Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

1. Dokaži da jednadžba
$$(n-20)^3 + 2n^3 = (n+20)^3$$
nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

2. Odredi sva realna rješenja sustava jednadžbi
$$\frac{xy}{4y-3x} = 20,$$
$$\frac{xz}{2x-3z} = 15,$$
$$\frac{zy}{4y-5z} = 12.$$

3. Marijan je na ploču napisao niz od n prostih brojeva tako da je svaki sljedeći broj za 6 veći od prethodnog.

Dokaži da postoji najveći prirodan broj n za koji je to moguće. Koji je to najveći n i koje je sve nizove Marijan mogao napisati na ploču za taj najveći n?

4. Trokutu ABC upisana je kružnica koja dira stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama D, E i F. Pravac koji prolazi točkom C i paralelan je s DE siječe pravac DF u točki M, a pravac koji prolazi točkom C i paralelan je s DF siječe pravac DE u točki N. Dokaži da pravac MN sadrži srednjicu trokuta ABC.

5. U krugu sjede 2023 osobe. Među njima je N osoba koje uvijek govore istinu, dok svi ostali uvijek lažu. Svi su dali izjavu: „Obje osobe koje sjede do mene lažu." Odredi sve vrijednosti broja N za koje je to moguće.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

1. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$, odredi sliku funkcije $f(x) = \dfrac{2023}{x^2 - a^2 - x - a}$.

2. Jednadžba
$$(x^2 + ax + b)(x^2 + ax + c) = 0$$
ima četiri različita realna rješenja i to su a, b, c i -1. Odredi brojeve a, b i c.

3. Odredi sve uređene trojke (m, n, p) gdje su m i n prirodni brojevi, a p prost za koje vrijedi
$$25^n + 2 \cdot 5^n = p^m + 8.$$

4. Unutar paralelograma $ABCD$ odabrana je točka T tako da vrijedi $|TC| = |BC|$. Neka su P i M redom polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{AT}$. Dokaži da je pravac BT okomit na pravac PM.

5. Žaba Žana nalazi se ishodištu brojevnog pravca, te u svakom koraku skače za jedan ulijevo, za jedan udesno ili ostaje na mjestu. Lina i Dina izabrale su relativno proste brojeve m i n, gdje je $m > n$. Nakon svakih n koraka Lina zapovijeda: „Lijevo!", a nakon svakih m koraka Dina zapovijeda: „Desno!" Žana miruje dok ne čuje prvu zapovijed, a nakon toga počinje (ili nastavlja) skakati u smjeru prema zapovijedi. Zaustavlja se u prvom koraku u kojem čuje obje zapovijedi. U ovisnosti o brojevima m i n odredi na kojoj se udaljenosti od ishodišta Žana zaustavila.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$1225 \cdot 5^{x^2-3x} = 7^{x+1}.$$

2. Ovisno o realnom parametru p odredi broj rješenja jednadžbe $\cos 2x = p(\sin x + \cos x)$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

3. Dan je trokut ABC takav da je $\sphericalangle ACB = 60°$, $|AC| = \sqrt{3} - 1$ i $|BC| = 2$. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle ACM$.

4. Odredi sve racionalne brojeve x za koje vrijedi

$$x \cdot \lfloor x \rfloor \cdot (x - \lfloor x \rfloor) = 254.$$

Za racionalni broj t, $\lfloor t \rfloor$ najveći je cijeli broj koji nije veći od t. Na primjer, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$.

5. Dana je ploča $n \times n$, obojana poput šahovske, pri čemu je gornje lijevo polje crne boje. Azra u svakom koraku bira šest polja ploče koja tvore 2×3 ili 3×2 pravokutnik i sadrže točno tri bijela polja, te ta tri polja zacrni. Za koje n Azra može postići da sva polja budu crne boje?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

1. Odredi sve brojeve $a, b \in \mathbb{N}_0$ i $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$2^a + 3^b + 1 = n!.$$

2. Za svaki prirodan broj n neka su a_n i b_n realni brojevi takvi da je $(\sqrt{3}+i)^n = a_n + ib_n$. Dokaži da izraz

$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n}$$

poprima istu vrijednost za sve $n \in \mathbb{N}$ te odredi tu vrijednost.

3. Neka su a, b i c različiti cijeli brojevi i $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom takav da je $P(a) = a^3$ i $P(b) = b^3$. Odredi $P(1)$.

4. Dvije kružnice sijeku se u točkama A i B, a pritom manja kružnica prolazi središtem veće. Tangente na manju kružnicu u točkama A i B sijeku veću kružnicu ponovno u točkama A_1 i B_1. Dokaži da je pravac A_1B simetrala kuta $\sphericalangle AA_1B_1$.

5. Nikola je zamislio deveteroznamenkasti broj $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_9}$ u čijem se dekadskom prikazu svaka od znamenaka od 1 do 9 pojavljuje točno jednom. Zatim je izračunao 6 zbrojeva

$$\overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_2a_3a_4}, \quad \overline{a_2a_3a_4} + \overline{a_3a_4a_5}, \quad \overline{a_3a_4a_5} + \overline{a_4a_5a_6},$$
$$\overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_5a_6a_7}, \quad \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_6a_7a_8}, \quad \overline{a_6a_7a_8} + \overline{a_7a_8a_9}$$

i napisao na papir najveći od njih. Koji je najmanji broj koji je mogao zapisati na papir?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.