem imamo

$$\begin{gathered}2q + r = 1 + 2r + qr \\ qr + r - 2q = -1 \\ r(q+1) - 2(q+1) = -1 - 2 \\ (q+1)(r-2) = -3.\end{gathered}$$

Kako su q i r prosti, posebno su veći ili jednaki od 2, pa s lijeve strane imamo umnožak nenegativnih brojeva, a s desne strane nalazi se negativan broj. Dolazimo do kontradikcije, u ovom slučaju nemamo rješenja.

Slučaj $q = 2$ simetričan je slučaju $p = 2$, pa ni u ovom slučaju nema rješenja.

Ako je $r = 2$, uvrštavanjem i raspisivanjem slijedi

$$\begin{gathered}pq + 2 = 1 + 2p + 2q \\ pq - 2p - 2q = -1 \\ p(q-2) - 2(q-2) - 4 = -1 \\ (p-2)(q-2) = 3.\end{gathered}$$

S lijeve strane ponovno imamo umnožak nenegativnih brojeva. Broj 3 je prost, pa se može faktorizirati samo kao $3 = 1 \cdot 3$, što ostavlja dvije mogućnosti. Ako je $p - 2 = 3$ i $q - 2 = 1$, slijedi $p = 5$ i $q = 3$. Ako je $p - 2 = 1$ i $q - 2 = 3$, slijedi $p = 3$ i $q = 5$. U oba slučaja p i q su prosti brojevi.

Zaključujemo da su sva tražena rješenja $(p, q, r) = (3, 5, 2)$ i $(p, q, r) = (5, 3, 2)$.

Zadatak A-1.2.

Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$a^2 + b^2 + |ab - 1| + |ab - 4|$$

za neke realne brojeve a i b.

Rješenje.

Neka je $S := a^2 + b^2 + |ab - 1| + |ab - 4|$. Promatranjem predznaka izraza $ab - 1$ i $ab - 4$ razlikujemo tri slučaja.

Neka je u prvom slučaju $ab \geqslant 4$. Tada su izrazi u obje zagrade početnog izraza nenegativni, pa on postaje
$$S = a^2 + b^2 + ab - 1 + ab - 4 = (a - b)^2 - 5 + 4ab.$$

Najmanja vrijednost koju kvadrat realnog broja može postići je 0 (i to je kada su a i b jednaki), dok nužno imamo i $ab \geqslant 4$. Zato je najmanja vrijednost izraza u ovom slučaju jednaka $0 - 5 + 4 \cdot 4 = 11$, i ona se postiže kada je $a = b$ i $ab = 4$, odnosno kada je $a = b = 2$.

U drugom slučaju imamo $1 \leqslant ab \leqslant 4$. Tada početni izraz slično kao u prvom slučaju postaje

$$S = a^2 + b^2 + ab - 1 - (ab - 4) = a^2 + b^2 + 3 = (a - b)^2 + 3 + 2ab \geqslant 0 + 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

Minimum se postiže kada je $a = b$ i $ab = 1$, odnosno za $a = b = 1$.

U trećem slučaju imamo $ab \leqslant 1$, a početni izraz postaje

$$S = a^2 + b^2 - (ab - 1) - (ab - 4) = (a - b)^2 + 5 \geqslant 5.$$

Minimum se postiže za svaka dva međusobno jednaka realna broja a i b kojima je umnožak manji ili jednak 1.

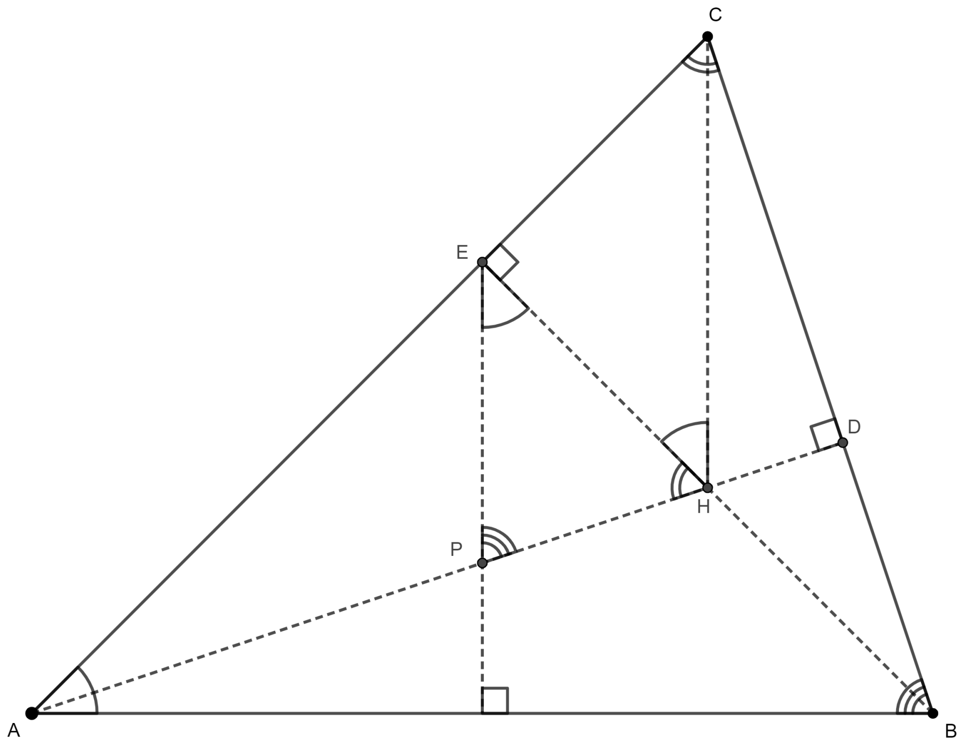
Prema tome, najmanja vrijednost koju može poprimiti izraz $a^2 + b^2 + |ab - 1| + |ab - 4|$ je 5.

Zadatak A-1.3.

Dan je trokut ABC u kojem je $\sphericalangle BAC = 45°$, $|AB| = 4$, $|AC| = 3\sqrt{2}$. Neka su $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ visine tog trokuta. Okomica na $\overline{AB}$ kroz točku E siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki P.

Odredi $|EP|$.

Prvo rješenje.



U pravokutnom trokutu ABE imamo $\sphericalangle BAE = 45°$, pa možemo zaključiti da je to jednakokračan pravokutan trokut. Iz $|AB| = 4$ zaključujemo

$$|AE| = |BE| = 2\sqrt{2}.$$

Slijedi $|EC| = |AC| - |AE| = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Neka je H ortocentar trokuta ABC. Uočimo da vrijedi $\sphericalangle CHE = \sphericalangle BAC = 45°$, jer su to kutovi s okomitim krakovima. Prema tome, trokut CEH također je jednakokračni pravokutni trokut, pa vrijedi $|EH| = |EC| = \sqrt{2}$.

Također možemo zaključiti da vrijedi $\sphericalangle PEH = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle EHP = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle EPH = \sphericalangle CBA$, jer su to parovi kutova s okomitim krakovima. Prema K–K poučku o sličnosti možemo zaključiti da su trokuti EPH i ABC slični. Zato vrijedi

$$\frac{|EP|}{|EH|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

odakle je

$$|EP| = \frac{|AB|}{|AC|}|EH| = \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3}.$$

Drugo rješenje.

Neka je H ponovno ortocentar trokuta ABC. Iz Talesovog teorema za usporedne pravce EP i CH slijedi

$$\frac{|EP|}{|CH|} = \frac{|AE|}{|AC|}.$$

Kao u prošlom rješenju primjećujemo da su trokuti ABE i CEH jednakokračni pravokutni trokuti, te redom dobivamo

$$|AE| = 2\sqrt{2}, \quad |EC| = \sqrt{2}, \quad |CH| = |EC|\sqrt{2} = 2,$$

pa je

$$|EP| = \frac{|AE|}{|AC|}|CH| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Zadatak A-1.4.

Za realne brojeve a, b i c vrijedi

$$abc = -1, \qquad a+b+c=4 \qquad \text{i}$$

$$\frac{a}{a^2-3a-1} + \frac{b}{b^2-3b-1} + \frac{c}{c^2-3c-1} = \frac{4}{9}.$$

Dokaži da je $a^2+b^2+c^2 = \dfrac{33}{2}$.

Rješenje.

Uočimo da iz $abc = -1$ slijedi da nijedan od brojeva a, b, c nije jednak nuli.

Uvrštavanjem $abc = -1$ i $a = 4-b-c$ (odnosno $a-3 = 1-b-c$) u nazivnik prvog pribrojnika dobivamo

$$\frac{a}{a^2-3a-1} = \frac{a}{a^2-3a+abc} = \frac{1}{a-3+bc} = \frac{1}{(1-b-c)+bc} = \frac{1}{(b-1)(c-1)}.$$

Analogno dobijemo

$$\frac{b}{b^2-3b-1} = \frac{1}{(a-1)(c-1)} \quad \text{i} \quad \frac{c}{c^2-3c-1} = \frac{1}{(a-1)(b-1)}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\frac{4}{9} &= \frac{a}{a^2-3a-1} + \frac{b}{b^2-3b-1} + \frac{c}{c^2-3c-1} \\
&= \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(a-1)(c-1)} + \frac{1}{(a-1)(b-1)} \\
&= \frac{(a-1)+(b-1)+(c-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{a+b+c-3}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)},
\end{aligned}$$

odnosno

$$(a-1)(b-1)(c-1) = \frac{9}{4}.$$

Kako vrijedi

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1\\ &= -1 - ab - ac - bc + 4 - 1\\ &= 2 - ab - ac - bc,\end{aligned}$$

možemo zaključiti

$$ab + ac + bc = 2 - (a-1)(b-1)(c-1) = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Konačno, vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 4^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 16 + \frac{1}{2} = \frac{33}{2},$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak A-1.5.

Neka je n prirodni broj. Dana su dva jednaka kompleta od po n kartica s oznakama od 1 do n. Na stol su nekim redom slijeva nadesno posložene sve kartice prvog kompleta, a u nastavku istim redom sve kartice drugog kompleta. Kažemo da je takav poredak kartica *dobar* ako je moguće odabrati i ukloniti nekih n kartica tako da preostane n kartica s brojevima od 1 do n poredanih u rastućem poretku slijeva nadesno. Koliko ima dobrih rasporeda kartica?

Rješenje.

Uočimo da je $1, 2, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots, n-1, n$ jedan dobar raspored. Za taj raspored možemo na $n+1$ način ukloniti n kartica tako da preostanu brojevi 1 do n slijeva nadesno (uklanjamo bilo kojih n uzastopnih kartica). Za svaki drugi dobar raspored moraju preostati neke kartice iz prvog kompleta i neke kartice iz drugog.

Promotrimo jedan takav dobar raspored kartica. Neka je k najveći broj koji preostane na stolu iz prvog kompleta, tj. neka su iz prvog kompleta preostale kartice s oznakama od 1 do k, a iz drugog kompleta od $k+1$ do n. Broj k može biti bilo koji prirodan broj za koji vrijedi $k < n$.

Budući da su oba kompleta bila posložena u istom poretku, u prvom kompletu su kartice od $k+1$ do n također morale biti u rastućem poretku slijeva nadesno. Dakle, poredak kartica u prvom kompletu (pa onda i u drugom kompletu) se sastoji od dva rastuća niza - jedan je od 1 do k, a drugi od $k+1$ do n.

Zamislimo da su kartice na kojima su oznake od 1 do k crvene, a preostale kartice plave. Broj k i raspored kartica je jednoznačno određen jednom kad za kartice prvog kompleta odaberemo koje su crvene, a koje plave. Pritom su svi rasporedi boja dopušteni, osim da su sve kartice iste boje ili da se sve crvene kartice nalaze ispred svih plavih kartica jer bismo tada dobili raspored $1, 2, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots, n$.

Preostaje prebrojati na koliko načina možemo obojiti kartice na dopuštene načine. Svih mogućih bojenja ima 2^n jer za svaku karticu možemo odabrati jednu od dvije boje, ali točno $n+1$ bojenja nije dopušteno – ona bojenja u kojima je k crvenih, pa $n-k$ plavih kartica za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Kad uračunamo još i dobar raspored $1, 2, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots, n$, zaključujemo da je broj dobrih rasporeda $2^n - n$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak A-2.1.

Odredi polumjer osnovke stošca čija je izvodnica duljine 1, tako da razlika površina njegovog plašta i njegove osnovke bude maksimalna.

Rješenje.

Neka je r polumjer osnovke stošca, te neka je plašt stošca kružni isječak određen radijusom 1 i kutom α.

Budući da se opseg osnovke podudara kružnim lukom nad kutom α, slijedi

$$2r\pi = \pi\frac{\alpha}{180^\circ}.$$

Površina osnovke je $B = r^2\pi$, a površina plašta je

$$P = \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = r\pi.$$

Tražena razlika površina je $P - B = \pi\left(r - r^2\right)$, što je kvadratna funkcija po r. Ona poprima maksimum u apscisi tjemena, tj. za $r = \dfrac{1}{2}$. U tom slučaju kut kružnog isječka iznosi $\alpha = 180^\circ$.

Dakle, traženi polumjer osnovke za koje je razlika površine plašta i osnovke maksimalna je $\dfrac{1}{2}$.

Zadatak A-2.2.

Odredi, ako postoje, racionalne brojeve a i b tako da jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$ bude $\sqrt{3+\sqrt{8}}$.

Prvo rješenje.

Neka je $x_1 = \sqrt{3+\sqrt{8}}$ rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$.

Uočimo da je

$$x_1 = \sqrt{1^2 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Uspoređujući s formulom za rješenja kvadratne jednadžbe, dobivamo

$$\frac{-a + \pm\sqrt{a^2 - 4b}}{2} = x_1 = 1 + \sqrt{2} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}.$$

Kako su a i b racionalni, racionalan je i izraz $a^2 - 4b$, pa zaključujemo da u prvom izrazu gornje jednakosti stoji znak $+$, te da vrijedi

$$-a = 2 \quad \text{i} \quad a^2 - 4b = 8.$$

Iz prve jednakosti zaključujemo da je $a = -2$, a iz druge $b = -1$, pa su to traženi racionalni brojevi.

Drugo rješenje.

Uvrštavanjem $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ u danu kvadratnu jednadžbu pa kvadriranjem dobivamo

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2 + a\sqrt{3+\sqrt{8}} + b = 0$$
$$a\sqrt{3+\sqrt{8}} = -\left(3+b+\sqrt{8}\right)$$
$$a^2\left(3+\sqrt{8}\right) = (3+b)^2 + 2(3+b)\sqrt{8} + 8$$
$$(a^2-2b-6)\sqrt{8} = 8 + (3+b)^2 - 3a^2$$

Budući da je $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ iracionalan broj, a svi ostali brojevi u gornjem izrazu racionalni, zaključujemo da je

$$a^2 - 2b - 6 = 0 \quad \text{i} \quad 8 + (3+b)^2 - 3a^2 = 0.$$

Uvrštavanjem a^2 iz prve jednadžbe u drugu i sređivanjem dobivamo $b^2 = 1$, odnosno $b = \pm 1$.

Za $b = 1$ slijedi $a^2 = 8$, no to vodi na kontradikciju jer u tom slučaju a nije racionalan broj.

Za $b = -1$ dobijemo $a^2 = 4$, tj. $a = \pm 2$.

Ponovnim uvrštavanjem broja $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ u kvadratnu jednadžbu vidimo da izraz

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2 + a\sqrt{3+\sqrt{8}} + b = 3 + \sqrt{8} + a\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1 = 2 + \sqrt{8} + a\sqrt{3+\sqrt{8}}$$

može biti jednak nuli tek ako je $a = -2$ (u slučaju $a = 2$ gornji je izraz zbroj pozitivnih brojeva, koji je strogo veći od nule).

Direktnom provjerom vidimo da brojevi $a = -2$ i $b = -1$ zaista zadovoljavaju uvjete zadatka, pa su to traženi racionalni brojevi.

Zadatak A-2.3.

Manda je, za odabrani prirodni broj $n > 3$, izradila sve stranice i sve dijagonale pravilnog n-terokuta od tankog pruća. Zatim je Ivan tih $\frac{1}{2}n(n-1)$ štapova podijelio u grupe po tri štapa tako da se od svake grupe može napraviti trokut.

Za koje je brojeve n to moguće?

Prvo rješenje.

Uočimo da je broj $\frac{1}{2}n(n-1)$ nužno djeljiv s 3, kako bi se štapovi mogli podijeliti u grupe po tri štapa. Dakle, n nužno daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 3.

Pokažimo da je za takve n-ove to uvijek moguće postići.

Za $n = 4$ možemo podijeliti štapove u dvije grupe koje se sastoje od dvije stranice kvadrata i jedne dijagonale te je od njih očito moguće sastaviti dva sukladna jednakokračna pravokutna trokuta. Nadalje, pretpostavimo da je $n \geqslant 6$ broj koji daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 3.

Neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ sve duljine štapova na raspolaganju. Sve duljine, osim možda zadnje, javljaju se točno n puta u pravilnom n-terokutu, dok se duljina a_k najveće dijagonale pojavljuje $\frac{n}{2}$ puta (ako je n paran) ili n puta (ako je n neparan).

Uočimo da za pozitivne realne brojeve a i b takve da je $a > b$ možemo sastaviti jednakokračni trokut sa stranicama duljine a, a i b. Zaista, očito vrijede nejednakosti

$$a + a > b \quad \text{i} \quad a + b > b.$$

Podjelu na grupe vršimo počevši s najvećim duljinama a_k. Ako štapova duljina a_k imamo parno mnogo, tada ih sve rasporedimo u grupe koje se sastoje od duljina a_k, a_k i a_{k-1}. Budući da je $a_k > a_{k-1}$, od takvih duljina moguće je sastaviti trokut. S druge strane, ako štapova duljina a_k ima neparno mnogo, tada napravimo jednu grupu koja se sastoji od tri duljine a_k, a ostale rasporedeimo u grupe koje se sastoje od duljina a_k, a_k i a_{k-1}.

Kako je broj štapova duljina a_k barem $\frac{n}{2} \geqslant 3$, gornju podjelu u grupe uvijek možemo provesti, neovisno o parnosti tog broja.

Nakon ovog koraka preostali će broj duljina a_{k-1} ponovo biti barem $\frac{n}{2} \geqslant 3$ jer su u gornjoj podjeli one sudjelovale u najviše $\frac{n}{2}$ tročlanih grupa štapova (na početku ih je bilo n). Zato prethodni korak sada možemo ponoviti za preostale duljine a_{k-1}, pa nakon toga za duljine a_{k-2} i tako sve do duljine a_2.

Nakon svih tih koraka su nam preostale samo još neke od duljina a_1 koje trebamo podijeliti u tročlane grupe. Broj duljina a_1 koji nam je preostao nužno je djeljiv s 3 jer je broj svih štapova na početku bio djeljiv s 3. Zato sve preostale duljine a_1 možemo podijeliti u tročlane grupe.

Time smo sve štapove podijelili u grupe od po tri štapa s kojima je moguće napraviti trokut, te su zaista takvi brojevi svi prirodni brojevi $n > 3$ koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 0 ili 1.

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, zaključujemo da je n nužno oblika $3m$ ili $3m + 1$ za neki $m \in \mathbb{N}$, te da imamo po n duljina štapova $a_1 < \ldots < a_k$ na raspolaganju, osim možda $a_k = \frac{n}{2}$ u slučaju parnog broja n.

Ako je n djeljiv s 3, svi brojevi $a_1, \ldots, a_k$ djeljivi su s 3, pa od svih štapova možemo napraviti jednakostranične trokute. Zato pretpostavljamo da je n oblika $3m + 1$.

U pravilnom mnogokutu $A_1A_2 \ldots A_n$ primjećujemo da su za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ duljine stranica trokuta $A_1A_2A_{i+2}$ jednake a_1, a_i, a_{i+1}. Posebno, za te duljine vrijede nejednakosti trokuta. Zato za sve takve indekse $i \geqslant 2$ vrijedi i

$$a_{i-1} + a_i \geqslant a_1 + a_i > a_{i+1},$$

pa zaključujemo da i od štapova duljina a_{i-1}, a_i i a_{i+1} možemo sastaviti trokut.

Ako je n neparan broj oblika $3m+1$, tada je broj k (broj različitih duljina štapova) nužno djeljiv s 3 (budući da je broj svih duljina štapova djeljiv s 3). Za svaku od tih duljina na raspolaganju imamo $n = 3m + 1$ štapova. U tom slučaju ćemo napraviti po jednu grupu štapova duljina a_{3i+1}, a_{3i+2} i a_{3i+3} $(0 \leqslant i < \frac{k}{3})$. Nakon toga nam je preostalo $3m$ štapova svake duljine, pa kao u prethodnom slučaju od svih štapova stvorimo jednakostranične trokute.

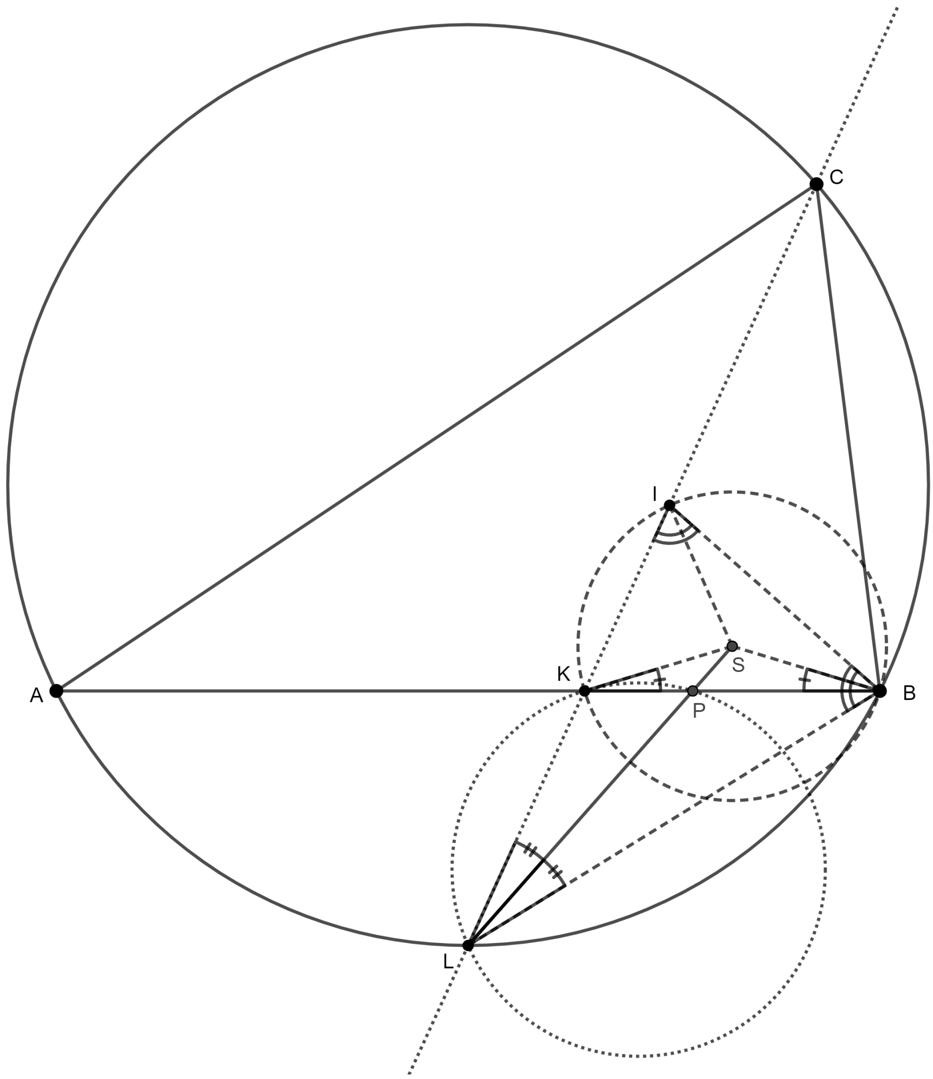
Neka je na kraju n paran broj oblika $3m+1$, odnosno $n = 6l+4$, za neki $l \in \mathbb{N}_0$. Posebno, broj štapova duljina a_{k-1} je $n = 6l + 4$ i daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, dok broj štapova a_k daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Zato je ukupan broj štapova duljina a_k ili a_{k-1} djeljiv s 3, ali i broj svih preostalih štapova (čije su duljine manje ili jednake a_{k-2}) djeljiv s 3. Slično kao u slučaju neparnog broja n oblika $3m + 1$, zaključujemo da je broj $k - 2$ djeljiv s 3, pa štapove duljina manjeg ili jednakog a_{k-2} podijelimo kao u prošlom slučaju (prvo grupe štapova duljina a_{3i+1}, a_{3i+2} i a_{3i+3}, a zatim na jednakostranične trokute). Za duljine a_k i a_{k-1} prvo napravimo jedan trokut duljina a_k, a_k i a_{k-1} (da je to moguće argumentiramo slično kao ranije), a onda od svih ostalih štapova napravimo jednakostranične trokute, budući da je preostalo $3m$ štapova duljina a_{k-1} i $6m$ štapova duljina a_k.

Ovime smo pokrili sve slučajeve, te su zaista takvi brojevi svi prirodni brojevi $n > 3$ koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 0 ili 1.

Zadatak A-2.4.

Simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ siječe stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC u točki K, a opisanu kružnicu u točki L (L je različito od C). Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a S središte opisane kružnice trokuta IKB. Neka je P sjecište pravca SL i stranice $\overline{AB}$. Dokaži da je pravac SK tangenta kružnice opisane trokutu KLP.

Prvo rješenje.



Označimo s α, β i γ mjere kutove trokuta ABC u vrhovima A, B i C redom.

Kut $\sphericalangle LIB$ vanjski je u trokutu IBC, pa vrijedi

$$\sphericalangle LIB = \sphericalangle IBC + \sphericalangle BCI = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Iz obodnih kutova nad tetivom $\overline{AL}$ kružnice opisane trokutu ABC dobivamo da je $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ACL = \frac{\gamma}{2}$. Za kut $\sphericalangle IBL$ vrijedi

$$\sphericalangle IBL = \sphericalangle IBA + \sphericalangle ABL = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle LIB,$$

pa zaključujemo da je trokut LBI jednakokračan, pa je $|LB| = |LI|$. Također, iz tog trokuta imamo $\sphericalangle ILB = \alpha$.

Točka S središte je opisane kružnice trokutu IKB, pa i za nju vrijedi $|SB| = |SI|$. Kako su točke S i L obje jednako udaljene od točaka I i B, zaključujemo da je pravac LS simetrala dužine $\overline{BI}$.

Kako je trokut LBI jednakokračan, pravac LS ujedno je i simetrala kuta $\sphericalangle ILB$. Zato je

$$\sphericalangle SLI = \frac{1}{2}\sphericalangle ILB = \frac{\alpha}{2}.$$

Iz jednakokračnog trokuta KBS imamo $\sphericalangle BKS = \sphericalangle SBK = \frac{\alpha}{2}$, pa konačno imamo

$$\sphericalangle PLK = \sphericalangle SLI = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle BKS = \sphericalangle PKS,$$

pa prema obratu teorema o kutu između tetive i tangente slijedi da je SK tangenta na opisanu kružnicu trokutu KLP.

Drugo rješenje.

Označimo ponovno s α, β i γ mjere kutove trokuta ABC.

U jednakokračnom trokutu KSB vrijedi $\sphericalangle BKS = \sphericalangle SBK = \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle KSB = \beta + \gamma$.

Koristeći obodne kuteve nad tetivom $\overline{BC}$ u kružnici opisanoj trokutu ABC možemo izračunati

$$\sphericalangle BLK = \sphericalangle BLC = \sphericalangle BAC = \alpha.$$

Uočimo da je $\sphericalangle BLK + \sphericalangle KSB = \alpha + \beta + \gamma = 180°$, pa je zato četverokut $LBSK$ tetivan.

Koristeći novodobivenu tetivnost (obodne kutove nad tetivom $\overline{SK}$) i činjenicu da je trokut KSB jednakokračan, dobivamo

$$\sphericalangle PLK = \sphericalangle SLK = \sphericalangle SLK = \sphericalangle SBK = \sphericalangle BKS = PKS,$$

pa prema obratu teorema o kutu između tetive i tangente slijedi da je SK tangenta na opisanu kružnicu trokutu KLP.

Zadatak A-2.5.

Postoji li skup od 100 prirodnih brojeva takav da za svaka četiri elementa tog skupa njihov umnožak dijeli zbroj njihovih četvrtih potencija?

Rješenje.

Označimo s x_1, x_2, ..., x_{100} sve elemente tog skupa.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je najveći zajednički djelitelj svih elemenata skupa jednak 1 jer u suprotnom možemo sve elemente podijeliti s tim djeliteljem.

Odaberimo bilo koja dva indeksa i i j takva da je $4 \leqslant i < j \leqslant 100$. Iz uvjeta zadatka slijedi

$$x_1 \mid x_1x_2x_3x_i \mid x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_i^4 \quad \text{i} \quad x_1 \mid x_1x_2x_3x_j \mid x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_j^4.$$

Prema tome x_1 dijeli i njihovu razliku, tj. $x_1 \mid x_i^4 - x_j^4$.

Slično možemo napraviti i za manje indekse i i j, zaključiti da za sve indekse $2 \leqslant i < j \leqslant 100$ vrijedi $x_1 \mid x_i^4 - x_j^4$, odnosno svi brojevi $x_2^4, x_3^4, \ldots, x_{100}^4$ daju isti ostatak pri dijeljenju s x_1.

Iz $x_1 \mid x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$ i korištenjem gornjeg zaključka za sve $i \in \{1, \ldots, 100\}$ dobivamo $x_1 \mid x_1^4 + 3x_i^4$, odnosno $x_1 \mid 3x_i^4$. Zato zaključujemo da x_1 dijeli i najveći zajednički djelitelj svih brojeva oblika $3x_i^4$, tj.

$$x_1 \mid D(3x_1^4, 3x_2^4, \ldots, 3x_{100}^4).$$

Kako su elementi skupa relativno prosti, zaključujemo da je $D(3x_1^4, 3x_2^4, \ldots, 3x_{100}^4) = 3$, pa je zato $x_1 \in \{1, 3\}$.

Analognim možemo zaključiti da je $x_i \in \{1, 3\}$ za sve indekse i što dovodi do kontradikcije jer početni skup mora sadržavati 100 međusobno različitih elemenata. Dakle, traženi skup ne postoji.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak A-3.1.

Koliko ima prirodnih brojeva n za koje postoji trokut sa stranicama duljina

$$3, \quad \log_2 n \quad \text{i} \quad \log_4 n \quad ?$$

Rješenje.

Kako je n prirodan broj, uočimo da su sve vrijednosti dobro definirane. Budući da mora vrijediti $\log_2 n > 0$ i $\log_4 n > 0$, slijedi da je $n \neq 1$, odnosno da je n veći od 1.

Uočimo da sve izraze možemo zapisati koristeći logaritam s bazom 2:

$$\log_4 n = \log_{2^2} n = \frac{1}{2}\log_2 n, \quad 3 = \log_2 8$$

Duljine stranica zadovoljavaju nejednakost trokuta, odnosno vrijedi

$$\log_2 n + \log_4 n > 3, \quad \log_2 n + 3 > \log_4 n \quad \text{i} \quad \log_4 n + 3 > \log_2 n.$$

Iz prve nejednakosti imamo $\log_2 n + \frac{1}{2}\log_2 n > 3$, odnosno $\log_2 n > 2$, odakle je $n > 4$.

Iz druge nejednakosti imamo $\log_2 n + \log_2 8 > \frac{1}{2}\log_2 n$, odnosno $\log_2 8n > \log_2 \sqrt{n}$. Slijedi $8n > \sqrt{n}$, odakle je $n > \frac{1}{64}$.

Iz treće nejednakosti imamo $\frac{1}{2}\log_2 n + \log_2 8 > \log_2 n$, odnosno $\frac{1}{2}\log_2 n < \log_2 8$. Slijedi $n < 64$.

Uzimajući u obzir sve tri nejednakosti, mora vrijediti $4 < n < 64$, pa zaključujemo da je ukupno 59 takvih prirodnih brojeva.

Zadatak A-3.2.

Označimo s $\tau(n)$ broj prirodnih djelitelja broja n. Prirodni brojevi a i b zadovoljavaju jednakost

$$a + \tau(a) = b^2 + 2.$$

Dokaži da je broj $a + b$ paran.

Rješenje.

Pretpostavimo da je $a+b$ neparan broj. To znači da su a i b različite parnosti. Iz jednadžbe zaključujemo da je tada $\tau(a)$ nužno neparan broj, što je moguće tek ako je a potpun kvadrat prirodnog broja.

Ako je $a=1$, tada jednadžba postaje $1+1=b^2+2$, što nema rješenja u prirodnim brojevima. Neka je nadalje $a=c^2$, gdje je $c>1$ prirodan broj. Jednadžba postaje

$$c^2+\tau(c^2)=b^2+2.$$

Neki djelitelji broja c^2 su 1, c i c^2, pa sigurno vrijedi $\tau(c^2)\geqslant 3$. Iz gornje jednadžbe imamo $b^2+2=a+\tau(a)\geqslant a+3=c^2+3$, odakle je nužno $b^2\geqslant c^2+1$, odnosno $b\geqslant c+1$. Uvrštavajući to u gornju jednadžbu, dobivamo

$$\tau(c^2)=b^2+2-c^2\geqslant 2c+3.$$

Broj c djelitelj je broja c^2. Promotrimo preostale njegove djelitelje, razlikujući one manje od c i veće od c. Kako postoji $c-1$ brojeva manjih od c, najviše je toliko djelitelja od c^2 manjih od c. S druge strane, za svaki djelitelj d broja c^2 veći od c broj $\dfrac{c^2}{d}$ djelitelj je broja c^2 manji od c, pa je i broj djelitelja broja c^2 većih od c također manji od $c-1$. Dobivamo

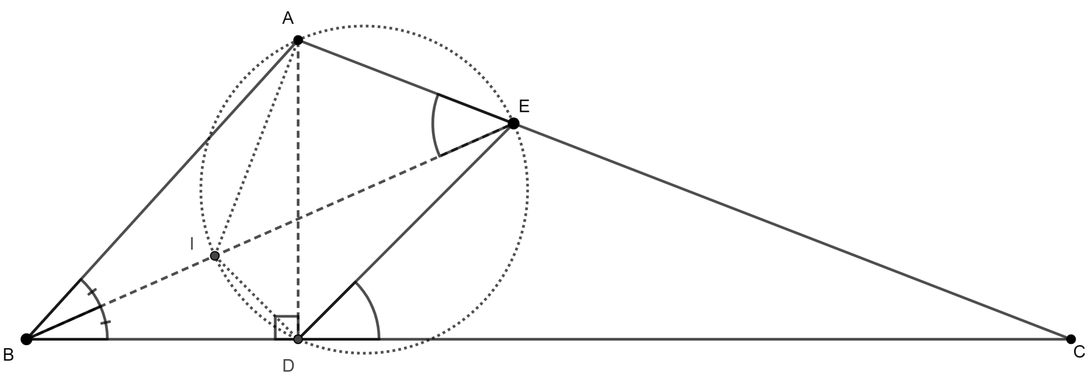
$$\tau(c^2)\leqslant(c-1)+1+(c-1)=2c-1.$$

Time smo dobivamo kontradikciju, pa zaključujemo da je $a+b$ nužno paran.

Zadatak A-3.3.

Dan je trokut ABC. Neka je točka D nožište visine iz vrha A, a točka E sjecište simetrale kuta $\sphericalangle CBA$ s nasuprotnom stranicom. Ako je $\sphericalangle BEA=45^\circ$, odredi $\sphericalangle EDC$.

Prvo rješenje.



Označimo s α, β i γ mjere kutove trokuta ABC u vrhovima A, B i C redom, te sa φ mjeru kuta $\sphericalangle EDC$. Budući da je $\sphericalangle BEA$ vanjski kut trokuta BEC, vrijedi $\sphericalangle EBC+\sphericalangle BCE=\sphericalangle BEA$, odnosno $\dfrac{\beta}{2}+\gamma=45^\circ$. Odavde je

$$\alpha=180^\circ-\beta-\gamma=180^\circ-\beta-2\gamma+\gamma=180^\circ-2\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)+\gamma=180^\circ+2\cdot45^\circ+\gamma=90^\circ+\gamma.$$

Za kutove trokuta DAE vrijedi

$$\sphericalangle EAD = 180^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle DCA = 90^\circ - \gamma,$$
$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CDA - \sphericalangle CDE = 90^\circ - \varphi.$$

Poučak o sinusima primijenjen redom na trokute DEC i DAE daje

$$\frac{|EC|}{|DE|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}, \quad \frac{|DE|}{|AE|} = \frac{\sin(90^\circ - \gamma)}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\cos\gamma}{\cos\varphi},$$

a množenjem ovih dviju jednakosti dobivamo

$$\frac{|EC|}{|AE|} = \frac{\sin\varphi\cos\gamma}{\cos\varphi\sin\gamma}.$$

S druge strane, iz činjenice da je BE simetrala kuta $\sphericalangle CBA$ te poučka o sinusima primijenjenog na trokut ABC slijedi

$$\frac{|EC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin(90^\circ + \gamma)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{\sin\varphi\cos\gamma}{\cos\varphi\sin\gamma} = \frac{|EC|}{|AE|} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma},$$

odakle je $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Budući da je kut $\sphericalangle EDC$ šiljast, zaključujemo da je mjera traženog kuta $\varphi = 45^\circ$.

Drugo rješenje.

Uz zadržavanje istih oznaka kuteva, kao i u prvom rješenju dobivamo $\frac{\beta}{2} + \gamma = 45^\circ$. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABD. Budući da je $\sphericalangle DIE$ vanjski kut trokuta BDI, vrijedi $\sphericalangle DIE = \sphericalangle IBD + \sphericalangle BDI$, odnosno

$$\sphericalangle DIE = \frac{\beta}{2} + 45^\circ = 90^\circ - \gamma = \sphericalangle ADC - \sphericalangle ACD = \sphericalangle DAE.$$

Zaključujemo da je četverokut $IDEA$ tetivan (poklapaju se kutovi nad tetivom $\overline{DE}$), pa iz jednakosti obodnih kutova nad $\overline{IA}$ slijedi

$$\sphericalangle IDA = \sphericalangle IEA = 45^\circ.$$

Budući da su pravci ID i DE (simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta trokuta ABD) okomiti, slijedi $\sphericalangle ADE = 90^\circ - \sphericalangle IDA = 45^\circ$ i konačno

$$\sphericalangle EDC = 90^\circ - \sphericalangle ADE = 45^\circ.$$

Treće rješenje.

Uz zadržavanje istih oznaka kuteva, kao i u prvom rješenju dobivamo $\frac{\beta}{2}+\gamma=45^\circ$. Sada iz pravokutnog trokuta CAD slijedi

$$\sphericalangle DAE = 90^\circ - \gamma = 45^\circ + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(90^\circ + \beta).$$

Zato je pravac AE simetrala vanjskog kuta trokuta ABD. Kako je pravac BE simetrala unutarnjeg kuta tog trokuta, zaključujemo da je točka E, presjek ta dva pravca, ujedno i središte pripisane kružnice tog trokuta nasuprot vrha B, pa je zato pravac DE simetrala vanjskog trokuta tog trokuta. Konačno imamo

$$\sphericalangle EDC = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC = 45^\circ.$$

Zadatak A-3.4.

Odredi najmanji prirodan broj n za koji postoje realni brojevi $x_1, \ldots, x_n \in [1,4]$ koji zadovoljavaju nejednakosti:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &\geqslant \frac{7}{3}\,n, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} &\geqslant \frac{2}{3}\,n. \end{aligned}$$

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da za neki prirodan broj n postoje realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji zadovoljavaju dane uvjete. Kako je $1 \leqslant x_i \leqslant 4$, vrijedi nejednakost

$$(4 - x_i)\left(1 - \frac{1}{x_i}\right) \geqslant 0,$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je x_i jednak 1 ili 4. Zbrajajući za sve i, dobivamo

$$4n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + n \geqslant 0.$$

S druge strane, iz uvjeta zadatka slijedi

$$4n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + n \leqslant 4n - \frac{7}{3}n - \frac{8}{3}n + n = 0.$$

Zaključujemo da nužno vrijedi jednakost, što je moguće tek ako su svi x_i iz skupa $\{1,4\}$.

Od n brojeva $x_1, \ldots, x_n$ neka ih $a \geqslant 0$ poprima vrijednost 1, a $b \geqslant 0$ poprima vrijednost 4. Tada je $a + b = n$, te vrijedi

$$\begin{aligned} a + 4b = x_1 + x_2 + \ldots + x_n &\geqslant \frac{7}{3}\,n = \frac{7}{3}\,a + \frac{7}{3}\,b, \\ a + \frac{1}{4}b = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} &\geqslant \frac{2}{3}\,n = \frac{2}{3}\,a + \frac{2}{3}\,b. \end{aligned}$$

Iz prve nejednakosti slijedi $4a \geqslant 5b$, a iz druge slijedi $5a \geqslant 4b$, odakle zaključujemo da je $4a = 5b$. Najmanji prirodan broj n za koji postoje takvi a i b je jednak 9 (kada je $a = 5$, $b = 4$).

Za $n = 9$ te realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$ takve da je pet među njima jednako 1, a četiri od njih je jednako 4 zadovoljavaju uvjete zadatka, pa je to zaista najmanji takav prirodan broj.

Drugo rješenje.

Nazovimo neku n-torku realnih brojeva $(x_1, \ldots, x_n)$ *dobrom* ako zadovoljava uvjete zadatka.

Uzmimo neki n i neku njegovu dobru n-torku. Neka su x_i i x_j dva broja različita od 1 i 4, te neka je $x_i \leqslant x_j$. Promotrimo n-torku u kojoj smo x_i i x_j zamijenili s $x_i - t$ i $x_j + t$, za dovoljno mali $t > 0$. Zbroj članova nove n-torke očito je nepromijenjen, a zbroj recipročnih vrijednosti se povećao jer vrijedi

$$\frac{1}{x_i - t} + \frac{1}{x_j + t} = \frac{(x_j + t) + (x_i - t)}{(x_i - t)(x_j + t)} = \frac{x_j + x_i}{x_i x_j - t(t + x_j - x_i)} \geqslant \frac{x_j + x_i}{x_i x_j} = \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_j}.$$

Dakle, novodobivena n-torka također je dobra. Uzmimo $t > 0$ takav da je $x_i - t = 1$ ili $x_j + t = 4$, tako da svi članovi n-torke ostanu u skupu $[1, 4]$. Nakon toga, ponavljajmo postupak, svaki put uzimajući dva broja x_i i x_j od kojih nijedan nije jednak 1 ili 4, i mijenjajući jednog u 1 ili 4. Na kraju dobivamo dobru n-torku u kojoj su svi članovi osim najviše jednog jednaki 1 ili 4.

Zaključujemo da ako za neki $n \in \mathbb{N}$ postoji dobra n-torka, onda postoji i dobra n-torka u kojoj su svi članovi osim možda jednog jednaki 1 ili 4.

Za takvu n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$ provedimo postupak kao u prvom rješenju: neka je među njezinim članovima njih A jednako 1, njih B jednako 4, a preostali jednak $y \in [1, 4]$. Vrijedi $A + B + 1 = n$, te

$$A + 4B + y \geqslant \frac{7}{3} A + \frac{7}{3} B + \frac{7}{3} \quad \text{i} \quad A + \frac{1}{4} B + \frac{1}{y} \geqslant \frac{2}{3} A + \frac{2}{3} B + \frac{2}{3}.$$

Zbrajajući dobivene nejednakosti, dobivamo

$$y + \frac{4}{y} \geqslant 5,$$

što je ekvivalentno s $(y - 1)(4 - y) \leqslant 0$. Kako je $y \in [1, 4]$, zaključujemo da je i preostali broj y nužno iz skupa $\{1, 4\}$. Neka je bez smanjenja općenitosti $y = 1$ (inače ažuriramo vrijednosti za A i B). Gornje nejednakosti za A, B i y daju jednakost

$$5B + 3 = 4A + 7,$$

čije je najmanje rješenje u prirodnim brojevima $A = B = 4$, pa kao u prvom rješenju zaključujemo da je najmanji takav n jednak 9.

Zadatak A-3.5.

Na ploči dimenzija 3×2023 koja je na početku prazna igra se igra za dva igrača koji naizmjence vuku poteze. U pojedinom potezu igrač odabire dva prazna polja koja se nalaze u istom retku ili istom stupcu te stavlja po jedan žeton na ta polja. Gubi igrač koji ne može odigrati dopušteni potez.

Ako Kristina igra prva, a Ana druga, koja od njih može osigurati svoju pobjedu?

Rješenje.

Neovisno o Kristininoj igri Ana može osigurati pobjedu. Nakon prvog Kristininog poteza Ana bira red u kojem se nalazi barem jedan žeton. Nazovimo taj red *posebnim.*

Ana nakon svakog svojeg poteza može osigurati sljedeće:

(i) u posebnom redu nalazi se neparno mnogo žetona;

(ii) ako se u nekom polju posebnog retka ne nalazi žeton, žeton se ne nalazi ni u ostalim poljima stupca koji to polje određuje.

Nakon prvog poteza i nakon što odabere poseban redak, Ana će postići oba gornja uvjeta tako da stavi dva žetona u poseban redak ako je Kristina prije toga stavila jedan žeton u poseban redak, odnosno tako da stavi po jedan žeton u poseban redak i neki drugi redak ako je Kristina stavila dva žetona u poseban redak.

Počevši s drugim potezom, dok god poseban redak nije ispunjen, Ana radi svoj potez ovisno o Kristininom zadnjem potezu:

- ako je Kristina stavila dva žetona u istom stupcu, od čega jedan u poseban redak, Ana može staviti ponovno staviti dva žetona u neki drugi stupac, od čega jedan u poseban redak (kako je prije Kristininog poteza neparno mnogo polja posebnog retka bilo zauzeto, zajedno sa svojstvom (ii) Ana može naći slobodan stupac);
- ako je Kristina stavila dva žetona u istom stupcu, od čega nijedan u poseban redak, Ana postavlja dva žetona u poseban redak, od čega jedan u onaj stupac u kojem je Kristina stavljala svoje žetone (slično, iz (i) i (ii) takva dva polja su slobodna);
- ako je Kristina stavila dva žetona u isti redak koji nije poseban, Ana postavlja dva žetona u posebni redak u iste stupce kao Kristinina dva žetona što je sigurno moguće;
- ako je Kristina stavila dva žetona u poseban redak, Ana može postaviti dva žetona u iste stupce nekog drugog retka (ta polja su slobodna, inače bi se kosilo s pravilom (ii)).

Možemo primijetiti da su oba svojstva (i) i (ii) očuvana nakon svakog Aninog poteza. Ova Anina strategija osigurava da se sigurno tijekom igre ispuni poseban redak.

Nakon što se ispuni poseban redak, Ana će sigurno pobijediti neovisno o preostalim potezima. Naime, broj polja na kojima se ne nalazi žeton je uvijek neparan, pa će u svakom potezu postojati redak u koji se može staviti barem dva žetona sve dok na ploči ne preostane samo jedno polje na kojem nema žetona. Budući da ukupan broj polja ($3 \cdot 2023 = 6069$) daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4, ta situacija nastaje nakon Aninog poteza.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

25. travnja 2023.

Zadatak A-4.1.

Za realni broj $c \neq 0$ i prirodni broj n, neka je a_k koeficijent uz x^k u izrazu $(1+cx)^n$, a b_k koeficijent uz x^k u izrazu $(1+2cx)^n$. Poznato je da su a_1, a_3 i a_4 uzastopni članovi geometrijskog niza, te da su b_1, $2b_2$ i $2b_3$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. Odredi brojeve c i n.

Rješenje.

Za svaki prirodan n koeficijent a_1 različit je od nule, pa kako bi a_1, a_3 i a_4 činili članove geometrijskog niza, i ostali članovi moraju biti različiti od nule, pa je nužno $n \geqslant 4$.

Primjenom binomnog poučka dobivamo

$$a_1 = c\binom{n}{1}, \quad a_3 = c^3\binom{n}{3}, \quad a_4 = c^4\binom{n}{4},$$
$$b_1 = 2c\binom{n}{1}, \quad b_2 = 4c^2\binom{n}{2}, \quad b_3 = 8c^3\binom{n}{3}.$$

Iz prvog uvjeta dobivamo $a_1 a_4 = a_3^2$, odnosno

$$c\binom{n}{1} \cdot c^4\binom{n}{4} = c^6\binom{n}{3}^2,$$

odakle je

$$c = n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot \left(\frac{3!}{n(n-1)(n-2)}\right)^2 = \frac{3(n-3)}{2(n-1)(n-2)}.$$

Iz drugog uvjeta dobivamo $b_1 + 2b_3 = 4b_2$, odnosno

$$2c\binom{n}{1} + 2 \cdot 8c^3\binom{n}{3} = 4 \cdot 4c^2\binom{n}{2}$$
$$2cn + 16c^3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 16c^2\frac{n(n-1)}{2}$$
$$1 + 4c^2\frac{(n-1)(n-2)}{3} = 4c(n-1).$$

Korištenjem jednakosti za c izraženog preko n iz prvog uvjeta na lijevoj strani posljednje jednakosti, dobivamo

$$1 + 4c \cdot \frac{3(n-3)}{2(n-1)(n-2)} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{3} = 4c(n-1)$$
$$1 + 2c(n-3) = 4c(n-1)$$
$$c = \frac{1}{2n+2}.$$

Uspoređivanjem dobivenog za c izražen preko n, dobivamo

$$\frac{1}{2n+2} = c = \frac{3(n-3)}{2(n-1)(n-2)}$$
$$2n^2 - 3n - 11 = 0,$$

no posljednja jednadžba nema rješenja u prirodnim brojevima. Zato ne postoje takvi parovi brojeva (c, n).

Napomena: Ako bismo u zadatku tražili da brojevi b_1, b_2 i $2b_3$ (umjesto b_1, $2b_2$ i $2b_3$) čine aritmetički niz, tada bi traženi parovi (c, n) bili $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ i $\left(\frac{1}{4}, 5\right)$.

Zadatak A-4.2.

Neka je S skup svih prirodnih brojeva manjih od 1000 čije su sve znamenke u dekadskom zapisu parne. Neka je ω kompleksni broj takav da je $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Izračunaj zbroj $\sum\limits_{k \in S} \omega^k$ tj. zbroj vrijednosti ω^k za sve k iz skupa S.

Prvo rješenje.

Označimo sa Z traženi zbroj. Množeći jednakost $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ s $\omega - 1$ dobivamo $\omega^3 = 1$. Posebno, broj ω^n jednak je broju 1, ω ili ω^2 redom ako n daje ostatak 0, 1 ili 2 pri dijeljenju s 3.

Promotrimo bilo koja tri troznamenkasta broja oblika $\overline{4ab}$, $\overline{6ab}$, $\overline{8ab}$, za neke parne znamenke a i b. Ta tri broja daju tri različita ostatka pri dijeljenju s 3, pa vrijedi

$$\omega^{\overline{4ab}} + \omega^{\overline{6ab}} + \omega^{\overline{8ab}} = 1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

Koristeći ovaj identitet za sve takve troznamenkaste brojeve zaključujemo da se u traženom zbroju krate svi članovi s eksponentima k kojima je znamenka stotica jednaka 4, 6 ili 8.

Sličnim argumentom u zbroju se krate i svi članovi s k kojima je znamenka desetica jednaka 4, 6 ili 8, pa onda i kojima je znamenka jedinica jednaka 4, 6 ili 8.

Preostalo je izračunati zbroj brojeva ω^k gdje su k prirodni brojevi manji od 1000 kojima su sve znamenke jednake 0 ili 2. Imamo

$$\begin{aligned} Z &= \omega^2 + \omega^{20} + \omega^{22} + \omega^{200} + \omega^{202} + \omega^{220} + \omega^{222} \\ &= 1 + 3\omega + 3\omega^2 = 1 + 3 \cdot (-1) = -2. \end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Neka je ponovno Z tražena suma, te ponovno zaključujemo da je $\omega^3 = 1$, odnosno vrijednost broja ω^n određena je ostatkom broja n pri dijeljenju s 3.

Traženi zbroj Z uvećan za $\omega^0 = 1$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$Z + 1 = (\omega^0 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8)(\omega^0 + \omega^{20} + \omega^{40} + \omega^{60} + \omega^{80})(\omega^0 + \omega^{200} + \omega^{400} + \omega^{600} + \omega^{800}).$$

Zaista, svakim umnoškom triju pribrojnika iz različitih zagrada s desne strane jednakosti dobivamo član s ekponentom koji je nenegativan cijeli broj manji od 1000 s parnim znamenkama, te na taj način dobivamo sve eksponente iz S i nulu.

Koristeći tu jednakost, dobivamo

$$\begin{aligned} Z+1 &= \frac{\omega^{10}-1}{\omega^2-1}\frac{\omega^{100}-1}{\omega^{20}-1}\frac{\omega^{1000}-1}{\omega^{200}-1} = \frac{\omega-1}{\omega^2-1}\frac{\omega-1}{\omega^2-1}\frac{\omega-1}{\omega^2-1} \\ &= \frac{1}{(\omega+1)^3} = \frac{1}{(-\omega^2)^3} = \frac{1}{-\omega^6} = \frac{1}{-1} = -1, \end{aligned}$$

pa je traženi zbroj $Z = -2$.

Zadatak A-4.3.

Postoje li međusobno različiti pozitivni realni brojevi $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2023}$ takvi da se od

jednog kvadrata stranice duljine a_1,

tri kvadrata stranica duljine a_3, ...,

k kvadrata stranice duljine a_k, ...,

2023 kvadrata stranica duljine a_{2023}

može sastaviti kvadrat?

Prvo rješenje.

Odgovor je da postoje takvi a_1, a_3, ..., a_{2023}.

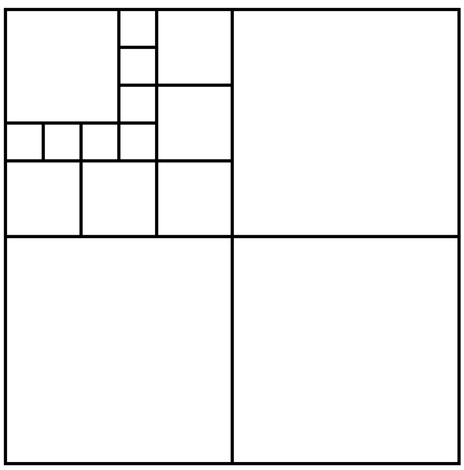
Kvadrat stranice duljine 1 podijelit ćemo na manje kvadrate na način koji opisujemo u nastavku.

U prvom koraku podijelimo originalan kvadrat na četiri jednaka kvadrata. Dobili smo tri kvadrata stranice duljine $x_1 = \frac{1}{2}$, a preostali kvadrat stranice duljine $y_1 = \frac{1}{2}$ nastavit ćemo dijeliti.

U drugom koraku uz donji i desni rub kvadrata stranice duljine $y_1 = \frac{1}{2}$ posložimo 5 kvadrata stranice duljine $x_2 = \frac{1}{6}$, a preostali kvadrat stranice duljine $y_2 = \frac{1}{3}$ nastavit ćemo dijeliti.

Općenito, u k-tom koraku uz donji i desni rub kvadrata stranice duljine y_{k-1} posložimo $(2k+1)$ kvadrata stranice duljine $x_k = \frac{1}{k+1} y_{k-1}$, a preostali kvadrat stranice duljine $y_k = y_{k-1} - x_k$ nastavljamo dijeliti. Postupak završavamo kada je $k = 1011$, kada nam preostane kvadrat stranice duljine y_{1011} koji više ne dijelimo.

Na sljedećoj je slici prikazana podjela kvadrata nakon tri provedena koraka postupka.



Dokažimo indukcijom da za sve $k \in \{1, 2, \dots, 1011\}$ vrijedi

$$x_k = \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{i} \quad y_k = \frac{1}{k+1}.$$

Baza je zadovoljena za $k = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja za neki $k \in \{1, 2, \dots, 1010\}$. Za $k + 1$ imamo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{k+2} y_k = \frac{1}{k+2} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \\ y_{k+1} &= y_k - x_{k+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+2}, \end{aligned}$$

čime je tvrdnja indukcije dokazana.

Ovim postupkom jedinični kvadrat podijeljen je na jedan kvadrat stranice $a_1 := y_{1011} = \frac{1}{1012}$, tri kvadrata stranice $a_3 := x_1 = \frac{1}{2}$, pet kvadrata stranice $a_5 := x_2 = \frac{1}{6}$, ..., 2023 kvadrata stranice $a_{2023} := x_{1011} = \frac{1}{1011 \cdot 1012}$. Svi brojevi $a_3, a_5, \dots, a_{2023}$ su različiti jer su sve manji. Također, broj a_1 različit je od svih ostalih jer bi u suprotnom postajao prirodan broj k takav da je

$$\frac{1}{1012} = a_1 = a_{2k+1} = x_k = \frac{1}{k(k+1)},$$

odnosno

$$k^2 + k = 1012,$$

no ta jednadžba nema rješenja u prirodnim brojevima.

Dakle, zaista je moguće jedinični kvadrat podijeliti na traženi način manjim kvadratima.

Drugo rješenje.

Pokažimo da je takva konstrukcija moguća uzastopnim dodavanjem manjih kvadrata na kvadrat koji je do tog trenutka sastavljen. U prvom koraku kvadratu stranice duljine 1 desno i ispod dopisujemo prvo 5 kvadrata stranice duljine $\frac{1}{2}$, a zatim desno i ispod novodobivenog kvadrata dopisujemo 3 kvadrata stranice duljine $\frac{3}{2}$. Nakon ovog koraka dobivamo kvadrat stranice duljine 3, te smo iskoristili dimenzije $a_1 = 1$, $a_5 = \frac{1}{2}$ i $a_3 = \frac{3}{2}$.

Općenito, u n-tom koraku kvadratu stranice duljine b_n desno i ispod dopisujemo prvo $4n + 1$ kvadrata stranice duljine

$$a_{4n+1} = \frac{b_n}{2n},$$

a zatim desno i ispod novodobivenog kvadrata dopisujemo $4n - 1$ kvadrata stranice duljine

$$a_{4n-1} = \frac{b_n + a_{4n+1}}{2n - 1}.$$

Nakon ovog koraka dobivamo kvadrat stranice duljine

$$b_{n+1} = b_n + a_{4n-1} + a_{4n+1}.$$

Nakon 505 ovakvih koraka na kraju dopisujemo još 2023 kvadrata stranice duljine $a_{2023} = \dfrac{b_{505}}{1010}$.

Primijetimo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
a_{4n-1} &= \frac{b_n + a_{4n+1}}{2n-1} = \frac{b_n + \frac{b_n}{2n}}{2n-1} = b_n \cdot \frac{2n+1}{2n(2n-1)}, \\
b_{n+1} &= b_n + a_{4n-1} + a_{4n+1} = b_n \cdot \left(1 + \frac{2n+1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{2n}\right) = b_n \cdot \frac{2n+1}{2n-1}.
\end{aligned}
$$

Induktivno se pokazuje da za sve n vrijedi

$$
b_n = 2n-1, \quad a_{4n-1} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}, \quad a_{4n+1} = \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}.
$$

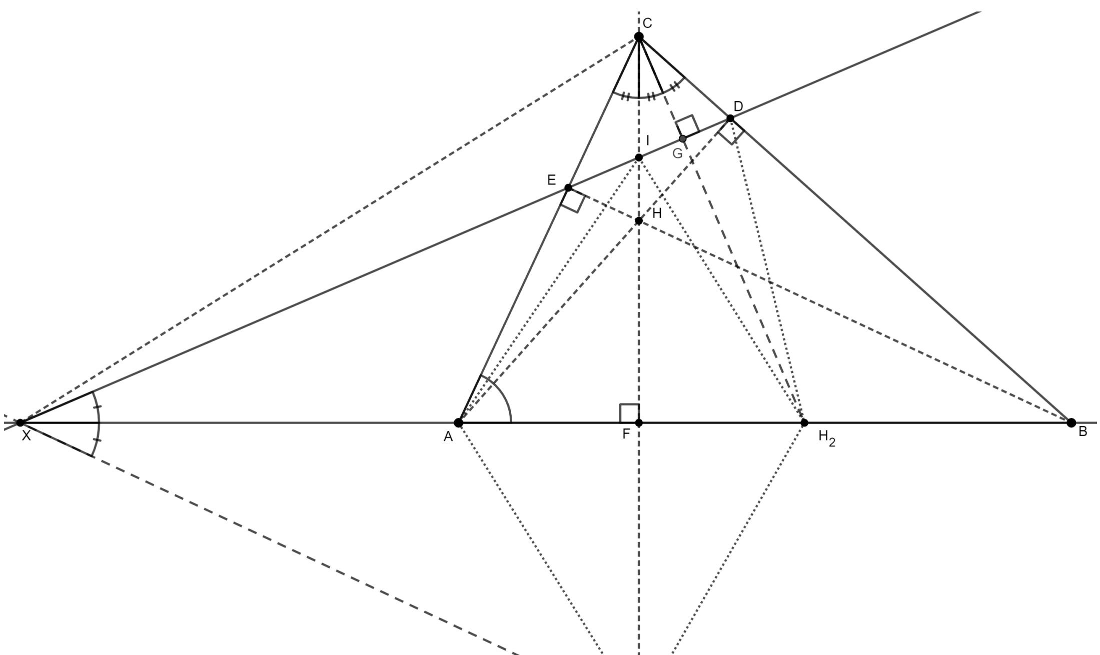
Sve duljine stranica su različite (jer sve duljine oblika a_{4n-1} su veće od 1 i postaju sve manje, a sve duljine duljine oblika a_{4n+1} su manje od 1 i postaju sve veće), čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak A-4.4.

Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem je $|AC| < |BC|$. Njegove visine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u ortocentru H. Dužine $\overline{DE}$ i $\overline{CH}$ sijeku se u točki I, a pravci DE i AB u točki X. Neka je H_1 ortocentar trokuta XAC, a H_2 ortocentar trokuta XIC.

Ako je $|AH_1| = |IH_2|$, dokaži da je $|AI| = |DH_2|$.

Rješenje.



Označimo s α, β i γ mjere kutove trokuta ABC u vrhovima A, B i C redom. Označimo s F nožište visine iz C trokuta ABC.

Visine iz C u trokutima ABC i XAC se poklapaju (obje su okomite na isti pravac), pa su točke C, H i H_1 kolinearne. Također, kako su AB i IC okomiti pravci, ortocentar H_2 trokuta XIC nalazi se na pravcu AB.

Iz pravokutnog trokuta ACF slijedi $\sphericalangle ACF = 90^\circ - \alpha$. Kutovi $\sphericalangle XH_1F$ i $\sphericalangle CAF$ šiljasti su kutovi okomitih krakova pa su jednaki. Iz pravokutnog trokuta XFH_1 slijedi

$$\sphericalangle FXH_1 = 90^\circ - \sphericalangle XH_1F = 90^\circ - \sphericalangle CAF = 90^\circ - \alpha.$$

Iz Talesovog poučka, četverokut $ABDE$ je tetivan (promjer opisane kružnice mu je $\overline{AB}$), pa u trokutu XBD vrijedi

$$\sphericalangle DXB = 180^\circ - \sphericalangle EDB - \sphericalangle DBA = \alpha - \beta.$$

Pravac XC okomit je pravce AH_1 i IH_2 na kojima leže visine trokuta XAC i XIC, pa zaključujemo da su pravci AH_1 i IH_2 paralelni. Zajedno s uvjetom zadatka $|AH_1| = |IH_2|$ zaključujemo da je četverokut AH_1H_2I paralelogram. No, kako su mu dodatno dijagonale $\overline{IH_1}$ i $\overline{AH_2}$ okomite, zaključujemo da je taj četverokut romb.

Kako se u rombu dijagonale raspolavljaju, vrijedi $|IF| = |FH_1|$. Zato su pravokutni trokuti XFH_1 i XFI sukladni po S–K–S teoremu o sukladnosti. Odavde je

$$90^\circ - \alpha = \sphericalangle FXH_1 = \sphericalangle FXI = \sphericalangle DXB = \alpha - \beta,$$

Trokuti ACF i H_2CF također su sukladni pravokutni trokuti (jer F raspolavlja dijagonalu romba $\overline{AH_2}$), pa vrijedi $\sphericalangle FCH_2 = \sphericalangle ACF = 90^\circ - \alpha$. Iz pravokutnog trokuta FBC slijedi $\sphericalangle FCB = 90^\circ - \beta$. Zato imamo

$$\sphericalangle H_2CD = \sphericalangle FCB - \sphericalangle FCH_2 = (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) = \alpha - \beta = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle FCH_2.$$

Dakle, CH_2 je simetrala kuta $\sphericalangle ICB$.

Kako na pravcu CH_2 leži visina trokuta XIC, pravac CH_2 okomit je na dužinu $\overline{ID}$. U trokutu IDC pravac CH_2 je simetrala kuta koja je okomita na suprotnu stranicu, pa je to i simetrala dužine $\overline{CH_2}$. Kako se D nalazi na toj simetrali dužine, vrijedi $|DH_2| = |IH_2|$. Zajedno s činjenicom da je četverokut AH_1H_2I romb, dobivamo

$$|AI| = |IH_2| = |DH_2|,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-4.5.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $a, b \in \mathbb{N}$ za koje je $f(a) \neq b$ vrijedi

$$f(a) - b \mid f(a)^2 + 2b + 1 - f(b)^2.$$

Prvo rješenje.

Oduzmemo li od desne strane $(f(a)-b)(f(a)+b)$, dobivamo uvjet ekvivalentan početnom:

$$f(a)-b \mid (b+1)^2 - f(b)^2.$$

Iz dobivenog direktno vidimo da funkcija zadana pravilom $f(n)=n+1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ zadovoljava uvjet zadatka. Pretpostavimo sada da postoji neka druga funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja zadovoljava gornji uvjet.

Promotrimo neki fiksni $b \in \mathbb{N}$ takav da $f(b) \neq b+1$. Za svaki $a \in \mathbb{N}$ tada vrijedi $f(a)=b$ ili $f(a)-b \mid (b+1)^2 - f(b)^2$, odakle je za sve $a \in \mathbb{N}$

$$f(a) \leqslant b + \left|(b+1)^2 - f(b)^2\right|.$$

Kako je b fiksan, zaključujemo da je funkcija f ograničena odozgo.

Kako je funkcija ograničena, beskonačno mnogo vrijednosti domene postiže samo konačno mnogo vrijednosti iz kodomene, pa postoji vrijednost $y \in \mathbb{N}$ iz kodomene koja se postiže za beskonačno mnogo $x \in \mathbb{N}$ iz domene. Uvrštavajući $a=b=x$ u početni uvjet (postoji beskonačno mnogo takvih x različitih od $f(x)=y$) , dobivamo da je broj

$$\frac{f(x)^2+2x+1-f(x)^2}{f(x)-x} = \frac{2x+1}{y-x} = \frac{2x+1-2y+2y}{y-x} = 2 + \frac{2y+1}{y-x}$$

cijeli za fiksni y i beskonačno mnogo x. No, broj $2y+1$ različit je od nule, pa ima konačno mnogo djelitelja, čime dobivamo kontradikciju.

Funkcija zadana pravilom $f(n)=n+1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ jedina je funkcija koja zadovoljava uvjete zadatka.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je f ograničena, te dokazujemo da je jedino rješenje $f(n)=n+1$.

Neka je M prirodan broj takav da je $f(n) < M$ za sve $n \in \mathbb{N}$, te neka je p proizvoljan neparan prost broj veći od $2M+1$. Tada je broj $m = \dfrac{p-1}{2}$ prirodan broj veći od M. Posebno, vrijedi $f(m) < M$, pa uvrštavajući $a=b=m$ u uvjet zadatka, slično kao u prvom rješenju dobivamo

$$f(m)-m \mid 2m+1 = p.$$

Kako je p prost, a $f(m)-m$ je njegov cjelobrojni djelitelj, vrijedi $f(m)-m=-p$ ili $f(m)-m \geqslant -1$. U prvom slučaju imamo $f(m) \leqslant -p+m = -m-1$, pa $f(m)$ nema vrijednost u kodomeni funkcije f. S druge strane, ako je $f(m)-m \geqslant -1$, dobivamo $f(m) \geqslant m+1 > M$, što je u suprotnosti s ograničenošću funkcije f. Dobivamo kontradikciju, pa je funkcija $f(n)=n+1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ zaista jedino rješenje.