

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

1. ožujka 2023.

1. Skratite razlomak $\frac{(x+1)^4 - 4(x+x^2)^2 + 4x^2 - (1+x)^2}{3x^2 + x}$ ako je $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{3}$.
2. U nizu od šest prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći broj jednak je zbroju dva prethodna. Odredite sve takve nizove brojeva, ako je peti broj u nizu jednak 25.
3. Može li se broj 24024 zapisati u obliku razlomka $\frac{m!}{n!}$ pri čemu $m!$ označava umnožak prvih m prirodnih brojeva, a $n!$ označava umnožak prvih n prirodnih brojeva? Obrazložite.
4. Odredite sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$\frac{a}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 2023x$$

nema rješenja.

5. Kružnica polumjera 3 cm upisana je u paralelogram tako da dodiruje tri njegove stranice. Mjera šiljastog kuta paralelograma iznosi 60° , a jedna stranica paralelograma je za $2\sqrt{3}$ cm dulja od druge stranice. Odredite udaljenost središta kružnice od najudaljenijeg vrha paralelograma.

* * *

6. Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (m, n) za koje je broj $3^m + 7^n$ djeljiv s 10 ako je $1 \leq m \leq 80$, $81 \leq n \leq 185$?
7. Zadan je četverokut $ABCD$. Ako je $|AB| = 6$ cm, $|AD| = 4$ cm, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 60^\circ$ i $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, izračunajte duljine dijagonala i površinu toga četverokuta.

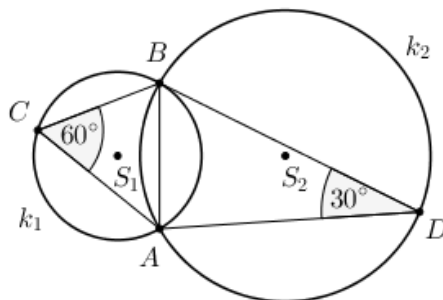
Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

1. ožujka 2023.

1. Odredite sve vrijednosti cijeloga broja x za koje vrijedi $(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 4x - 5)} = 1$.
2. Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 12}}{|5 + x| - 2} - \frac{x^2 - 81}{\sqrt{10 - 2x}}$.
3. Zadan je trokut ABC . Ako je $|AB| = 3\sqrt{3}$ cm, $|AC| - 2|BC| = 3$ cm, a mjera kuta nasuprot stranici \overline{AC} iznosi 150° , odredite sinus kuta nasuprot stranici \overline{AB} .
4. Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1, 2, \dots, 2022, 2023\}$ tako da njihov zbroj bude djeljiv s 5?
5. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B kao što je prikazano na slici. Točka C nalazi se na kružnici k_1 , a točka D na kružnici k_2 tako da vrijedi $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ i $\sphericalangle BDA = 30^\circ$. Ako su središta kružnica k_1 i k_2 udaljena $4\sqrt{3}$ cm, kolika je duljina njihove zajedničke tetive \overline{AB} ?



* * *

6. Odredite sve uređene parove realnih brojeva (x, y) koji su rješenje sustava jednačji.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{7-y} = -1 \\ \sqrt{x+y} = 4 \end{cases}$$
7. Zadan je jednakokratan trokut ABC s osnovicom \overline{AB} duljine 14 cm i krakovima duljine 25 cm. Točka P polovište je osnovice \overline{AB} . Na stranici \overline{BC} odabrana je točka Q , a na stranici \overline{AC} točka R tako da je $AB \parallel QR$ i da je površina trokuta PQR najveća moguća. Odredite opseg i površinu trokuta PQR .

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

1. ožujka 2023.

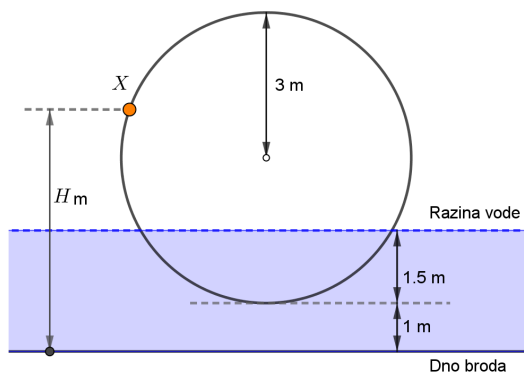
1. Odredite sva rješenja jednadžbe $|\cos^2 x - 2 \sin x| = 2$.
2. Ana, Bruno, Cvita, Dino i Ema pokušavaju se rasporediti u kinu na pet stolica u jednom redu. Na koliko načina to mogu učiniti ako Ana ne želi sjediti ni pored Brune ni pored Cvite, a Dino ne želi sjediti pored Eme?
3. Neka su α i β mjere dvaju kutova u trokutu čiji polumjer opisane kružnice iznosi 6 cm. Odredite sinus trećeg kuta toga trokuta i duljinu njemu nasuprotne stranice, ako vrijede sljedeće jednakosti:

$$3 \sin \alpha + 4 \cos \beta = 6, \quad 4 \sin \beta + 3 \cos \alpha = 2.$$

4. Broj Klarinih godina jednak je $\log_{\sqrt[3]{5}} a^2$, broj Marijinih godina jednak je $\log_{5\sqrt{5}} (125b^9)$, a broj Janovih godina jednak je $\frac{1}{\log_{c^2} \sqrt[3]{5}}$. Koliko iznosi zbroj njihovih godina ako je $abc = 625$?
5. Četiri grada na karti određuju vrhove četverokuta $ABCD$ kojemu se može opisati kružnica polumjera R . Udaljenost između gradova A i C je $2R$, a udaljenost između gradova A i B jednaka je udaljenosti između gradova B i C . Omjer udaljenosti između gradova A i D i gradova C i D jednak je $\sqrt{3}$. Kolika je udaljenost između gradova B i D ?

* * *

6. Mrlja, na slici označena s X , nalazi se u nekom trenutku na vanjskom rubu kotača modela parobroda s lopaticama. Kotač ima polumjer 3 m, a rotira u smjeru suprotnom od kazaljke sata konstantnom brzinom i napravi 8 punih okreta u minuti. Ako se u trenutku $t = 0$ mrlja X nalazi na najvišoj točki kotača, odredite funkciju koja modelira gibanje kotača, odnosno određuje udaljenost mrlje (H) od dna broda u metrima nakon t sekundi. Najniža točka kotača je 1 metar iznad dna broda, a 1.5 metar ispod razine vode. U kojemu će trenutku t mrlja prvi puta ući u vodu i koliko će dugo biti pod vodom?



7. Zadana je trostrana piramida $SABC$ kojoj je strana SBC okomita na bazu ABC , pri čemu je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 60^\circ$ i $|SB| = |SC| = 1$. Odredite obujam piramide $SABC$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

1. ožujka 2023.

1. Zadana je funkcija

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} (a^x + a^{-x}),$$

pri čemu je a pozitivan realan broj različit od 1. Koliko je $f(p+t) + f(p-t)$ ako je $f(t) = 20$ i $f(p) = 25$?

2. Niz (x_n) je zadan rekurzivnom formulom:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2n + 1, \quad n \geq 1.$$

Odredite x_{2023} .

3. Zbroj svih 1002-znamenkastih brojeva koji u svojem zapisu imaju tisuću nula i dvije jedinice iznosi S . Odredite ostatak koji se dobije pri dijeljenju broja S brojem 3.
4. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi:

$$|z + iz| = 2, \quad \operatorname{Re}(z^4) = -2 \quad \text{i} \quad \frac{3\pi}{2} < \arg(z) < 2\pi.$$

5. Izračunajte zbroj $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{199}{99^2 \cdot 100^2}$.

* * *

6. Zadane su točke $M(2, -5)$ i $N(-6, 7)$. Koje točke na pravcu $x - y + 5 = 0$ s točkama M i N određuju pravokutan trokut?
7. Zadan je paralelogram $ABCD$. Točke E i F su redom nožišta visina povučениh iz vrha D na stranicu \overline{AB} , odnosno \overline{BC} . Ako je $\cos \angle EDF = \frac{1}{3}$, $|DE| = 20$, $|DF| = 32$, koliko iznosi površina četverokuta $DEBF$?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.