Osnovne informacije

Ilko Brnetić

e-mail:ilko.brnetic@fer.hr

Diofantske jednadžbe

Jednadžbe s dvije ili više nepoznanica s rješenjima u skupu cijelih/prirodnih brojeva

Neke metode rješavanja diofantskih jednadžbi

- metoda faktorizacije (metoda umnoška)
- metoda kvocijenta (dijeljenje polinoma)
- korištenje modularne aritmetike (specijalni slučajevi: metoda parnosti, metoda zadnje znamenke)
- metoda nejednakosti (nalaženje "gornje ograde")
- ...

Primjer 1.

Nađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + xy = 2022.$$

Rješenje. Nakon faktorizacije

$$x \cdot (x + y) = 2022$$

i rastava broja 2022 na proste faktore $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ zaključujemo da imamo sljedeće mogućnosti
(koliko ih ima?)
$x = 1,\ x + y = 2022 \implies (x, y) = (1, 2021),$
$x = 2,\ x + y = 1011 \implies (x, y) = (2, 999),$
$x = 3,\ x + y = 674 \implies (x, y) = (3, 671),$
$x = 6,\ x + y = 337 \implies (x, y) = (3, 331).$
Time smo dobili sva rješenja, jer je, za prirodne x i y, $x + y > x$, a ukupno imamo osam djelitelja broja 337.

Primjer 1. - komentari

Primjedba. Broj

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

ima

$$(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$$

prirodnih djelitelja.

Koliko bi bilo rješenja da smo trebali odrediti sve parove cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + xy = 2022?$$

Odgovor: 16

Primjer 2. (Općinsko natjecanje 1999., 8. razred)

Koliko ima različitih pravokutnog trokuta kojima su duljine stranica prirodni brojevi, a duljina jedne katete je jednaka 15? Odredi njihove duljine stranica.

Rješenje. Neka je a duljina katete nepoznate duljine, a c duljina hipotenuze. Tada je

$$c^2 - a^2 = 15^2,$$

odnosno

$$(c+a)(c-a) = 225.$$

Kako je $15^2 = 3^2 \cdot 5^2$ i $c - a < c + a$, imamo četiri mogućnosti:

$c - a = 1,\ c + a = 225 \implies (a, c) = (112, 113),$

$c - a = 3,\ c + a = 75 \implies (a, c) = (36, 39),$

$c - a = 5,\ c + a = 45 \implies (a, c) = (9, 25),$

$c - a = 9,\ c + a = 25 \implies (a, c) = (8, 17).$

Primjer 3.

Nađite sve parove cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 707.$$

Rješenje. Lijevu stranu možemo transformirati na sljedeći način:

$$2x^2 + 4xy + xy + 2y^2 = 2x(x + 2y) + y(x + 2y) = (2x + y)(x + 2y)$$

pa je

$$(2x + y) \cdot (x + 2y) = 707.$$

Rastav broja 707 na proste faktore $707 = 7 \cdot 101$ zaključujemo da imamo sljedeće mogućnosti

$$\begin{aligned}
2x + y = 1,\ x + 2y = 707 &\implies (x, y) = (-235, 471),\\
2x + y = 7,\ x + 2y = 101 &\implies (x, y) = (-29, 65),\\
2x + y = 101,\ x + 2y = 7 &\implies (x, y) = (65, -29),\\
2x + y = 707,\ x + 2y = 1 &\implies (x, y) = (471, -235),\\
2x + y = -1,\ x + 2y = -707 &\implies (x, y) = (235, -471),\\
2x + y = -7,\ x + 2y = -101 &\implies (x, y) = (29, -65),\\
2x + y = -101,\ x + 2y = -7 &\implies (x, y) = (-65, 29),\\
2x + y = -707,\ x + 2y = -1 &\implies (x, y) = (-471, 235).
\end{aligned}$$

Primjer 4.

Nađite sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$11m + 17n = mn.$$

Rješenje. Transformirajmo polaznu jednadžbu
$m(n - 11) + 17n = 0,$
$m(n - 11) - 17(n - 11) = 11 \cdot 17,$
$(m - 17) \cdot (n - 11) = 11 \cdot 17.$
Primijetimo da, za prirodan broj m, broj $m - 17$ može biti negativan (slično i, za prirodan broj n, broj $n - 11$ može biti negativan).
Također, $m - 17$ i $n - 11$ moraju biti istog predznaka.
Međutim, ako bi vrijedilo $m < 17$ i $n < 11$, tada bi bilo $mn = 11m + 17n > 2mn$ što je kontradikcija, jer su m i n prirodni.
Zato (11 i 17 su prosti), imamo sljedeće mogućnosti
$m - 17 = 1,\ n - 11 = 187 \implies (m, n) = (18, 198),$
$m - 17 = 11,\ n - 11 = 17 \implies (m, n) = (28, 28),$
$m - 17 = 17,\ n - 11 = 11 \implies (m, n) = (34, 22),$
$m - 17 = 187,\ n - 11 = 1 \implies (m, n) = (204, 12).$

Primjer 5. (Državno natjecanje za 7. razrede, 2018.)

Nađite sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2mn - 5m + 3n = 130.$$

Rješenje.
$m(2n-5)+?(2n-5)=??,$
Jednostavnije, odmah pomnožimo jednadžbu s 2 pa redom imamo
$4mn - 10m + 6n = 260$
$2m(2n-5) + 3(2n-5) = 245$
$(2m+3)(2n-5) = 245$
Dalje nastavimo na isti način kao i prethodnim primjerima.

Traženi parovi brojeva su $(1, 27)$, $(2, 20)$, $(16, 6)$, $(23, 5)$, $(121, 3)$.

Primjer 6. (Županijsko natjecanje za 7. razrede, 2022.)

Nađite sve parove prirodnih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(a+6)(b+5) = 3ab.$$

Rješenje. Transformirajmo polaznu jednadžbu

$$ab + 5a + 6b + 30 - 3ab = 0$$

$$2ab - 5a - 6b - 30 = 0$$

$$(a-3)(2b-5) = 45$$

i dalje nastavljamo kao u prethodnim primjerima.

Traženi parovi brojeva su $(48, 3)$, $(18, 4)$, $(12, 5)$, $(8, 7)$, $(6, 10)$, $(4, 25)$.

Primjer 7. (Županijsko natjecanje za 8. razrede, 2020.)

Koliko ima parova prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$mn + 2m - 2n = 2020?$$

Odgovor: 34

Primjer 8.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje je

$$\frac{n+1000}{n+4}$$

prirodan broj.

Rješenje.

$$\frac{n+1000}{n+4} = \frac{n+4+996}{n+4} = \frac{n+4}{n+4} + \frac{996}{n+4} = 1 + \frac{996}{n+4}$$

Da bi $\frac{n+1000}{n+4}$ bio prirodan, mora vrijediti $n+4 \mid 996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$.
(koliko ima djelitenja broja 996?)

Djelitelji su: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 83, 126, 249, 332, 498, 996.

Rješenja su: 2, 8, 79, 122, 245, 328, 494, 992.

Primjer 9.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje je

$$\frac{n^2 + 1000}{n + 4}$$

prirodan broj.

Rješenje.

$$\frac{n^2 + 1000}{n + 4} = \frac{n^2 + 4n - 4n + 1000}{n + 4} = \frac{n^2 + 4n}{n + 4} + \frac{-4n + 1000}{n + 4}$$

$$= n + \frac{-4n - 16 + 1016}{n + 4} = n + \frac{-4n - 16}{n + 4} + \frac{1016}{n + 4} = n - 4 + \frac{1016}{n + 4}$$

Da bi $\frac{n+1000}{n+4}$ bio prirodan, mora vrijediti $n + 4 \mid 1016 = 2^3 \cdot 127$.
(koliko ima takvih n?)

Djelitelji su: 1, 2, 4, 8, 127, 254, 508, 1016.

Rješenja su: 4, 123, 250, 504, 1012.

Primjer 10.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje je

$$\frac{n+100}{3n+4}$$

prirodan broj.

Rješenje. Ako je $\frac{n+100}{3n+4}$ prirodan, onda je i $3 \cdot \frac{n+100}{3n+4}$ prirodan.
(pazite! obrat ne mora vrijediti)
Odredimo sve prirodne brojeve n za koje je $3 \cdot \frac{n+100}{3n+4}$ prirodan pa potom, za svaki takav n, provjerimo je li $\frac{n+100}{3n+4}$ prirodan.
$\frac{3n+300}{3n+4} = \frac{3n+4+296}{3n+4} = \frac{3n+4}{3n+4} + \frac{296}{3n+4} = 1 + \frac{296}{3n+4}$

Djelitelji broja $296 = 2^3 \cdot 37$ su: 1, 2, 4, 8, 37, 74, 148, 296.

Jedini mogući n-ovi su: 11, 48.

Potom provjerimo je li, za $n = 11$ i $n = 48$, broj $\frac{n+100}{3n+4}$ prirodan i ustanovljamo da, u oba slučaja, jest.

Primjeri 4.-7., ponovo:

U svim navedenim primjerima jednadžbu možemo kao linearnu riješiti po jednoj varijabli.

4. Nađite sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu $11m + 17n = mn$.

Rješenje. Jednadžbu riješimo po m (možemo i po n, svejedno je) i dobivamo

$$m = \frac{17n}{n - 11}$$

i dalje radimo kao u Primjerima 8.-10.

5. Nađite sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu $2mn - 5m + 3n = 130$.

Rješenje. Jednadžbu riješimo po n (možemo i po m, svejedno je) i dobivamo

$$n = \frac{5m + 30}{2m + 3}$$

i dalje radimo kao u Primjerima 8.-10.

Analogno možemo postupiti i u Primjerima 6. i 7.

Primjer 11.

Nađite sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 + 100n$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje. Prvi način:
Jednadžba $n^2 + 100n = m^2$ nije linearna ni u varijabli m ni u varijabli n. No, stavimo li $m = n + k$, $k \in \mathrm{N}$, ona postaje linearna u n:

$n^2 + 100n = (n + k)^2$

$n^2 + 100n = n^2 + 2nk + k^2$

$n(100 - 2k) = k^2$

$n = \frac{k^2}{100-2k}$

$2n = \frac{2k^2}{100-2k} = \frac{2k^2-100k+100k-5000}{100-2k} = -2k - 50 + \frac{5000}{100-2k}$

Slijedi $100 - 2k \mid 5000 = 2^3 \cdot 5^4$. Kako je $100 - 2k > 0$ i $100 - 2k$ paran broj, treba samo ispitati slučajeve
$100 - 2k = 2, 4, 8, 10, 20, 40$.

Samo za $k = 40$ i $k = 48$ i dobivamo da je n prirodan i tada je $n = 80$ i $n = 576$.

Primjer 11.

Nađite sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 + 100n$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje. Drugi način:
$n^2 + 100n = m^2$
$n^2 + 100n + 2500 = m^2 + 2500$
$(n + 50)^2 = m^2 + 2500$
$(n + 50)^2 - m^2 = 2500$
$(n + 50 + m)(n + 50 - m) = 2500$
Kako je $2500 = 2^2 \cdot 5^4$ i kako su $n + m + 50$ i $n - m + 50$ iste parnosti pa oba moraju biti parni te kako je
$n - m + 50 < n + m + 50$, preostaju dvije mogućnosti

$n + m + 50 = 1250, \quad n + m + 50 = 2$
i
$n + m + 50 = 250, \quad n + m + 50 = 10.$

Prva vodi $n = 576$, a druga na $n = 80$.

Modularna aritmetika

U Primjeru 11. smo prikazali dva načina rješavanja; jedan je koristio metodu kvocijenta, drugi metodu faktorizacije, ali u oba načina smo dodatno koristili informacije o parnosti nekih brojeva kako bismo smanjili broj mogućnosti koje je bilo potrebno ispitivati.

Općenito, analizom djeljivosti s nekim brojem, odnosno ostataka koje pri dijeljenju s nekim brojem neki broj može imati, možemo suziti broj mogućnosti za analizu prilikom rješavanja neke diofantske jednadžbe ili možda pokazati da neka diofantska jednadžba nema rješenja.

Učenici se, prilikom pripreme za natjecanja, najprije susreću s metodom parnosti (dijeljenje s 2) i metodom zadnje znamenke (ostatci pri dijeljenju s 10).

Primjer 12.

Postoje li parovi cijelih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2m + 4n = 555?$$

Rješenje. Očito je da takvi m i n ne postoje; naime, lijeva strana jednadžbe je paran, a desna neparan broj.

Općenito, linearna diofantska jednadžba

$$ax + by = c$$

s nepoznanicama x i y ima cjelobrojno rješenje ako i samo ako najveći zajednički djeljitelj brojeva a i b dijeli c.

Primjer 13.

Postoje li parovi cijelih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$m(m+1) + 2n = 123454321?$$

Rješenje. Kako je m i $m+1$ uzastopni brojevi, jedan od njih je paran pa je $m(m+1)$ paran kao i $m(m+1)+2n$ pa ne može biti neparan.
Zato ova jednadžba nema cjelobrojna rješenja.

Primjer 14.

Postoje li parovi cijelih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$n^3 - n = 234565432?$$

Rješenje. Kako je $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$ dobivamo

$$(n-1)n(n+1) = 234565432$$

Kako su $n - 1$, n i $n + 1$ uzastopni brojevi, jedan od njih je djeljiv s 3, a, kako 234565432 nije djeljiv s 3, ova jednadžba nema cjelobrojna rješenja.

Primjer 15.

Nađite sve parove cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + 2xy = 2022.$$

Rješenje. Mogli bismo zadatak riješiti korištenjem metode faktorizacije

$$x(x + 2y) = 2022,$$

ali možemo i jednostavnije.
Naime, kako je broj s desne strane paran, mora i broj s lijeve strane biti paran; no, kako su x i $x + 2y$ iste parnosti, onda $x(x + 2y)$ mora biti djeljivo s 4.
Kako 2022 nije djeljivo s 4, jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Primjer 16.

Nađite sve parove cijelih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$5m + 2n^2 = 100001$$

Rješenje. Zadnja znamenka broja $5m$ može biti 0 ili 5, zadnja znamenka broja n^2 može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9, a zadnja znamenka broja $2n^2$ može biti 0, 2 ili 8.
Zato zadnja znamenka broja $5m + 2n^2$ može biti 0, 2, 3, 5, 7 ili 8.
Zadnja znamenka broja 100001 je 1 pa jednadžba nema rješenja.

Primjer 17. (Državno natjecanje za 7. razrede, 2022.)

Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je zbroj znamenaka broja

$$m \cdot (m + 3n)$$

jednak 2022.

Rješenje. Kako je 2022 djeljiv s 3 (zbroj znamenki je djeljiv s 3), onda i $m \cdot (m + 3n)$ mora biti djeljiv s 3.
A to znači da je barem jedan od brojeva m i $m + 3n$ djeljiv s 3. No, kako je razlika ta dva broja djeljiva s 3, onda oba ta broja moraju biti djeljiva s 3. A to znači da $m \cdot (m + 3n)$ mora biti djeljiv s 9. No to nije moguće, jer 2022 nije djeljiv s 9 (zbroj znamenki nije djeljiv s 9).

Primjer 18. (Državno natjecanje za 8. razrede, 2020.)

Ako je m prirodan broj, a n neparan prirodan broj, dokaži da $m(m+2)+n(n+2)$ ne može biti kvadrat prirodnog broja.

Rješenje. Kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 4 može dati samo ostatke 0 ili 1:

$$(2k)^2 = 4k^2; \quad (2k-1)^2 = 4(k^2-k)+1, \quad k \in \mathrm{N}.$$

Kako je n neparan, onda je $n(n+2)$ umnožak dva uzastopna neparna broja pa daje ostatak $1 \cdot 3 = 3$ pri dijeljenju s 4.

U ovisnosti o parnosti broja m, broj $m(m+2)$ daje ostatak 3 ili 0 pri dijeljenju s 4, pa broj $m(m+2)+n(n+2)$ daje ostatak 2 ili 3 pri dijeljenju s 4 te stoga ne može kvadrat prirodnog broja.

Primjer 19. (Hrvatska juniorska matematička olimpijada 2021., 2. dan)

Postoje li prirodni brojevi m i n za koje je $3m^2 - n^2$ jednako

a) 75

b) 100

c) 125

d) 150

Primjer 19. (Hrvatska juniorska matematička olimpijada 2021., 2. dan)

Odgovori:
a) da
b) ne
c) ne
d) ne

Riješimo zadatak b).
Kvadrat prirodnog broja može dati ostatke 0 ili 1 pri dijeljenju s 3. Zato $3m^2 - n^2$ daje ostatak 0 ili 2 pri dijeljenju s 3 te ne može biti jednako 100 koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3.

Primjer 20.

a) Postoje li neparni prirodni brojevi a i b takvi da je $a^2 + b^2$ kvadrat prirodnog broja?

b) Postoje li neparni prirodni brojevi a, b i c takvi da je $a^2 + b^2 + c^2$ kvadrat prirodnog broja?

c) Postoje li neparni prirodni brojevi a, b, c, d i e takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ kvadrat prirodnog broja?

Rješ. $(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k-1)k + 1, \quad k \in \mathrm{N}$

a) Ne (mod 4).

b) Ne (mod 4).

c) Ne (mod 8).

Primjer 21. (Hrvatska juniorska matematička olimpijada 2018.)

Odredite sve prirodne brojeve $n > 2$ za koje postoje neparni prirodni brojevi $a_1, a_2, ..., a_n$ (ne nužno različiti) takvi da je

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$$

kvadrat nekog prirodnog broja.

Primjer 22.

Odredite sve prirodne brojeve x i y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^3 + y^2 = 10x^2.$$

Rješenje. Transformirajmo polaznu jednadžbu na sljedeći način:

$$x^3 - 10x^2 + y^2 = x^2(x - 10) + y^2 = 0.$$

Sada se prirodno nameće korištenje metode nejednakosti (nalaženje "gornje ograde").

Naime, za $x \geq 10$ je lijeva strana jednadžbe strogo pozitivna za svaki prirodan broj y pa, u tom slučaju, jednadžba nema rješenja.

Za vrijednosti $x < 10$ ćemo pojedinačno provjeriti postoji li prirodan broj y koji zadovoljava jednadžbu.

Takvom provjerom dobivamo da za $x = 9$ imamo rješenje $y = 9$, za $x = 6$ imamo rješenje $y = 12$ i za $x = 1$ imamo rješenje $x = 3$.

Rješenja su. $(x, y) = (9, 9), (6, 12), (1, 3)$.

Primjer 23. (Državno natjecanje za 8. razrede, 2019.)

Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m, n, p takvi da je

$$m^2 + n^2 + p^2 = mn + np + pm + 50$$

Rješenje. Množenjem s 2 dobivamo

$$2m^2 + 2n^2 + 2p^2 = 2mn + 2np + 2pm + 100$$

Potom imamo

$$m^2 - 2mn + n^2 + n^2 - 2np + p^2 + p^2 - 2pm + m^2 = 100$$

$$(m - p)^2 + (n - p)^2 + (p - m)^2 = 100$$

Stavimo $x = m - p$, $y = n - p$, $z = p - m$ i dobivamo $x^2 + y^2 + z^2 = 100$. Sada vidimo da je broj mogućnosti jako sužen. Stavimo li $x \geq y \geq z$, sustavnom pretragom lagano zaključimo da jednadžba nema rješenja.

Primjer 23. (Državno natjecanje za 8. razrede, 2019.)

Zadatak možemo riješiti i razmatranjem svih mogućih varijanti parnosti brojeva m, n i p i korištenjem modularne aritmetike (parnost; djeljivost s 4).

Primjer 24.

Nađite sve prirodne brojeve x, y, z za koje je

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}.$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \leq y \leq z$. Tada je

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

pa iz $\frac{4}{5} \leq \frac{3}{x}$ zaključujemo da je $x \leq \frac{15}{4} < 4$.
Kako je očito $x > 1$, preostaju mogućnosti $x = 3$ i $x = 2$.
Za $x = 3$ imamo jednadžbu $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}$,
a za $x = 2$ imamo jednadžbu $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$.
Obje jednadžbe možemo riješiti ili ponovo metodom nejednakosti ili rješavanjem po jednoj varijabli (jednadžba je linearna u obje!) pa potom metodom kvocijenta ili metodom faktorizacije.
Prva jednadžba nema rješenja, a druga ima dva rješenja; konačno, rješenja su $(x, y, z) = (2, 4, 20)$, $(x, y, z) = (2, 5, 10)$.

Primjeri 25.-26.

25. Nađite sve prirodne brojeve x, y, z za koje je

$$5(xy + xz + zx) = 3xyz$$

26. (Državno 2000., 1.r. SŠ)
Nađite sve prirodne brojeve x, y, z za koje je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

Primjer 27.

Dokažite da ne postoje prirodni brojevi x i y za koje je

$$x^3 + 3 = 4y(y+1).$$

Rješenje. Transformirajmo polaznu jednadžbu:

$$x^3 = 4y^2 + 4y - 3$$

$$x^3 = (2y+3)(2y-1)$$

Kako su $2y+3$ i $2y-1$ relativno prosti (jer je $D(2y+3, 2y-1) = D(2y+3, 4) = 1$), onda oba moraju biti kubovi prirodnog broja, a niti koja dva kuba se ne razlikuju za 4.

Primjer 28. (Hrvatska juniorska matematička olimpijada 2021.)

Dokažite da ne postoje prirodni brojevi a i b takvi da je

$$a^3 - 64a - 1 = 4b(b+1).$$

Rješenje. Transformirajmo polaznu jednadžbu:

$$a^3 - 64a = (2b+1)^2$$

$$a(a-8)(a+8) = (2b+1)^2$$

Zaključujemo: a neparan, $a-8$, a i $a+8$ relativno prosti (obrazložiti!!!) pa svi moraju biti kvadrati neparnog prirodnog broja što je nemoguće (objasniti!).

Primjer 29. (Hrvatska juniorska matematička olimpijada 2019.)

Neka su m i n prirodni brojevi različite parnosti. Dokaži da broj

$$\frac{3m^2 + 5mn}{3n^2 + mn}$$

nije prirodan.

Rješenje. Neka je d najveći zajednički djelitelj brojeva m i n, tj. $m = dm'$ i $n = dn'$, pri čemu su m' i n' relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.
Sada trebamo dokazati da $\frac{m'}{n'} \cdot \frac{3m'+5n'}{3n'+m'}$ nije prirodan.
Pretpostavimo da gornji broj jest prirodan.
Može se pokazati da su $3m' + 5n'$ i $3n' + m'$ relativno prosti pa, uz $3n' + m' > m'$ imamo kontradikciju.

Literatura

Zdravko Kurnik: "Diofantske jednadžbe", Mala matematička biblioteka, HMD, 2007.

Arthur Engel: "Problem Solving Strategies", Springer 1998.

Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu: "An Introduction to Diophantine Equations"', Birkhauser, 2010.

Stranice Antonije Horvatek (http://www.antonija-horvatek.from.hr/)

https://natjecanja.math.hr/hjmo/