## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**1. razred – srednja škola – B varijanta**

**1. ožujka 2023.**

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

### Zadatak B-1.1.

Skratite razlomak $\dfrac{(x+1)^4-4(x+x^2)^2+4x^2-(1+x)^2}{3x^2+x}$ ako je $x \neq 0,\ x \neq -\dfrac{1}{3}$.

### Rješenje.

Faktorizirajmo brojnik i nazivnik danog razlomka.

Izlučimo $x$ u nazivniku te u brojniku iz druge zagrade:

$$\frac{(x+1)^4-4(x+x^2)^2+4x^2-(1+x)^2}{3x^2+x}=\frac{(x+1)^4-4x^2(1+x)^2+4x^2-(1+x)^2}{x(3x+1)}$$ 1 bod

Sada u brojniku iz prvog i zadnjeg člana te drugog i trećeg člana izlučimo zajednički faktor, pa redom slijedi:

$$=\frac{(x+1)^2\left[(x+1)^2-1\right]-4x^2\left[(1+x)^2-1\right]}{x(3x+1)}$$ 1 bod

$$=\frac{\left[(x+1)^2-1\right]\left[(x+1)^2-4x^2\right]}{x(3x+1)}$$ 2 boda

$$=\frac{(x+1-1)(x+1+1)(x+1-2x)(x+1+2x)}{x(3x+1)}$$

$$=\frac{x(x+2)(1-x)(3x+1)}{x(3x+1)}$$ 1 bod

Sada razlomak možemo skratiti pa je rješenje

$=(x+2)(1-x)$. 1 bod

### Zadatak B-1.2.

U nizu od šest prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći broj jednak je zbroju dva prethodna. Odredite sve takve nizove brojeva, ako je peti broj u nizu jednak 25.

### Rješenje.

Neka su $a$ i $b$ prvi i drugi broj u danom nizu. Tada je treći broj u nizu jednak $a+b$, a četvrti $a+2b$. 1 bod

Broj 25 jednak je zbroju trećeg i četvrtog broja u nizu, odnosno

$(a+b)+(a+2b)=25$. Tako dobivamo jednadžbu

$2a+3b=25$ 1 bod

$2a = 25 - 3b$ (*)

Kako je na lijevoj strani paran i pozitivan broj, to mora biti i na desnoj strani.

Stoga je $b$ neparan broj manji od 8, odnosno jedan od brojeva 1, 3, 5 ili 7. 2 boda

Za te vrijednosti broja $b$ dobivamo iz (*) redom da je broj $a$ jednak 11, 7, 5 ili 2. 1 bod

Traženi nizovi brojeva su:

11, 1, 12, 13, 25, 38

8, 3, 11, 14, 25, 39

5, 5, 10, 15, 25, 40

2, 7, 9, 16, 25, 41. 1 bod

**Zadatak B-1.3.**

Može li se broj 24024 zapisati u obliku razlomka $\frac{m!}{n!}$ pri čemu $m!$ označava umnožak prvih $m$ prirodnih brojeva, a $n!$ označava umnožak prvih $n$ prirodnih brojeva? Obrazložite.

**Rješenje.**

Ako brojevi $m$ i $n$ postoje, vrijedi

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = 24024.$$

Da bi se ovaj razlomak mogao skratiti mora biti $m > n$. Stoga je

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \cdot (n+1)(n+2) \ldots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = 24024$$

1 bod

ili nakon skraćivanja

$(n+1)(n+2) \ldots m = 24024.$ 1 bod

Zaključujemo da je traženi zapis moguć ako se broj 24024 može zapisati kao umnožak uzastopnih prirodnih brojeva. 1 bod

Rastav broja 24024 na proste faktore jest $24024 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ 1 bod

Rasporedimo dobivene faktore na sljedeći način:

$2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$ 1 bod

Zaključujemo da se broj 24024 može se zapisati kao umnožak uzastopnih brojeva 11, 12, 13 te 14, odnosno $24024 = \frac{14!}{10!}$. 1 bod

**Zadatak B-1.4.**

Odredite sve realne brojeve $a$ za koje jednadžba

$$\frac{a}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=2023x$$

nema rješenja.

**Rješenje.**

Uvjeti na rješenje jednadžbe su $x \neq 0,\ x \neq -1$. 1 bod

Postupnim računanjem pojednostavnit ćemo nazivnik razlomka na lijevoj strani jednadžbe. Slijedi redom:

$$\frac{a}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=2023x$$

$$\frac{a}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=2023x$$

$$\frac{a}{1-\frac{x}{x+1}}=2023x$$ 1 bod

$$\frac{a}{\frac{x+1-x}{x+1}}=2023x \text{ odnosno } a(x+1)=2023x.$$ 1 bod

Tada je $ax+a=2023x$ odnosno

$x(2023-a)=a$. 1 bod

Za $a=2023$ ova jednadžba prelazi u $0 \cdot x=2023$ pa jednadžba nema rješenja. 1 bod

Za $a \neq 2023$ rješenje početne jednadžbe jest $x=\dfrac{a}{2023-a}$ (*), ali početna jednadžba neće imati rješenje i ako dobiveno rješenje $x$ ne zadovoljava početne uvjete.

Broj $a$ za koji se to može dogoditi dobit ćemo ako u (*) uvrstimo $x=0$ i $x=-1$.

U prvom slučaju dobivamo $a=0$, a drugi je slučaj nemoguć.

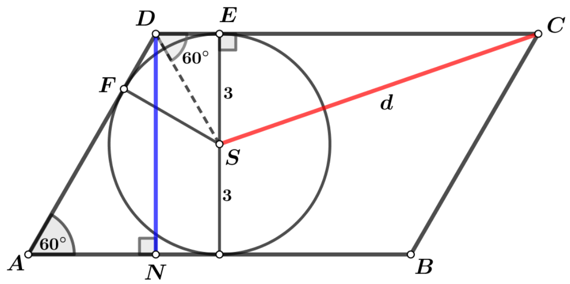
Dakle, dana jednadžba neće imati rješenje ako je $a=0$ i ako je $a=2023$. 1 bod

Napomena: Učenik ne mora napisati početne uvjete ako je na kraju provjerio rezultat i napisao točno rješenje. Ako nije napisao uvjete i ima samo rješenje $a=2023$, može dobiti najviše 4 boda.

**Zadatak B-1.5.**

Kružnica polumjera 3 cm upisana je u paralelogram tako da dodiruje tri njegove stranice. Mjera šiljastog kuta paralelograma iznosi $60^\circ$, a jedna stranica paralelograma je za $2\sqrt{3}$ cm dulja od druge stranice. Odredite udaljenost središta kružnice od najudaljenijeg vrha paralelograma.

**Rješenje.**




Skica s označenim bar jednim pravim kutom, polumjerom i/ili visinom te traženom duljinom $d$. 1 bod

Prema slici, vrh $C$ leži na stranici $\overline{BC}$ koju zadana kružnica ne dodiruje pa je očito vrh $C$ najudaljeniji od središta. Odredimo prvo duljine stranica paralelograma.

Iz trokuta $AND$ slijedi $|AD| = \dfrac{|DN|}{\sin 60^\circ} = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$ cm, a tada je

$|CD| = |AB| = |AD| + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm. 2 boda

$DS$ je simetrala kuta $\sphericalangle FDE$ mjere $120^\circ$ pa je $\sphericalangle SDE = 60^\circ$. 1 bod

Iz trokuta $DES$ slijedi

$|DE| = \dfrac{3}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \sqrt{3}$ cm, pa je $|EC| = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm. 1 bod

Konačno primjenom Pitagorinog poučka dobivamo traženu udaljenost

$d = \sqrt{|ES|^2 + |EC|^2} = \sqrt{9 + 75} = \sqrt{84}$ cm ili $2\sqrt{21}$ cm. 1 bod

**Zadatak B-1.6.**

Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva $(m,\ n)$ za koje je broj $3^m + 7^n$ djeljiv s 10 ako je $1 \leqslant m \leqslant 80$, $81 \leqslant n \leqslant 185$?

**Rješenje.**

Broj je djeljiv s 10 ako i samo ako mu je zadnja znamenka 0. Kako bismo odredili zadnju znamenku zbroja potencija $3^m + 7^n$, promotrit ćemo zadnju znamenku potencije $3^m$, odnosno $7^n$.

Zadnja znamenka potencije $3^m$ može biti 3, 9, 7 ili 1 i ponavlja se ciklički tim redoslijedom. Dakle, ako eksponent $m$ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1, zadnja znamenka potencije $3^m$ jest 3. Ako je taj ostatak 2, zadnja je znamenka 9. Ako je ostatak 3, zadnja je znamenka 7 i ako je $m$ djeljiv sa 4, zadnja je znamenka 1. 2 boda

Među svim brojevima $m$, $1 \leqslant m \leqslant 80$ ima točno:

$\dfrac{77-1}{4}+1=20$ onih koji pri dijeljenju sa 4 daju ostatak 1: 1, 5, ..., 77,

20 koji daju ostatak 2: 2, 6, ..., 78,

20 koji daju ostatak 3: 3, 7, ..., 79 i

20 koji su djeljivi sa 4. 2 boda

Analogno prethodnim razmatranjima, zadnja znamenke potencije $7^n$ je 7 ako eksponent $n$ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1, 9 ako je taj ostatak 2, 3 ako je ostatak 3 i 1 ako je $n$ djeljiv sa 4. 1 bod

Među svim brojevima $n$, $81 \leqslant n \leqslant 185$ ima točno:

$\dfrac{185-81}{4}+1=27$ onih koji pri dijeljenju sa 4 daju ostatak 1: 81, 85, ..., 181, 185,

26 onih koji daju ostatak 2: 82, 86, ..., 182,

26 onih koji daju ostatak 3: 83, 87, ..., 183 i

26 koji su djeljivi sa 4: 84, 88, ..., 180, 184. 2 boda

Traženi zbroj $3^m + 7^n$ će imati zadnju znamenku 0 odnosno biti djeljiv s 10 u jednom od sljedeća četiri slučaja:

- Potencija $3^m$ ima zadnju znamenku 3 i potencija $7^n$ zadnju znamenku 7. Prema prethodnim razmatranjima ima 20 mogućnosti odabira broja $m$ i 27 mogućnosti odabira broja $n$, pa je u ovom slučaju ukupno $20 \cdot 27 = 540$ uređenih parova $(m,\ n)$.

- Potencija $3^m$ ima zadnju znamenku 9 i potencija $7^n$ zadnju znamenku 1. Takvih je parova $(m,\ n)$ ukupno $20 \cdot 26 = 520$.

- Potencija $3^m$ ima zadnju znamenku 7 i potencija $7^n$ zadnju znamenku 3. Takvih je parova $(m,\ n)$ ukupno $20 \cdot 26 = 520$.

- Potencija $3^m$ ima zadnju znamenku 1 i potencija $7^n$ zadnju znamenku 9. Takvih je parova $(m,\ n)$ ukupno $20 \cdot 26 = 520$. 2 boda

Konačno, ukupan broj traženih uređenih parova jednak je

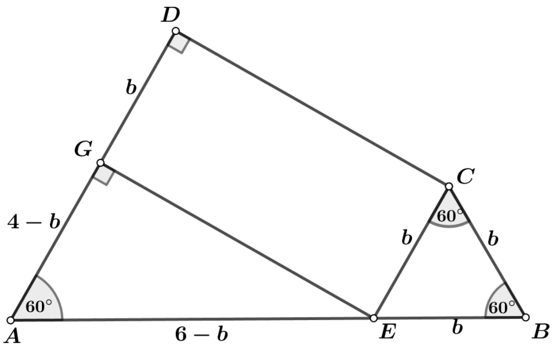
$20 \cdot 27 + 3 \cdot 20 \cdot 26 = 540 + 3 \cdot 520 = 2100.$ 1 bod

Napomena: Učenik ne mora ispisivati brojeve $m$ i $n$ koji pri dijeljenju s 4 daju ostatak 0, 1, 2 ili 3. Dovoljno je da ih prebroje.

## Zadatak B-1.7.

Zadan je četverokut $ABCD$. Ako je $|AB| = 6$ cm, $|AD| = 4$ cm, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 60°$ i $\sphericalangle ADC = 90°$, izračunajte duljine dijagonala i površinu toga četverokuta.

**Prvo rješenje.**




U vrhu $C$, četverokuta $ABCD$, povučemo paralelu sa stranicom $\overline{AD}$. Zatim u točki $E$, u kojoj ta paralela siječe stranicu $\overline{AB}$, povučemo paralelu sa stranicom $\overline{CD}$. Točku u kojoj ta paralela siječe stranicu $\overline{AD}$ označimo s $G$. Time smo četverokut $ABCD$ podijelili na pravokutnik $GECD$, jednakostraničan trokut $EBC$ te pravokutni trokut $AEG$, kao na slici.

Skica uz ovakvu podjelu četverokuta. 2 boda

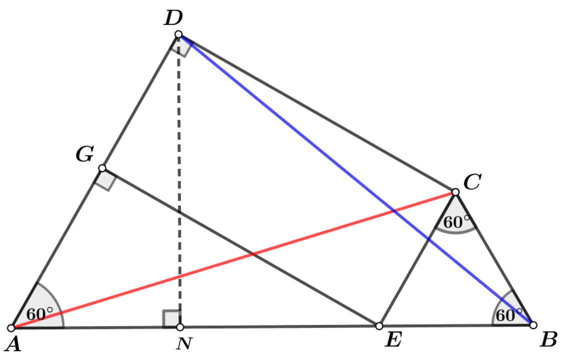
Uz oznake kao na slici, iz pravokutnog trokuta $AEG$, slijedi $\cos 60° = \dfrac{4-b}{6-b}$, odnosno $b = 2$ cm. 1 bod

Tada je $|AG| = 4 - 2 = 2$ cm, $|AE| = 6 - 2 = 4$ cm,

$|DC| = |GE| = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm. 1 bod

Duljinu dijagonale $\overline{AC}$ računamo koristeći Pitagorin poučak za trokut $ACD$:

$|AC| = 2\sqrt{7}$ cm. 1 bod




Duljinu dijagonale $\overline{BD}$ računamo iz pravokutnog trokuta $NBD$, gdje je točka $N$ nožište okomice povučene iz vrha $D$ na stranicu $\overline{AB}$.

Iz pravokutnog trokuta $AND$ imamo redom:

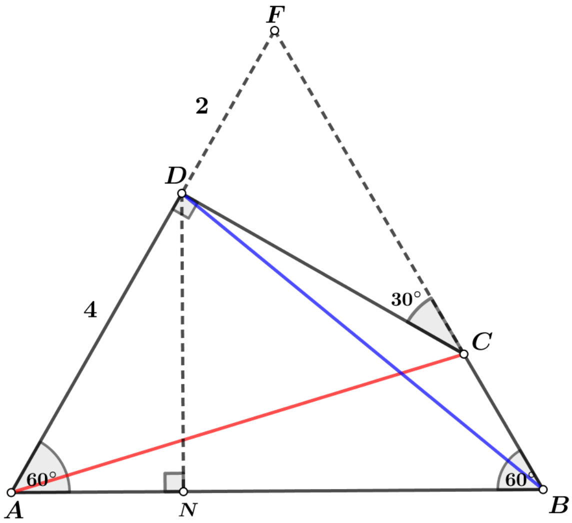
$|DN| = 4 \sin 60° = 2\sqrt{3}$ cm, $|AN| = 4 \cos 60° = 2$ cm. 1 bod

Tada je $|NB| = 6 - 2 = 4$ cm, a $|BD| = \sqrt{|DN|^2 + |NB|^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm. 2 boda

Površinu danog četverokuta možemo računati kao zbroj površina pravokutnika $GECD$, trokuta $EBC$ i trokuta $AEG$.

$P = P_{AEG} + P_{EBC} + P_{GECD} = \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{4\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$ 2 boda

**Drugo rješenje.**




Produžimo stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ preko vrhova $D$ i $C$ tako da se sijeku u točki $F$, vrhu trokuta $ABF$.

Dobiveni trokut $ABF$ je jednakostraničan trokut.

Skica uz ovakvu nadopunu, ako se na njoj jasno vidi da je dobiven jednakostraničan trokut. 2 boda

Kako je $|DF| = 2$ cm, a $\sphericalangle DFC = 60°$ iz pravokutnog trokuta $FDC$ slijedi da je

$|DC| = 2 \cdot \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3}$ cm. 2 boda

Tada duljinu dijagonale $\overline{AC}$ računamo iz pravokutnog trokuta $ADC$ s pomoću Pitagorina poučka.

$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{16 + 12} = 2\sqrt{7}$ cm. 1 bod

Duljinu dijagonale $\overline{BD}$ računamo iz pravokutnog trokuta $NBD$, gdje je točka $N$ nožište okomice povučene iz vrha $D$ na stranicu $\overline{AB}$.

Iz pravokutnog trokuta $AND$ imamo redom:

$|DN| = 4 \sin 60° = 2\sqrt{3}$ cm, $|AN| = 4 \cos 60° = 2$ cm. 1 bod

Tada je $|NB| = 6 - 2 = 4$ cm, a $|BD| = \sqrt{|DN|^2 + |NB|^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm. 2 boda

Površina danog četverokuta je razlika površina trokuta $ABF$ i trokuta $FDC$:

$P = P_{ABF} - P_{FDC} = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$ 2 boda

## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**2. razred – srednja škola – B varijanta**

**1. ožujka 2023.**

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

### Zadatak B-2.1.

Odredite sve vrijednosti cijeloga broja $x$ za koje vrijedi $(x^2-5x+5)^{(x^2-4x-5)}=1$.

**Rješenje.**

Razlikujemo tri slučaja u kojima vrijednost potencije iznosi 1. Prva je mogućnost da baza potencije iznosi 1, druga je mogućnost da eksponent potencije iznosi 0, a baza je različita od 0, dok je treća mogućnost da baza potencije iznosi $-1$, a eksponent je oblika $2k,\ k\in\mathbb{Z}$. 1 bod

1. slučaj: baza potencije iznosi 1.

Tada je $x^2-5x+5=1$, odnosno, vrijedi da je $x^2-5x+4=0$.

Rješavanjem jednadžbe dobiva se $x_1=1$ i $x_2=4$. 1 bod

Za $x=1$: $1^{-8}=1$

Za $x=4$: $1^{-5}=1$

2. slučaj: eksponent potencije iznosi 0, a baza je različita od 0.

Tada je $x^2-4x-5=0$.

Rješavanjem jednadžbe dobiva se $x_1=5$ i $x_2=-1$. 1 bod

Provjerimo uvrštavanjem da za $x_1=5$ i $x_2=-1$ baza potencije nije 0.

Za $x=5$: $5^0=1$

Za $x=-1$: $11^0=1$ 1 bod

3. slučaj: baza potencije iznosi $-1$, a eksponent je oblika $2k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Odredimo najprije vrijednosti varijable $x$ za koje vrijedi $x^2-5x+5=-1$, a zatim provjerimo je li za te vrijednosti eksponent potencije paran broj.

Rješavanjem jednadžbe $x^2-5x+6=0$ dobiva se $x_1=3$ i $x_2=2$. 1 bod

Za $x=3$: $(-1)^{-8}=1$

Za $x=2$: $(-1)^{-9}=-1$

Prema tome, vrijednost potencije iznosi 1 za $x=3$, ali ne iznosi 1 za $x=2$. 1 bod

Konačno, zaključujemo da vrijedi $x\in\{-1,1,3,4,5\}$.

## Zadatak B-2.2.

Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{|5+x|-2}-\dfrac{x^2-81}{\sqrt{10-2x}}$.

## Rješenje.

Kako bi funkcija bila dobro definirana, potkorijenske veličine moraju biti nenegativne, a vrijednosti algebarskih izraza u nazivnicima ne smiju biti jednake 0. 1 bod

1. uvjet: $x^2+x-12 \geqslant 0$.

Rješenje ove nejednadžbe jest $\langle -\infty,\ -4] \cup [3,\ +\infty\rangle$. 1 bod

2. uvjet: $|5+x|-2 \neq 0$.

Dakle, mora vrijediti $|5+x| \neq 2$, odnosno, $x \neq -3$ i $x \neq -7$. 1 bod

3. uvjet: $10-2x \geqslant 0$ i $10-2x \neq 0$, odnosno, $10-2x>0$.

Rješenje ove nejednadžbe jest $\langle -\infty,\ 5\rangle$. 1 bod

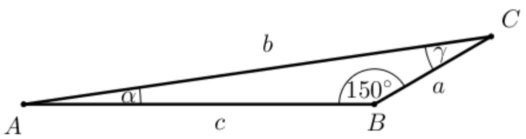
Konačno rješenje presjek je svih uvjeta, to jest, prirodno područje definicije funkcije $f$ jest: $\langle -\infty,\ -7\rangle \cup \langle -7,\ -4] \cup [3,\ 5\rangle$. 2 boda

## Zadatak B-2.3.

Zadan je trokut $ABC$. Ako je $|AB|=3\sqrt{3}$ cm, $|AC|-2|BC|=3$ cm, a mjera kuta nasuprot stranici $\overline{AC}$ iznosi $150^\circ$, odredite sinus kuta nasuprot stranici $\overline{AB}$.

## Rješenje.

Skicirajmo trokut $ABC$, uvedimo oznake za duljine stranica i veličine kutova te označimo zadane elemente: $c=3\sqrt{3}$ cm, $b-2a=3$ cm, $\beta=150^\circ$.




Prema poučku o kosinusu vrijedi: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$.

$\cos\beta=\cos 150^\circ=-\cos 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 1 bod

$(3+2a)^2=a^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2-2a\cdot 3\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 1 bod

$9+12a+4a^2=27+a^2+9a$

$3a^2+3a-18=0$

$a^2+a-6=0$ 1 bod

$(a-2)(a+3)=0$

$a=2$ cm (jer duljina stranice ne može iznositi $a=-3$ cm)

$b=7$ cm 1 bod

Sinus traženoga kuta odredimo s pomoću poučka o sinusima:

$\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{b}{\sin\beta}$ 1 bod

$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\gamma}=\dfrac{7}{\sin 150^\circ}$

$\sin\gamma=\dfrac{3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ 1 bod

**Zadatak B-2.4.**

Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1,2,...,2022,2023\}$ tako da njihov zbroj bude djeljiv s 5?

**Prvo rješenje.**

U skupu brojeva $\{1,2,...,2022,2023\}$ nalazi se:

405 brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 1

405 brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2

405 brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 3

404 broja koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 4

404 broja djeljiva brojem 5. 1 bod

Zbroj dvaju odabranih brojeva bit će djeljiv s 5 u tri slučaja.

1\. slučaj: oba broja djeljiva su brojem 5.

Prvi broj možemo izabrati na 404 načina, a drugi na 403 načina jer brojevi moraju biti različiti.

Postoji $\dfrac{404\cdot 403}{2}=81\,406$ načina (dijelimo s 2 jer smo svaki par brojeva brojili dvaput).

2 boda

2\. slučaj: jedan broj daje ostatak 1, a drugi ostatak 4 pri dijeljenju brojem 5.

Postoji $405\cdot 404=163\,620$ načina na koje možemo odabrati takva dva broja. 1 bod

3\. slučaj: jedan broj daje ostatak 2, a drugi ostatak 3 pri dijeljenju brojem 5.

Postoji $405\cdot 405=164\,025$ načina na koje možemo odabrati takva dva broja. 1 bod

Ukupno postoji $81\,406+163\,620+164\,025=409\,051$ način na koji to možemo učiniti.

1 bod

**Drugo rješenje.**

U skupu $\{1, 2, ..., 2022, 2023\}$ zadnju znamenku 1, 2 ili 3 imaju po 203 broja, dok znamenkom 0, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9 završavaju po 202 broja. 1 bod

Zbroj je djeljiv brojem 5 ako mu je zadnja znamenka 0 ili 5.

1. slučaj: zadnja znamenka zbroja iznosi 0.

| zadnja znamenka jednoga broja | zadnja znamenka drugoga broja | broj mogućnosti |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{202 \cdot 201}{2} = 20\ 301$ |
| 1 | 9 | $203 \cdot 202 = 41\ 006$ |
| 2 | 8 | $203 \cdot 202 = 41\ 006$ |
| 3 | 7 | $203 \cdot 202 = 41\ 006$ |
| 4 | 6 | $202 \cdot 202 = 40\ 804$ |
| 5 | 5 | $\frac{202 \cdot 201}{2} = 20\ 301$ |

U prvome je slučaju $2 \cdot 20\ 301 + 3 \cdot 41\ 006 + 40\ 804 = 204\ 424$ mogućnosti. 2 boda

2. slučaj: zadnja znamenka zbroja iznosi 5.

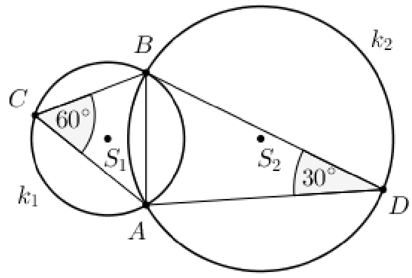
| zadnja znamenka jednoga broja | zadnja znamenka drugoga broja | broj mogućnosti |
|---|---|---|
| 0 | 5 | $202 \cdot 202 = 40\ 804$ |
| 1 | 4 | $203 \cdot 202 = 41\ 006$ |
| 2 | 3 | $203 \cdot 203 = 41\ 209$ |
| 6 | 9 | $202 \cdot 202 = 40\ 804$ |
| 7 | 8 | $202 \cdot 202 = 40\ 804$ |

U drugome je slučaju $3 \cdot 40\ 804 + 41\ 006 + 41\ 209 = 204\ 627$ mogućnosti. 2 boda

Ukupno postoji $204\ 424 + 204\ 627 = 409\ 051$ način izbora dva tražena broja. 1 bod

**Zadatak B-2.5.**

Kružnice $k_1$ i $k_2$ sijeku se u točkama $A$ i $B$ kao što je prikazano na slici. Točka $C$ nalazi se na kružnici $k_1$, a točka $D$ na kružnici $k_2$ tako da vrijedi $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ i $\sphericalangle BDA = 30^\circ$. Ako su središta kružnica $k_1$ i $k_2$ udaljena $4\sqrt{3}$ cm, kolika je duljina njihove zajedničke tetive $\overline{AB}$?

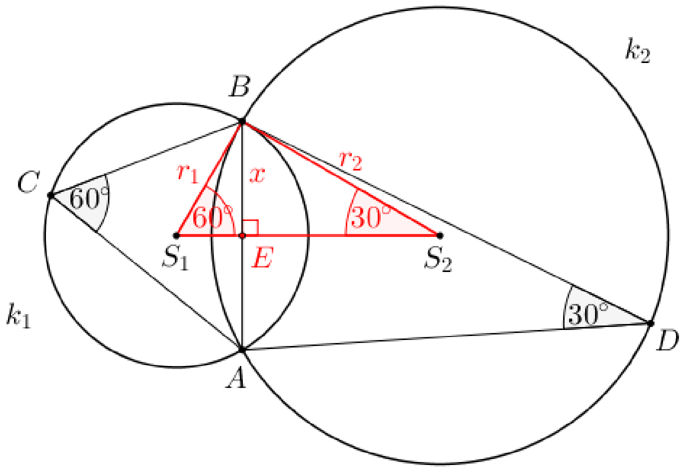



**Prvo rješenje.**

Označimo s $r_1$ i $r_2$ polumjere kružnica $k_1$ i $k_2$. Neka je $E$ polovište tetive $\overline{AB}$ i $x = |BE|$.

Kut $\sphericalangle ACB$ je obodni nad lukom $\overparen{AB}$ pa je njegov središnji kut $\sphericalangle AS_1B = 120^\circ$, odnosno $\sphericalangle ES_1B = 60^\circ$.

Kut $\sphericalangle BDA$ je obodni nad lukom $\overparen{BA}$ pa je njegov središnji kut $\sphericalangle BS_2A = 60^\circ$, odnosno $\sphericalangle BS_2E = 30^\circ$. 1 bod




Trokut $S_1S_2B$ je pravokutan pa vrijedi $r_1^2 + r_2^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$. 1 bod

U pravokutnome trokutu $EBS_1$ vrijedi da je $\sin 60^\circ = \dfrac{x}{r_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $r_1 = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$. 1 bod

Na isti se način iz pravokutnoga trokuta $EBS_2$ dobiva da je $\sin 30^\circ = \dfrac{x}{r_2} = \dfrac{1}{2}$, odnosno vrijedi da je $r_2 = 2x$. 1 bod

Uvrstimo dobivene izraze u jednakost $r_1^2 + r_2^2 = 48$.

Iz jednadžbe $\dfrac{4x^2}{3} + 4x^2 = 48$ dobivamo da je $x^2 = 9$, odnosno da je $x = 3$ cm. 1 bod

Konačno, zaključujemo da je $|AB| = 2x = 6$ cm. 1 bod

**Drugo rješenje.**

Koristimo istu skicu i oznake kao u prvome rješenju.

Kut $\sphericalangle ACB$ je obodni nad lukom $\widehat{AB}$ pa je njegov središnji kut $\sphericalangle AS_1B = 120°$, odnosno $\sphericalangle ES_1B = 60°$.

Kut $\sphericalangle BDA$ je obodni nad lukom $\widehat{BA}$ pa je njegov središnji kut $\sphericalangle BS_2A = 60°$, odnosno $\sphericalangle BS_2E = 30°$. 1 bod

Uočimo da je trokut $S_1S_2B$ pola jednakostraničnoga trokuta stranice duljine $a = |S_1S_2| = 4\sqrt{3}$ cm.

Tada je $r_1 = |S_1B| = \dfrac{a}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm. 1 bod

Vrijedi i da je $r_2 = |S_2B| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6$ cm. 1 bod

Kako je trokut $S_1S_2B$ pravokutan, površinu mu možemo izračunati na dva načina, odnosno vrijedi da je $P = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{2} = \dfrac{x \cdot |S_1S_2|}{2}$. 1 bod

$2\sqrt{3} \cdot 6 = x \cdot 4\sqrt{3}$

$x = 3$ cm 1 bod

Konačno, zaključujemo da je $|AB| = 2x = 6$ cm. 1 bod

Napomena: Nakon što uoči da je trokut $S_1S_2B$ pola jednakostraničnoga trokuta stranice duljine $a = 4\sqrt{3}$ cm, učenik ne mora odrediti $r_1$ i $r_2$, već odmah može izračunati površinu trokuta $P = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ cm$^2$, za što dobiva 2 boda.

**Zadatak B-2.6.**

Odredite sve uređene parove realnih brojeva $(x,\ y)$ koji su rješenje sustava jednadžbi.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{7-y} = -1 \\ \sqrt{x+y} = 4 \end{cases}$$

**Prvo rješenje.**

Izrazimo najprije nepoznanicu $y$ iz jednadžbe $\sqrt{x+y} = 4$.

$\sqrt{x+y} = 4 /^2$

$x + y = 16$

$y = 16 - x$ 1 bod

Uvrštavanjem $y = 16 - x$ u gornju jednadžbu dobiva se jednadžba

$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{x-9} = -1.$ 1 bod

$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{x-9} = -1 /^3$

$2 - x + 3 \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2(x-9)} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2-x)(x-9)^2} + x - 9 = -1$ 1 bod

$3 \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2(x-9)} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2-x)(x-9)^2} = 6 / : 3$

$\sqrt[3]{(2-x)^2(x-9)} + \sqrt[3]{(2-x)(x-9)^2} = 2$ 1 bod

$\sqrt[3]{(2-x)(x-9)} \cdot \left(\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{x-9}\right) = 2$ 1 bod

Uočimo da u jednadžbu možemo uvrstiti vrijednost izraza $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{x-9} = -1$.

$\sqrt[3]{(2-x)(x-9)} \cdot (-1) = 2$ 1 bod

$\sqrt[3]{(2-x)(x-9)} = -2 /^3$

$-x^2 + 11x - 18 = -8$

$x^2 - 11x + 10 = 0$ 1 bod

$(x-1)(x-10) = 0$

Rješenja jednadžbe su brojevi $x_1 = 1$ i $x_2 = 10$. 1 bod

Odredimo i pripadne vrijednosti nepoznanice $y$.

$y_1 = 16 - 1 = 15$

$y_2 = 16 - 10 = 6$ 1 bod

Rješenja sustava jednadžbi uređeni su parovi $(1,\ 15)$ i $(10,\ 6)$. 1 bod

**Drugo rješenje.**

Izrazimo najprije nepoznanicu $y$ iz jednadžbe $\sqrt{x+y} = 4$.

$\sqrt{x+y} = 4 /^2$

$x + y = 16$

$y = 16 - x$ 1 bod

Uvrštavanjem $y = 16 - x$ u gornju jednadžbu dobiva se jednadžba

$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{x-9} = -1$. 1 bod

Uvedimo supstituciju $t^3 = 2 - x$. Tada je $x = 2 - t^3$. 1 bod

Posljednja jednadžba prelazi u $t + \sqrt[3]{-7-t^3} = -1$, odnosno $\sqrt[3]{7+t^3} = t + 1$. 1 bod

Kubirajmo lijevu i desnu stranu jednadžbe.

$7 + t^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$ 1 bod

$3t^2 + 3t - 6 = 0$ 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1 = -2$ i $t_2 = 1$. 1 bod

Tada je $x_1 = 2 - (-2)^3 = 10$ i $x_2 = 2 - 1^3 = 1$. 1 bod

Odredimo i pripadne vrijednosti nepoznanice $y$.

$y_1 = 16 - 1 = 15$

$y_2 = 16 - 10 = 6$ 1 bod

Rješenja sustava jednadžbi uređeni su parovi $(1,\ 15)$ i $(10,\ 6)$. 1 bod

**Treće rješenje.**

Izrazimo najprije nepoznanicu $y$ iz jednadžbe $\sqrt{x+y}=4$.

$\sqrt{x+y}=4/^2$

$x+y=16$

$y=16-x$ 1 bod

Uvrštavanjem $y=16-x$ u gornju jednadžbu dobiva se jednadžba

$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x-9}=-1.$ 1 bod

Uvedimo supstituciju $u=\sqrt[3]{2-x}$ i $v=\sqrt[3]{x-9}$.

Polazna jednadžba poprima oblik $u+v=-1$.

Uočimo da vrijedi: $u^3+v^3=(2-x)+(x-9)=-7$. 1 bod

Kubiranjem jednakosti $u+v=-1$ dobiva se:

$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=-1$

$u^3+v^3+3uv(u+v)=-1$ 1 bod

Uvrštavanjem vrijednosti izraza $u+v$ i $u^3+v^3$ može se odrediti vrijednost umnoška $uv$.

$-7+3uv(-1)=-1$

$-3uv=6$

$uv=-2$ 1 bod

Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} u+v=-1 \\ uv=-2 \end{cases}$.

Izrazimo nepoznanicu $v$ iz prve jednadžbe sustava, uvrstimo je u drugu i odredimo rješenja dobivene kvadratne jednadžbe.

$v=-1-u$

$u(-1-u)=-2$

$-u^2-u+2=0$ 1 bod

U prvome slučaju vrijedi da je $u=-2$ (odnosno, $v=1$).

Tada je: $u=\sqrt[3]{2-x}=-2$, to jest $x_1=10$. 1 bod

U drugome slučaju vrijedi da je $u=1$ (odnosno, $v=-2$).

Tada je: $u=\sqrt[3]{2-x}=1$, to jest $x_2=1$. 1 bod

Odredimo i pripadne vrijednosti nepoznanice $y$.

$y_1=16-1=15$

$y_2=16-10=6$ 1 bod

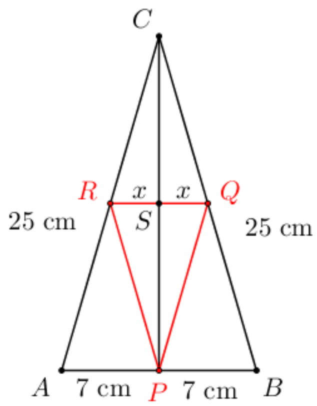
Rješenja sustava jednadžbi uređeni su parovi $(1,\ 15)$ i $(10,\ 6)$. 1 bod

**Zadatak B-2.7.**

Zadan je jednakokračan trokut $ABC$ s osnovicom $\overline{AB}$ duljine 14 cm i krakovima duljine 25 cm. Točka $P$ polovište je osnovice $\overline{AB}$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka $Q$, a na stranici $\overline{AC}$ točka $R$ tako da je $AB \parallel QR$ i da je površina trokuta $PQR$ najveća moguća. Odredite opseg i površinu trokuta $PQR$.

**Rješenje.**

Skicirajmo trokut $ABC$ i označimo zadane elemente.




1 bod

Budući je $P$ polovište osnovice $\overline{AB}$, znamo da je dužina $\overline{CP}$ visina trokuta $ABC$.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut $APC$ možemo odrediti da je

$|CP| = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{(25-7)(25+7)} = \sqrt{18 \cdot 32} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16} = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ cm.

1 bod

Neka je $S$ sjecište dužina $\overline{CP}$ i $\overline{QR}$.

Označimo $x = |RS|$. Možemo uočiti da zbog simetrije vrijedi da je i $|SQ| = x$.

Kako vrijedi $AB \parallel QR$, možemo zaključiti da su trokuti $APC$ i $RSC$ slični po $KK$ poučku o sličnosti (jedan zajednički kut, kutovi uz presječnicu $AC$ usporednih pravaca $AB$ i $RQ$).

Zbog sličnosti trokuta znamo da vrijedi jednakost $\dfrac{|RS|}{|AP|} = \dfrac{|CS|}{|CP|}$, odnosno $\dfrac{x}{7} = \dfrac{|CS|}{24}$. 1 bod

Možemo izraziti $|CS| = \dfrac{24}{7}x$.

Površina trokuta $PQR$ jednaka je $P(PQR) = \dfrac{|QR| \cdot |PS|}{2}$.

Vrijedi da je $|QR| = 2x$ i da je $|PS| = |CP| - |CS| = 24 - \dfrac{24}{7}x$. 1 bod

Stoga je $P(PQR) = \dfrac{2x \cdot \left(24 - \frac{24}{7}x\right)}{2} = 24x - \dfrac{24}{7}x^2$. 1 bod

Budući je površina trokuta $PQR$ najveća moguća, uz oznake $a = -\dfrac{24}{7}$ i $b = 24$ znamo da mora biti $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{24}{2 \cdot \left(-\frac{24}{7}\right)} = \dfrac{7}{2} = 3.5$ cm. 1 bod

Površina trokuta $PQR$ iznosi $P(PQR) = 24 \cdot \frac{7}{2} - \frac{24}{7} \cdot \frac{49}{4} = 84 - 42 = 42 \text{ cm}^2$. 1 bod

Preostalo je još odrediti opseg trokuta $PQR$.

$o(PQR) = |PQ| + |QR| + |RP| = 2x + 2|PQ| = 7 + 2|PQ|$

Kako bismo odredili $|PQ|$, primijenimo Pitagorin poučak na trokut $PQS$.

$|PS| = 24 - \frac{24}{7}x = 24 - \frac{24}{7} \cdot \frac{7}{2} = 24 - 12 = 12 \text{ cm}$ 1 bod

$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + 144} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ cm}$ 1 bod

Konačno je $o(PQR) = 7 + 25 = 32$ cm. 1 bod

Napomena: Učenik može odrediti opseg trokuta $PQR$ i tako da iz rezultata $x = 3.5$ cm zaključi kako je $\overline{QR}$ srednjica trokuta $ABC$. Iz tog zaključka slijedi da su $\overline{PQ}$ i $\overline{PR}$ također srednjice trokuta $ABC$ pa je $|PQ| = |PR| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12.5$ cm, odnosno $o(PQR) = 7 + 2 \cdot 12.5 = 32$ cm.

Napomena: Ako učenik pretpostavi, bez dokaza, da je površina trokuta $PQR$ maksimalna ako su točke $Q$ i $R$ u polovištu pripadnih stranica i dalje zadatak riješi točno, može dobiti najviše 5 bodova.

**ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE**

**3. razred – srednja škola – B varijanta**

**1. ožujka 2023.**

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

## Zadatak B-3.1.

Odredite sva rješenja jednadžbe $|\cos^2 x - 2\sin x| = 2$.

**Rješenje.**

Izraz unutar zagrada apsolutne vrijednosti može biti jednak 2 ili -2. 1 bod

U prvom slučaju, ako je $\cos^2 x - 2\sin x = 2$, onda je:

$$1 - \sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0,$$ 1 bod

$$(\sin x + 1)^2 = 0,$$

$$\sin x = -1,$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

U drugom slučaju, ako je $\cos^2 x - 2\sin x = -2$, onda je:

$$1 - \sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0,$$

$$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$$ 1 bod

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo

$$\sin x = -3,$$

što je nemoguće i 1 bod

$$\sin x = 1$$

odakle je

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

Napomena: Rješenje se može (ali ne mora) zapisati kao jedan skup:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

## Zadatak B-3.2.

Ana, Bruno, Cvita, Dino i Ema pokušavaju se rasporediti u kinu na pet stolica u jednomu redu. Na koliko načina to mogu učiniti ako Ana ne želi sjediti ni pored Brune ni pored Cvite, a Dino ne želi sjediti pored Eme?

### Prvo rješenje.

Označimo osobe iz zadatka prvim slovom njihovog imena. Odaberimo prvo dvije pozicije za D i E između pozicija 1, 2, 3, 4 ili 5, a onda ćemo na preostale tri pozicije smjestiti A, B i C.

D i E smjestimo tako da ne ostanu tri pozicije u nizu za A, B, C jer bi tada nužno A moralo sjediti uz B ili C što nije dozvoljeno prema uvjetima zadatka. Dakle, jedine pozicije za (D, E) su (1,3), (1, 4), (2, 4), (2, 5) i (3, 5):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| D | | E | | |
| D | | | E | |
| | D | | E | |
| | D | | | E |
| | | D | | E |

Analogno možemo odabrati 5 pozicija za (E, D), što je ukupno 10 za taj par osoba. 2 boda

U svakom od ovih 10 slučajeva, osim dva, kada su (D, E) ili (E, D) na poziciji (2, 4), osobe B i C moramo smjestiti na dvije uzastopne pozicije i to na dva načina: (B, C) ili (C, B).

U tih osam slučajeva je ukupno $8 \cdot 2 = 16$ mogućnosti za raspored osoba A, B, C, D i E. 1 bod

Ako su (D, E) ili (E, D) na poziciji (2, 4) osobu A možemo smjestiti na 3 načina, osobu B na 2 i C na 1 način na preostale tri pozicije. 1 bod

To znači da je u ovom slučaju ukupno $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ rasporeda osoba A, B, C, D i E. 1 bod

Konačno, ukupno je $16 + 12 = 28$ načina da uz dane uvjete Ana, Bruna, Cvita, Dino i Ema sjede na pet mjesta u jednomu redu. 1 bod

### Drugo rješenje.

Izračunat ćemo ukupan broj načina na koji pet osoba može sjesti na pet stolica u nizu i od toga oduzeti broj načina kad A i C ili A i B ili D i E sjede jedno pored drugog.

Ukupno je 5! ili $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina da A, B, C, D i E rasporedimo na pet pozicija u nizu. 1 bod

Gledamo li AC kao jednu osobu onda je 4! rasporeda u kojima oni sjede zajedno što množimo s 2 jer mogu sjediti i kao CA. Analogno je $2 \cdot 4!$ načina da sjede zajedno AB i $2 \cdot 4!$ načina da sjede zajedno DE. 1 bod

Zbrojimo li sve ove rasporede kada AC, AB i DE sjede zajedno, zbrojili smo dva puta rasporede u kojima dva od tih parova sjede zajedno. Njih moramo oduzeti od zbroja AB + AC + DE.

Broj rasporeda u kojima sjede zajedno i AC i AB sjede zajedno, odnosno BAC i CAB, jednak je $2 \cdot 3!$ (3! jer gledamo li BAC kao jednu osobu, razmještamo zapravo 3 osobe na 3 mjesta). 1 bod

Broj rasporeda u kojima sjede zajedno i AC i DE jednak je $2 \cdot 2 \cdot 3!$, a isti je broj rasporeda i kad sjede zajedno i AB i DE. 1 bod

Rasporeda u kojima istovremeno sjede zajedno AB, AC i DE ima $2 \cdot 2 \cdot 2$ (BAC i DE gledamo kao dvije osobe koje na 2 načina razmjestimo na 2 mjesta, a onda ih međusobno možemo još razmjestit na 2 načina: BAC i CAB, odnosno DE i ED). 1 bod

Dakle, ukupan broj načina da prema danim uvjetima Ana, Bruna, Cvita, Dino i Ema sjede na pet mjesta u jednomu redu jednak je:

$5! - (3 \cdot 2 \cdot 4! - 2 \cdot 3! - 2 \cdot 2 \cdot 3! - 2 \cdot 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2 \cdot 2) = 28$ 1 bod

Napomena: Ako je učenik sistematizirano ispisao sve točne rasporede sjedenja, odnosno jasno se vidi da drugih rasporeda više nema, dodijeliti svih 6 bodova.

**Zadatak B-3.3.**

Neka su $\alpha$ i $\beta$ mjere dvaju kutova u trokutu čiji polumjer opisane kružnice iznosi 6 cm. Odredite sinus trećeg kuta toga trokuta i duljinu njemu nasuprotne stranice, ako vrijede sljedeće jednakosti:

$$3\sin\alpha + 4\cos\beta = 6, \qquad 4\sin\beta + 3\cos\alpha = 2.$$

**Rješenje.**

Kvadrirajmo dane jednakosti:

$$\begin{cases} 9\sin^2\alpha + 24\sin\alpha\cos\beta + 16\cos^2\beta = 36, \\ 16\sin^2\beta + 24\sin\beta\cos\alpha + 9\cos^2\alpha = 4. \end{cases}$$ 1 bod

Zbrajanjem ovih jednakosti redom slijedi

$$9 + 24(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) + 16 = 40$$

$$24\sin(\alpha+\beta) = 15$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{5}{8}.$$ 2 boda

Kako je treći kut danog trokuta $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$ slijedi da je $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$.

Dakle, $\sin\gamma = \dfrac{5}{8}$. 1 bod

Duljina nasuprotne stranice jest $c = 2R\sin\gamma = 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{5}{8} = 7.5$ cm. 2 boda

**Zadatak B-3.4.**

Broj Klarinih godina jednak je $\log_{\sqrt[3]{5}} a^2$, broj Marijinih godina jednak je $\log_{5\sqrt{5}}(125b^9)$, a broj Janovih godina jednak je $\dfrac{1}{\log_{c^2}\sqrt[3]{5}}$. Koliko iznosi zbroj njihovih godina ako je $abc = 625$?

**Rješenje.**

Zapišimo dane logaritme u jednostavnijem obliku:

$$\log_{\sqrt[3]{5}} a^2 = 2\log_{5^{\frac{1}{3}}} a = 6\log_5 a, \qquad \text{1 bod}$$

$$\log_{5\sqrt{5}}\left(125b^9\right) = \log_{5^{\frac{3}{2}}} 125 + \log_{5^{\frac{3}{2}}} b^9 = 3\cdot\frac{2}{3}\log_5 5 + 9\cdot\frac{2}{3}\log_5 b = 2 + 6\log_5 b, \qquad \text{2 boda}$$

$$\frac{1}{\log_{c^2}\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_c 5^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{6}\log_c 5} = 6\log_5 c. \qquad \text{1 bod}$$

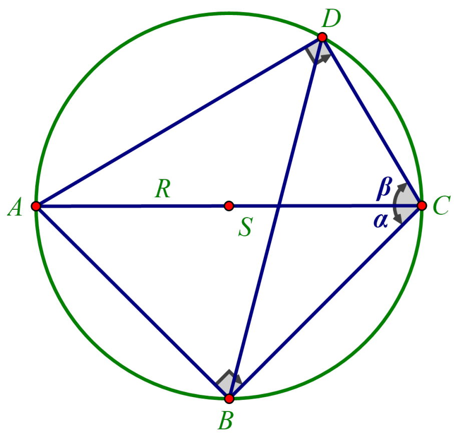
Traženi zbroj godina jednak je:

$$6\log_5 a + 2 + 6\log_5 b + 6\log_5 c = 2 + 6\log_5 abc = 2 + 6\log_5 625 = 2 + 6\cdot 4 = 26 \text{ godina.} \qquad \text{2 boda}$$

**Zadatak B-3.5.**

Četiri grada na karti određuju vrhove četverokuta $ABCD$ kojemu se može opisati kružnica polumjera $R$. Udaljenost između gradova $A$ i $C$ je $2R$, a udaljenost između gradova $A$ i $B$ jednaka je udaljenosti između gradova $B$ i $C$. Omjer udaljenosti između gradova $A$ i $D$ i gradova $C$ i $D$ jednak je $\sqrt{3}$. Kolika je udaljenost između gradova $B$ i $D$?

**Rješenje.**




Kako je $|AC| = 2R$, odnosno dijagonala je promjer dane kružnice, trokuti $ABC$ i $ACD$ su pravokutni (obodni kutovi nad promjerom). 1 bod

Tada primjenom Pitagorina poučka u trokutu $ABC$ slijedi redom

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 4R^2,$$

$$|AB| = |BC| = R\sqrt{2},$$

odnosno $\alpha = 45°$. 1 bod

Iz zadanog omjera slijedi

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \sqrt{3},$$

$$|AD| = |CD|\sqrt{3},$$

a onda iz pravokutnog trokuta $ADC$ dobivamo redom

$$|AD|^2 + |CD|^2 = 4R^2,$$

$$|CD| = R.$$

Stoga je trokut $SCD$ jednakostraničan, a $\beta = 60°$. 1 bod

Primijenimo li poučak o kosinusu u trokutu $BCD$ slijedi

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC| \cdot |CD| \cdot \cos(\alpha + \beta) \qquad \text{1 bod}$$

$$= 2R^2 + R^2 - 2 \cdot R^2\sqrt{2} \cdot \cos(45° + 60°)$$

$$= 3R^2 - 2 \cdot R^2\sqrt{2} \cdot (\cos 45° \cos 60° - \sin 45° \sin 60°) \qquad \text{1 bod}$$

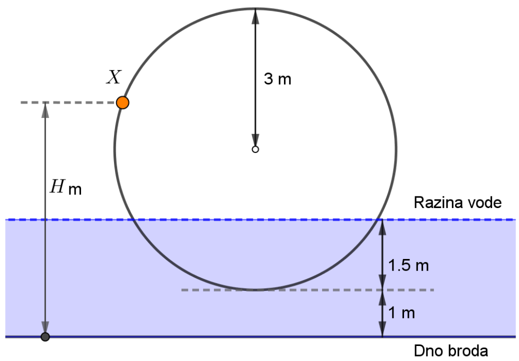
$$= 3R^2 - 2 \cdot R^2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= R^2(2 + \sqrt{3})$$

Dakle, tražena udaljenost jest $|BD| = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. 1 bod

## Zadatak B-3.6.

Mrlja, na slici označena s $X$, nalazi se u nekom trenutku na vanjskom rubu kotača modela parobroda s lopaticama. Kotač ima polumjer 3 m, a rotira u smjeru suprotnom od kazaljke sata konstantnom brzinom i napravi 8 punih okreta u minuti. Ako se u trenutku $t = 0$ mrlja $X$ nalazi na najvišoj točki kotača, odredite funkciju koja modelira gibanje kotača, odnosno određuje udaljenost mrlje ($H$) od dna broda u metrima nakon $t$ sekundi. Najniža točka kotača je 1 metar iznad dna broda, a 1.5 metar ispod razine vode. U kojemu će trenutku $t$ mrlja prvi puta ući u vodu i koliko će dugo biti pod vodom?




## Prvo rješenje.

Ako kotač napravi 8 punih okreta u minuti, onda mrlji treba $60 : 8 = 7.5$ sekundi za jedan okret. 1 bod

Gibanje mrlje je očito periodično, pa ćemo ga opisati funkcijom kosinus

$$H(t) = a\cos(b(t + c)) + d. \qquad \text{1 bod}$$

Broj $a$ je amplituda, odnosno polovina udaljenosti najniže i najviše točke na kotaču i iznosi 3 m. 1 bod

Budući da je period jednak 7.5 sekundi, iz $\dfrac{2\pi}{b} = 7.5$ slijedi $b = \dfrac{2\pi}{7.5} = \dfrac{4\pi}{15}$. 1 bod

Funkcija kosinus dostiže maksimalnu vrijednost u nuli, a kako je mrlja za $t = 0$ na najvišoj točki kotača, funkcija nema horizontalni pomak i $c = 0$. 1 bod

Parametar $d$ je vertikalni pomak, a jednak je visini središta kotača, odnosno $d = 1+3 = 4$. 1 bod

Dakle,

$$H(t) = 3\cos\left(\frac{4\pi}{15}t\right) + 4.$$

Mrlja će prvi puta ući i izaći iz vode kad bude prvi i drugi puta na visini od 2.5 metara iznad dna broda u prvom okretu. Stoga rješavamo jednadžbu

$$H(t) = 3\cos\left(\frac{4\pi}{15}t\right) + 4 = 2.5.$$ 1 bod

Tada je $\cos\left(\frac{4\pi}{15}t\right) = -0.5$, a ova jednadžba ima rješenje

$$\frac{4\pi}{15}t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

Budući da tražimo $t \in [0, 7.5]$, slijedi

$$\frac{4\pi}{15}t_1 = \frac{2\pi}{3}, \qquad \text{i} \qquad \frac{4\pi}{15}t_2 = \frac{4\pi}{3},$$

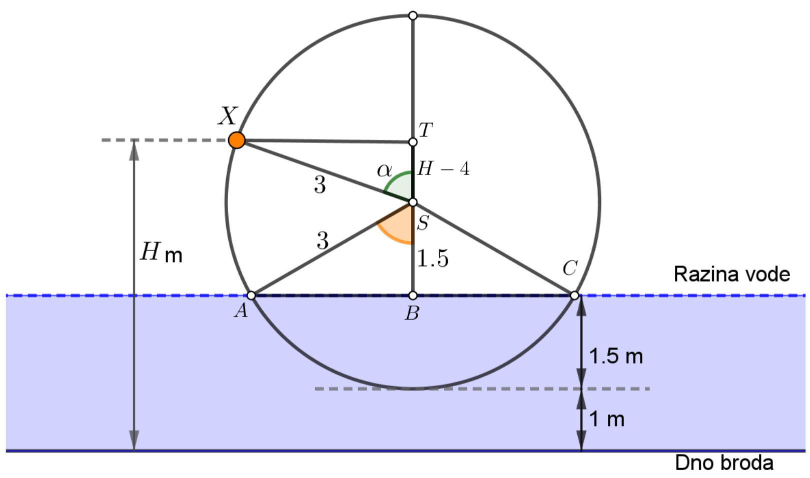
odnosno $t_1 = 2.5\ s$, $t_2 = 5\ s$. 1 bod

Mrlja će biti pod vodom $5 - 2.5 = 2.5$ sekundi. 1 bod

Napomena: Učenici mogu gibanje opisati i nekom varijantom funkcije sinus, primjerice:

$$H(t) = -3\sin\left(\frac{4\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 4, \quad \text{ili}$$
$$H(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{15}t\right) + 4, \quad \text{ili}$$
$$H(t) = 3\sin\left(\frac{4\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right) + 4.$$

**Drugo rješenje.**



Promotrimo pravokutan trokut $STX$.

Budući da je $|ST| = H - (R+1) = H - 4$, vrijedi da je $\cos\alpha = \dfrac{H-4}{3}$ te je $H = 3\cos\alpha + 4$ gdje je $\alpha$ označeni kut $TSX$ za koji kotač zarotira od početne pozicije mrlje do pozicije $X$ za $t$ sekundi. Time smo dobili ovisnost visine $H$ o kutu $\alpha$. 1 bod 2 boda

Budući da kotač rotira konstantnom brzinom vrijeme $t$ i kut $\alpha$ su proporcionalne veličine, odnosno $\alpha = k \cdot t$.

Kako za kut od $2\pi$ radijana mrlji treba $60 : 8 = 7.5$ sekundi, 1 bod

onda je $k = \dfrac{2\pi}{7.5}$ pa mrlji za kut od $\alpha$ radijana treba $\dfrac{2\pi}{7.5}t = \dfrac{4\pi}{15}t$ sekundi. Dakle, tražena ovisnost jest

$$H(t) = 3\cos\left(\frac{4\pi}{15}t\right) + 4.$$ 2 boda

Dalje se može računati kao u prvom rješenju ili na sljedeći način.

Promotrimo trokut $ABS$.

$$\cos\sphericalangle ASB = \frac{1.5}{3} = 0.5,$$

pa je $\sphericalangle ASB = \dfrac{\pi}{3}$. 1 bod

Slijedi da je kut za koji kotač zarotira da mrlja dođe u poziciju $A$, u kojoj prvi puta uđe pod vodu, jednak $\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. Za to joj je potrebno

$$\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{4\pi}{15}} = 2.5 \text{ sekundi.}$$ 2 boda

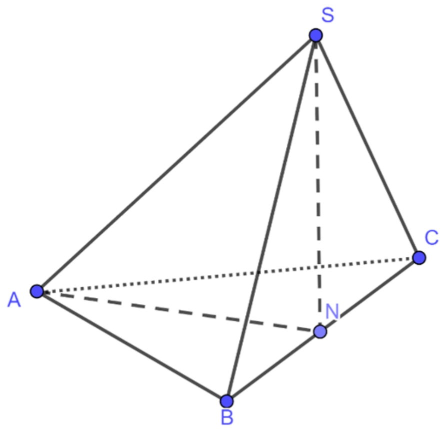
Očito, će u poziciju $C$ mrlja doći kad kotač zarotira za još $\dfrac{2\pi}{3}$ radijana, pa je mrlja pod vodom 2.5 sekunde. 1 bod

Napomena: Učenik može drugi dio zadatka riješiti neovisno o tome je li našao traženu funkciju.

**Zadatak B-3.7.**

Zadana je trostrana piramida $SABC$ kojoj je strana $SBC$ okomita na bazu $ABC$, pri čemu je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 60^\circ$ i $|SB| = |SC| = 1$. Odredite obujam piramide $SABC$.

**Rješenje.**




1 bod

Iz $|SB| = |SC| = 1$ i $\sphericalangle BSC = 60^\circ$ slijedi da je trokut $BSC$ jednakostraničan trokut stranice duljine 1. 1 bod

Pobočka $BSC$ okomita je na ravninu $ABC$ pa je visina trokuta $BSC$ visina piramide i vrijedi

$$|SN| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ 1 bod

Trokuti $ABS$ i $ACS$ su sukladni, pa je $|AB| = |AC|$, odnosno trokut $ABC$ je jednakokračan te je njegova težišnica $AN$ ujedno i visina. Stoga je trokut $ANC$ pravokutan trokut. Tada je

$$|AC|^2 = |AN|^2 + |NC|^2 = |AN|^2 + \frac{1}{4}$$ 2 boda

Iz trokuta $ASC$ primjenom poučka o kosinusu slijedi da je

$$|AC|^2 = |AS|^2 + |SC|^2 - 2|AS| \cdot |SC| \cdot \cos 60^\circ = |AS|^2 + 1 - |AS|.$$ 1 bod

Dakle,

$$|AN|^2 + \frac{1}{4} = |AS|^2 + 1 - |AS|.$$ 1 bod

Iz trokuta $ANS$ primjenom Pitagorina poučka slijedi

$$|AN|^2 = |AS|^2 - |SN|^2 = |AS|^2 - \frac{3}{4},$$ 1 bod

pa je

$$|AS|^2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = |AS|^2 + 1 - |AS|,$$

te je $|AS| = \frac{3}{2}$. Tada je

$$|AN|^2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4},$$

pa je $|AN| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Konačno, traženi je obujam jednak 1 bod

$$V = \frac{1}{3}\frac{|AN| \cdot |BC|}{2} \cdot |SN| = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$ 1 bod

## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**4. razred – srednja škola – B varijanta**

**1. ožujka 2023.**

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

### Zadatak B-4.1.

Zadana je funkcija

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right),$$

pri čemu je $a$ pozitivan realan broj različit od 1. Koliko je $f(p+t) + f(p-t)$ ako je $f(t) = 20$ i $f(p) = 25$?

**Rješenje.**

Direktnim računom dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$f(p+t) + f(p-t) = \frac{1}{2}\left(a^{p+t} + a^{-p-t}\right) + \frac{1}{2}\left(a^{p-t} + a^{-p+t}\right) =$$ 1 bod

$$= \frac{1}{2}\left(a^{p+t} + a^{-p-t} + a^{p-t} + a^{-p+t}\right) = \frac{1}{2}\left(a^p(a^t + a^{-t}) + a^{-p}(a^{-t} + a^t)\right) =$$ 2 boda

$$= \frac{1}{2}\left(a^t + a^{-t}\right) \cdot \left(a^p + a^{-p}\right) =$$ 1 bod

$$\frac{1}{2} \cdot 2f(t) \cdot 2f(p) = 2 \cdot 20 \cdot 25 = 1000.$$ 2 boda

### Zadatak B-4.2.

Niz $(x_n)$ je zadan rekurzivnom formulom:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2n + 1, \quad n \geqslant 1.$$

Odredite $x_{2023}$.

**Prvo rješenje.**

Zapišimo prvih $n \geqslant 1$ članova niza:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= x_1 + 2 \cdot 1 + 1 \\ x_3 &= x_2 + 2 \cdot 2 + 1 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2 \cdot (n-1) + 1. \end{aligned}$$ 1 bod

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-1)) + n \cdot 1.$$ 1 bod

Slijedi redom

$$x_n = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-1)) + n \cdot 1,$$

odnosno

$$x_n = 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n,$$ 2 boda

odakle sređivanjem zaključujemo da je $x_n = n^2$. 1 bod

Dakle, traženi član iznosi $x_{2023} = 2023^2$. 1 bod

**Drugo rješenje.**

Izračunajmo prvih nekoliko članova niza:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$
$$x_3 = x_2 + 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$
$$x_4 = x_3 + 2 \cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$
$$\vdots$$

Tvrdimo da je $x_n = n^2$. 1 bod

Dokažimo matematičkom indukcijom da ova tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbf{N}$.

Za $n = 1$ je $x_1 = 1 = 1^2$ pa je baza indukcije ispunjena. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja $T_n : x_n = n^2$ vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$. 1 bod

Pokažimo da tada vrijedi i $T_{n+1}$.

$x_{n+1} = x_n + 2n + 1$. Kako je prema pretpostavci $x_n = n^2$, slijedi da je 1 bod

$x_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ što znači da vrijedi $T_{n+1}$. 1 bod

Budući da tvrdnja $T_n$ vrijedi za $n = 1$ i $T_n \Rightarrow T_{n+1}$, tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbf{N}$.

Konačno, traženi je član $x_{2023} = 2023^2$. 1 bod

Napomena: Ukoliko učenik zaključi da je $x_n = n^2$ i izračuna 2023. član, a ne dokaže tvrdnju matematičkom indukcijom, dobiva najviše 2 boda.

**Zadatak B-4.3.**

Zbroj svih 1002-znamenkastih brojeva koji u svojem zapisu imaju tisuću nula i dvije jedinice iznosi $S$. Odredite ostatak koji se dobije pri dijeljenju broja $S$ brojem 3.

**Prvo rješenje.**

Broj 1 mora biti na prvom mjestu iz čega proizlazi da postoji 1001 broj s opisanim svojstvom. 1 bod

Te brojeve možemo zbrojiti potpisujući jedan ispod drugog:

$$\begin{array}{r} 1100000\ldots00 \\ 1010000\ldots00 \\ 1001000\ldots00 \\ 1000100\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1000000\ldots10 \\ +1000000\ldots01 \\ \hline \end{array}$$

1 bod

Tada je

$$S = 1001 \cdot 10^{1001} + \underbrace{111\ldots11}_{1001 \text{ jedinica}} = 100\underbrace{1111\ldots11}_{1002 \text{ jedinica}}.$$ 2 boda

Broj $S$ ima 1003 jedinice pa je zbroj svih njegovih znamenki jednak 1003. 1 bod

Broj $S$ pri dijeljenju s 3 ima isti ostatak kao i njegov zbroj znamenki, broj 1003, a to je 1. 1 bod

**Drugo rješenje.**

Broj 1 mora biti na prvom mjestu iz čega proizlazi da postoji 1001 broj s opisanim svojstvom. 1 bod

Kod svakog od tih 1001 brojeva druga znamenka jednaka 1 će se nalaziti na različitom težinskom mjestu.

Dakle, zbroj svih 1002-znamenkastih brojeva koji u svom zapisu imaju tisuću nula i dvije jedinice jednak je:

$$S = 1001 \cdot 10^{1001} + (10^{1000} + 10^{999} + \cdots + 10 + 1)$$ 1 bod

$$= 1001 \cdot 10^{1001} + \frac{10^{1001} - 1}{10 - 1} = 1001 \cdot 10^{1001} + \frac{\overbrace{999\ldots99}^{1001 \text{ znamenka } 9}}{9}$$

$$= 1001 \cdot 10^{1001} + \underbrace{111\ldots11}_{1001 \text{ jedinica}}$$ 2 boda

$$1001111\ldots11 = 10^{1004} + \underbrace{111\ldots11}_{1002 \text{ jedinice}}.$$

Broj $\underbrace{111\ldots11}_{1002 \text{ jedinice}}$ djeljiv je s 3 jer mu je zbroj znamenki djeljiv s 3 pa broj $S$ možemo zapisati kao

$$S = 10^{1004} + 3k = 3 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{1004 \text{ trojki}} + 3k + 1.$$ 1 bod

Dakle, broj $S$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. 1 bod

**Zadatak B-4.4.**

Odredite sve kompleksne brojeve $z$ za koje vrijedi:

$$|z+iz|=2, \quad Re(z^4)=-2 \quad \text{i} \quad \frac{3\pi}{2}<\arg(z)<2\pi.$$

**Prvo rješenje.**

Neka je $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $r=|z|$, $\varphi\in\left\langle\frac{3\pi}{2},2\pi\right\rangle$.

Kako je $|z+iz|=|z(1+i)|=|z|\cdot|1+i|=r\cdot\sqrt{2}=2$, zaključujemo da je $r=\sqrt{2}$. 1 bod

Nadalje, $z^4=r^4(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)$, te je $Re(z^4)=r^4\cos 4\varphi=-2$. 1 bod

Uvrštavanjem $r=\sqrt{2}$ u $r^4\cos 4\varphi=-2$ dobivamo $\cos 4\varphi=-\frac{1}{2}$ odakle zaključujemo da je $4\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, odnosno da je $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. 2 boda

Uvrštavanjem $k\in\mathbf{Z}$ i uvažavanjem činjenice da je $\varphi\in\left\langle\frac{3\pi}{2},2\pi\right\rangle$ zaključujemo da je $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ ili $\varphi=\frac{11\pi}{6}$. 1 bod

Dakle, tražena rješenja su:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 1 bod

Napomena: Učenik može rješenje ostaviti u trigonometrijskom ili standardnom zapisu.

**Drugo rješenje.**

Neka je $z=x+yi$, $x,y\in\mathbf{R}$. Kako je $\frac{3\pi}{2}<\arg(z)<2\pi$, zaključujemo da je $x>0$ i $y<0$.

Kako je $|z+iz|=|x+yi+xi-y|=\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}$ i $|z+iz|=2$ dobivamo da je $(x-y)^2+(x+y)^2=4$, odnosno $x^2+y^2=2$. 1 bod

Primjenom binomne formule dobivamo da je $z^4=x^4+4x^3yi-6x^2y^2-4xy^3i+y^4$, a kako je $Re(z^4)=-2$ zaključujemo da je $x^4-6x^2y^2+y^4=-2$. 1 bod

Dakle, treba riješiti sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x^4-6x^2y^2+y^4=-2, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

Zapišemo li prvu jednadžbu u obliku $(x^2+y^2)^2-8x^2y^2=-2$, tada uvrštavanjem $x^2+y^2=2$ dobivamo da je $4-8x^2y^2=-2$, odnosno $x^2y^2=\frac{3}{4}$.

Dakle, $x^2$ i $y^2$ rješenja su kvadratne jednadžbe $t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$. 2 boda

Kako kvadratna jednadžba $t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$ ima rješenja $t_1 = \frac{3}{2}$ i $t_2 = \frac{1}{2}$ zaključujemo da su $x, y \in \left\{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Konačno kako vrijedi da je $x > 0$ i $y < 0$ dobivamo rješenja: 1 bod

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ i $z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1 bod

**Zadatak B-4.5.**

Izračunajte zbroj $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{199}{99^2 \cdot 100^2}$.

**Rješenje.**

Primijetimo da je $n$-ti član danog zbroja oblika $a_n = \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$. 1 bod

Nadalje, član $a_n$ možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{n}{n^2 \cdot (n+1)^2} + \frac{n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{1}{n \cdot (n+1)^2} + \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{1}{n \cdot (n+1)}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2.$$ 3 boda

Dakle, traženi zbroj jednak je

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{199}{99^2 \cdot 100^2} =$$

$$= \left[1 - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] + \left[\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right] + \left[\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^2}\right] + \cdots + \left[\cancel{\left(\frac{1}{99}\right)^2} - \left(\frac{1}{100}\right)^2\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 1 - \frac{1}{10000} = \frac{9999}{10000}.$$ 2 boda

Napomena: Ako učenik odmah uoči da je $n$-ti član danog zbroja oblika $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 \cdot (n+1)^2}$ te da ga može zapisati u obliku $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$ dodjeljuju mu se 4 boda.

**Zadatak B-4.6.**

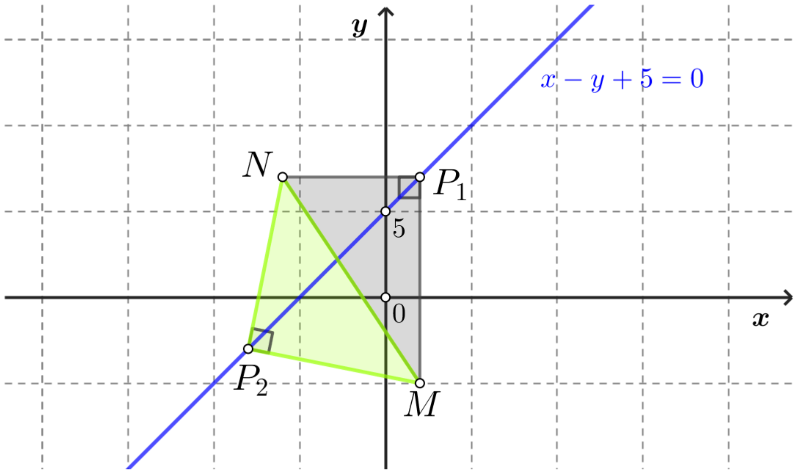
Zadane su točke $M(2, -5)$ i $N(-6, 7)$. Koje točke na pravcu $x - y + 5 = 0$ s točkama $M$ i $N$ određuju pravokutan trokut?

**Prvo rješenje.**

Kako tražene točke leže na pravcu $x - y + 5 = 0$, tada su njihove koordinate $P(x, x+5)$, $x \in \mathbf{R}$.

Moguća su tri slučaja.

**1. slučaj** Trokut $MNP$ je pravokutan s pravim kutom pri točki $P$.



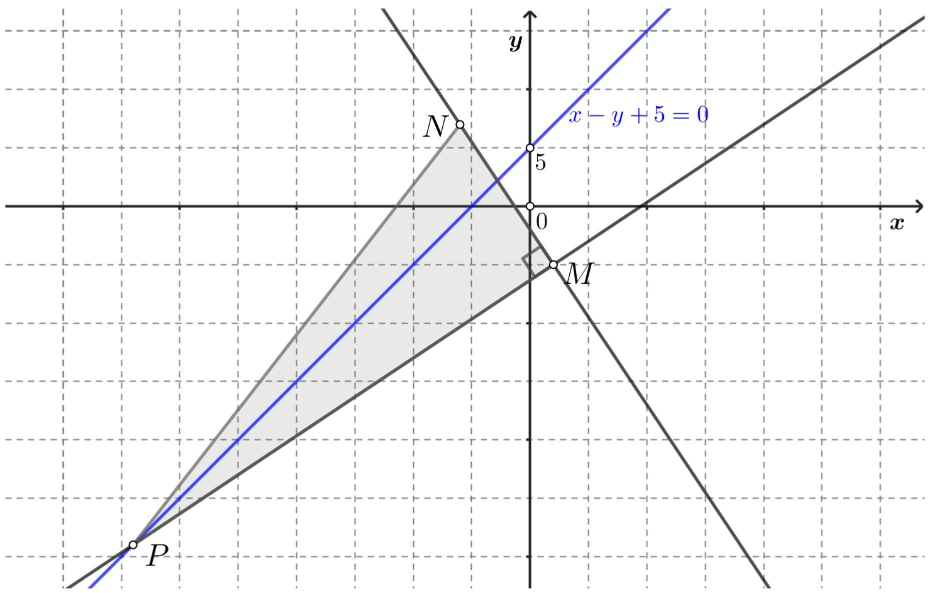

Tada je $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$.

Kako je $\overrightarrow{PM} = (2-x)\vec{i} + (-10-x)\vec{j}$ i $\overrightarrow{PN} = (-6-x)\vec{i} + (2-x)\vec{j}$ 1 bod

dobivamo jednadžbu $(2-x)(-6-x) + (-10-x)(2-x) = 0$, tj. kvadratnu jednadžbu $x^2 + 6x - 16 = 0$ čija su rješenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -8$. 2 boda

Dakle, tražene točke su $P_1(2,7)$ i $P_2(-8,-3)$. 1 bod

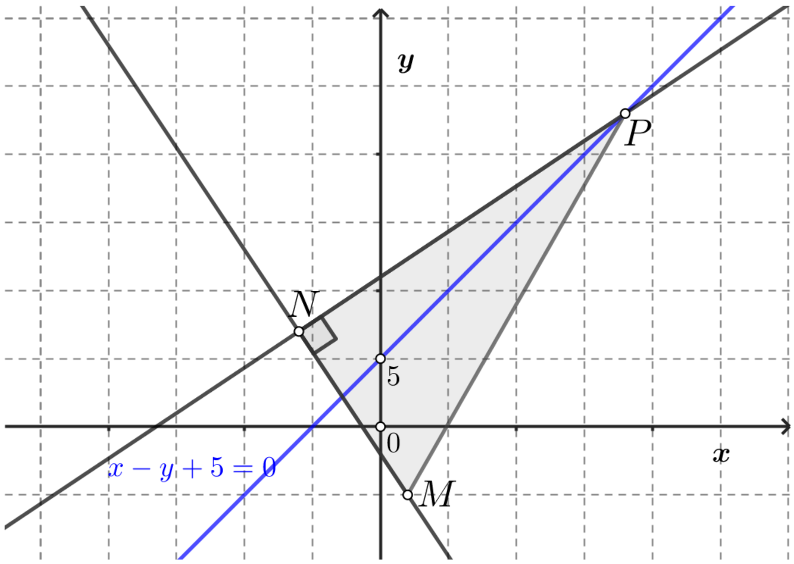
**2. slučaj** Trokut $MNP$ je pravokutan s pravim kutom pri točki $M$.




Tada je $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, a kako je $\overrightarrow{MP} = (x-2)\vec{i} + (x+10)\vec{j}$ i $\overrightarrow{MN} = -8\vec{i} + 12\vec{j}$ dobivamo jednadžbu $-8(x-2) + 12(x+10) = 0$ čije je rješenje $x = -34$. 2 boda

Dakle, točka $P$ ima koordinate $P(-34,-29)$. 1 bod

**3. slučaj** Trokut $MNP$ je pravokutan s pravim kutom pri točki $N$.




Tada je $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$, a kako je $\overrightarrow{NP} = (x+6)\vec{i} + (x-2)\vec{j}$ i $\overrightarrow{NM} = 8\vec{i} - 12\vec{j}$ dobivamo jednadžbu $8(x+6) - 12(x-2) = 0$ čije je rješenje $x = 18$. 2 boda

Dakle, točka $P$ ima koordinate $P(18, 23)$. 1 bod

Dakle, imamo četiri moguća rješenja: $P(2,7)$, $P(-8,-3)$, $P(-34,-29)$, $P(18,23)$.

**Drugo rješenje.**

Zadatak možemo riješiti koristeći Pitagorin poučak, tako da u svakom od slučajeva umjesto činjenice da je skalarni produkt jednak nuli, koristimo činjenicu da je zbroj kvadrata duljina odgovarajućih kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze.

Kako tražene točke leže na pravcu $x - y + 5 = 0$, tada su njihove koordinate $P(x, x+5)$, $x \in \mathbf{R}$.

Moguća su tri slučaja.

**1. slučaj** Ako je $MNP$ pravokutan trokut s pravim kutom pri točki $P$ tada vrijedi $|MN|^2 = |PM|^2 + |PN|^2$. 1 bod

Korištenjem formule za udaljenost točaka dobivamo da vrijedi

$$(-6-2)^2 + (7+5)^2 = (x-2)^2 + (x+10)^2 + (x+6)^2 + (x-2)^2,$$ 1 bod

odakle sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 + 6x - 16 = 0$ čija su rješenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -8$. 1 bod

Dakle, tražene točke su $P_1(2,7)$ i $P_2(-8,-3)$. 1 bod

**2. slučaj** Ako je $MNP$ pravokutan trokut s pravim kutom pri točki $M$ tada vrijedi $|PN|^2 = |MN|^2 + |PM|^2$.

Korištenjem formule za udaljenost točaka dobivamo jednadžbu

$$(x+6)^2+(x-2)^2=(-6-2)^2+(7+5)^2+(x-2)^2+(x+10)^2,$$ 1 bod

čijim rješavanjem nalazimo da je $x=-34$. 2 boda

Dakle, točka $P$ ima koordinate $P(-34,-29)$.

**3. slučaj** Ako je $MNP$ pravokutan trokut s pravim kutom pri točki $N$ tada vrijedi $|PM|^2=|MN|^2+|PN|^2$.

Korištenjem formule za udaljenost točaka dobivamo jednadžbu

$$(x-2)^2+(x+10)^2=(-6-2)^2+(7+5)^2+(x+6)^2+(x-2)^2,$$ 1 bod

iz koje nalazimo da je $x=18$. 2 boda

Dakle, točka $P$ ima koordinate $P(18,23)$.

Dakle, imamo četiri moguća rješenja: $P(2,7)$, $P(-8,-3)$, $P(-34,-29)$, $P(18,23)$.

**Treće rješenje.**

Slike su kao i u prvom rješenju.

Kako tražene točke leže na pravcu $x-y+5=0$, tada su njihove koordinate $P(x,x+5)$, $x\in\mathbf{R}$.

**1. slučaj** Trokut $MNP$ je pravokutan s pravim kutom pri točki $P$.

Koeficijent smjera pravca na kojem leže točke $P$ i $N$ jednak je

$$k_{PN}=\frac{x-2}{x+6}.$$

Nadalje, koeficijent smjera pravca na kojem leže točke $P$ i $M$ jednak je

$$k_{PM}=\frac{x+10}{x-2}.$$ 1 bod

Kako su ti pravci međusobno okomiti vrijedi da je $k_{PN}=-\dfrac{1}{k_{PM}}$, odakle dobivamo jednadžbu $\dfrac{x-2}{x+6}=-\dfrac{1}{\dfrac{x+10}{x-2}}$ tj. $\dfrac{x-2}{x+6}=-\dfrac{x-2}{x+10}$.

Daljnjim sređivanjem konačno dobivamo $(x-2)(2x+16)=0$.

Rješenja dobivene jednadžbe su $x_1=2$ i $x_2=-8$. 2 boda

Dakle, tražene točke su $P_1(2,7)$ i $P_2(-8,-3)$. 1 bod

**2. slučaj** Trokut $MNP$ je pravokutan s pravim kutom pri točki $M$.

Koeficijent smjera pravca na kojem leže točke $M$ i $N$ jednak je $k_{MN} = -\frac{3}{2}$. Koeficijent smjera pravca na kojem leže točke $M$ i $P$ jednak je $k_{PM} = \frac{x+10}{x-2}$.

Kako su ti pravci međusobno okomiti vrijedi da je $k_{MN} \cdot k_{PM} = -1$, odakle dobivamo jednadžbu

$$\frac{x+10}{x-2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1,$$

čije je rješenje $x = -34$. 2 boda

Dakle, tražena točka je $P(-34, -29)$. 1 bod

**3. slučaj** Trokut $MNP$ je pravokutan s pravim kutom pri točki $N$.

Koeficijent smjera pravca na kojem leže točke $M$ i $N$ jednak je $k_{MN} = -\frac{3}{2}$.. Koeficijent smjera pravca na kojem leže točke $N$ i $P$ jednak je $k_{NP} = \frac{x-2}{x+6}$.

Kako su ti pravci međusobno okomiti tada je $k_{MN} \cdot k_{NP} = -1$, odakle dobivamo jednadžbu

$$\frac{x-2}{x+6} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1,$$

čije je rješenje čije je rješenje $x = 18$. 2 boda

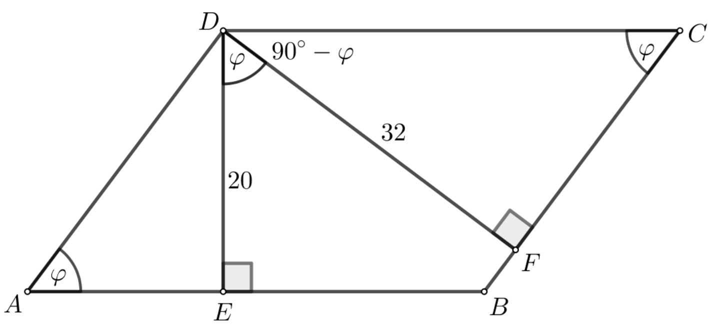
Dakle, tražena točka je $P(18, 23)$. 1 bod

Dakle, imamo četiri moguća rješenja: $P(2, 7)$, $P(-8, -3)$, $P(-34, -29)$, $P(18, 23)$.

### Zadatak B-4.7.

Zadan je paralelogram $ABCD$. Točke $E$ i $F$ su redom nožišta visina povučenih iz vrha $D$ na stranicu $\overline{AB}$, odnosno $\overline{BC}$. Ako je $\cos\sphericalangle EDF = \frac{1}{3}$, $|DE| = 20$, $|DF| = 32$, koliko iznosi površina četverokuta $DEBF$?

### Prvo rješenje.



Neka je $\sphericalangle EDF = \varphi$. Budući da je $DE$ okomito na $AB$ i $CD$, $\sphericalangle FDC = 90° - \varphi$. 1 bod

Tada je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle BAD = \varphi$. 1 bod

Iz trokuta $DFC$ slijedi

$$\cos\varphi = \frac{|CF|}{|CD|} = \frac{1}{3},$$

odnosno

$$|CF| = \frac{1}{3}|CD|,$$ 1 bod

a primjenom Pitagorinog poučka je

$$32^2 + \left(\frac{1}{3}|CD|\right)^2 = |CD|^2,$$ 1 bod

$$\frac{8}{9}|CD|^2 = 32^2,$$

odnosno

$$|CD| = 24\sqrt{2}.$$

Analogno, iz trokuta $DEA$ dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{1}{3},$$

odnosno

$$|AE| = \frac{1}{3}|AD|,$$ 1 bod

$$20^2 + \left(\frac{1}{3}|AD|\right)^2 = |AD|^2,$$ 1 bod

$$\frac{8}{9}|AD|^2 = 20^2,$$

odnosno

$$|AD| = 15\sqrt{2}.$$

Slijedi:

$$|CF| = \frac{1}{3}|CD| = 8\sqrt{2},$$

$$|BF| = 15\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$ 1 bod

$$|AE| = \frac{1}{3}|AD| = 5\sqrt{2},$$

$$|BE| = 24\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 19\sqrt{2}.$$ 1 bod

Traženu površinu četverokuta $DEBF$ računamo kao zbroj površina trokuta $DEB$ i $BFD$:

$$P = \frac{|DE|\cdot|BE|}{2} + \frac{|DF|\cdot|BF|}{2} = \frac{20\cdot 19\sqrt{2}}{2} + \frac{32\cdot 7\sqrt{2}}{2} = 302\sqrt{2}.$$ 2 boda

Napomena: Duljine stranica paralelograma mogu se računati i koristeći sličnost trokuta $AED$ i $CFD$. Bez obzira na način računanja, točan iznos duljine jedne stranice paralelograma vrijedi 2 boda, odnosno 4 za obje.

Nadalje, u četverokutu $DEBF$ kut $\sphericalangle FBE = 180° - \varphi$ pa se površina četverokuta može izračunati kao:

$$P_{DEBF} = P_{EFD} + P_{EBF} = \frac{|DE| \cdot |DF|}{2} \sin\varphi + \frac{|EB| \cdot |BF|}{2} \sin(180° - \varphi) =$$

$$\frac{20 \cdot 32}{2} \sin\varphi + \frac{19\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} \sin\varphi = 302\sqrt{2}.$$

Računanje duljina $|BE|$ i $|BF|$ vrijedi 2 boda, a konačne površine 2 boda.

**Drugo rješenje.**

Slika je ista kao u prvom rješenju.

Neka je $\sphericalangle EDF = \varphi$. Budući da je $DE$ okomito na $AB$ i $CD$, $\sphericalangle FDC = 90° - \varphi$. 1 bod

Tada je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle BAD = \varphi$. 1 bod

Kako je $\varphi$ šiljasti kut slijedi da je $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Iz trokuta $DFC$ slijedi $\sin\varphi = \frac{|DF|}{|CD|}$ odakle dobivamo da je

$$|CD| = \frac{|DF|}{\sin\varphi} = \frac{32}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 24\sqrt{2}.$$ 2 boda

Analogno, iz trokuta $DEA$ dobivamo $\sin\varphi = \frac{|DE|}{|AD|}$ odakle dobivamo da je

$$|AD| = \frac{|DE|}{\sin\varphi} = \frac{20}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 15\sqrt{2}.$$ 2 boda

Sada je površina paralelograma $ABCD$ jednaka

$$P_{ABCD} = |CD| \cdot |DE| = 24\sqrt{2} \cdot 20 = 480\sqrt{2}.$$ 1 bod

Površina trokuta $DEA$ jednaka je

$$P_{DEA} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |DE| \cdot \sin(90° - \varphi) = \frac{1}{2}|AD| \cdot |DE| \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 15\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} = 50\sqrt{2}.$$ 1 bod

Nadalje, površina trokuta $DFC$ jednaka je

$$P_{DFC} = \frac{1}{2}|DF| \cdot |CD| \cdot \sin(90° - \varphi) = \frac{1}{2}|DF| \cdot |CD| \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 24\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} = 128\sqrt{2}.$$ 1 bod

Konačno površina četverokuta $DEBF$ jednaka je

$$P = P_{ABCD} - P_{DEA} - P_{DFC} = 480\sqrt{2} - 50\sqrt{2} - 128\sqrt{2} = 302\sqrt{2}.$$ 1 bod