ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Dokaži da jednadžba

$$(n-20)^3 + 2n^3 = (n+20)^3$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje.

Pretpostavimo da postoji cjelobrojno rješenje n početne jednadžbe. Sređivanjem početnog izraza dobivamo

$$2n^3 - 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot n^2 - 2 \cdot 20^3 = 0$$
$$n^3 - 60n^2 - 8000 = 0.$$

3 boda

Kako je n cijeli broj, da bi posljednja jednadžba imala rješenje n^3 mora biti djeljiv sa 2 i 5 (jer su preostali izrazi djeljivi s 10). Zato je i n djeljiv s 2 i 5, pa postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $n = 10m$. 2 boda

Uvrstimo li to u dobivenu jednadžbu, nakon dijeljenja s 1000 dobivamo

$$m^3 - 6m^2 - 8 = 0.$$

1 bod

Kako su svi izrazi osim m^3 parni, zaključujemo da je i m^3 paran, pa postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. 1 bod

Ponovnim uvrštavanjem i sređivanjem slijedi

$$k^3 - 3k^2 - 1 = 0.$$
$$k^2(k-3) - 1 = 0.$$

1 bod

Izraz $k^2(k-3)$ umnožak je dvaju brojeva različite parnosti, što je sigurno paran broj. Zato s lijeve strane imamo neparan broj, te ne može biti jednak nuli. Time dolazimo do kontradikcije, početna jednadžba zaista nema rješenja u cijelim brojevima. 2 boda

Napomena: Četvrti i peti bod gornje sheme mogu se rastaviti na bod koji odgovara zaključku da $2 \mid n$, te bod koji odgovara zaključku da je $5 \mid n$.

Dobivenu jednadžbu po m iz gornjeg rješenja možemo zapisati i drugačije:

$$m^2(m-6)=8.$$

Jedini djelitelji broja 8 koji su ujedno i kvadrati cijelih brojeva su 1 i 4. Rješenje se sada može dovršiti provjeravajući slučajeve $m^2 \in \{1,4\}$. Određivanje skupa brojeva u kojem se nalazi m^2 (1 bod, što odgovara sedmom bodu gornje sheme), te provjere svih mogućnosti, čemu odgovaraju posljednja 3 boda gornje sheme.

Slična analiza može se napraviti i za jednadžbu po n ($n^2(n-60)=8000$), gdje se ponovno 1 bod ostvaruje za detekciju potpunih kvadrata koji dijele 8000, te 6 bodova za provjeru tih slučajeva. Moguće je dobiti i druge jednadžbe (recimo ako se zaključi da $2 \mid n$, bez zaključka da $5 \mid n$, ili obratno). Sami zaključak i pojednostavljena jednadžba po novoj nepoznanici vrijede po 1 bod, 1 bod se ostvaruje za detekciju potpunih kvadrata koji dijele odgovarajuću konstantu, te 4 boda za provjeru tih slučajeva.

Zadatak A-1.2.

Odredi sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\frac{xy}{4y-3x}=20,$$
$$\frac{xz}{2x-3z}=15,$$
$$\frac{zy}{4y-5z}=12.$$

Prvo rješenje.

Primijetimo prvo da niti jedan od brojeva x, y, z ne može biti jednak 0, jer bi tada lijeva strana neke od jednadžbi bila jednaka nuli. 1 bod

Neka su brojevi a, b i c takvi da je

$$a=\frac{1}{x}, \quad b=\frac{1}{y}, \quad c=\frac{1}{z}.$$ 2 boda

Uzimanjem recipročne vrijednosti na obje strane svih jednadžbi sustava i uvrštavanjem novih nepoznanica dobivamo

$$4a-3b=\frac{1}{20},$$
$$2c-3a=\frac{1}{15},$$
$$4c-5b=\frac{1}{12}.$$ 1 bod

Pomnožimo prvu jednadžbu s 3 i drugu s 4 te ih zbrojimo. Dobivamo

$$8c-9b=\frac{5}{12}.$$ 1 bod

Oduzmimo sada od dobivene jednadžbe treću jednadžbu sustava pomnoženu s dva, dobivamo $b = \frac{1}{4}$. 1 bod

Uvrštavanjem vrijednosti b u sustav po nepoznanicama a, b i c dobivamo: $a = \frac{1}{5}$ i $c = \frac{1}{3}$. 2 boda

Budući da su a, b i c recipročne vrijednosti nepoznanica x, y i z, dobivamo

$$x = 5, \quad y = 4, \quad z = 3.$$ 1 bod

Provjerom vidimo da nijedan od nazivnika lijevih strana početnog sustava nije jednak nuli, te da su dobivene vrijednosti za x, y i z uistinu (jedino) rješenje sustava. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, zaključujemo da su x, y, z različiti od 0. 1 bod

Množeći sve jednadžbe s odgovarajućim nazivnicima, dobivamo

$$\begin{aligned} xy &= 80y - 60x, \\ xz &= 30x - 45z, \\ zy &= 48y - 60z. \end{aligned}$$ 1 bod

Irazimo iz prvih dviju jednadžbi y i z preko y. Dobivamo

$$y = \frac{-60x}{x-80},$$ 1 bod

$$z = \frac{30x}{x+45}.$$ 1 bod

Uvrstimo li dobivene izraze za y i z u treću jednadžbu. nakon sređivanja dobivamo

$$\begin{aligned} zy &= 48y - 60z \\ \frac{30x}{x+45} \cdot \frac{-60x}{x-80} &= 48 \cdot \frac{-60x}{x-80} - 60 \cdot \frac{30x}{x+45} \\ 30x^2 &= (48(x+45) + 30(x-80))x \\ 30x^2 &= 78x^2 + 2160 - 2400 \\ 48x^2 - 240x &= 0 \\ x^2 - 5x &= 0 \\ x(x-5) &= 0. \end{aligned}$$ 2 boda

Rješenja posljednje jednadžbe su $x = 0$ i $x = 5$. Kako smo već pokazali da x ne može biti jednak 0, ostaje jedino mogućnost da je $x = 5$. 1 bod

Iz izraza u kojima smo y i z izrazili preko x, dobivamo $y = 4$, te $z = 3$. 2 boda

Kao u prošlom rješenju, provjeravamo da nijedan nazivnik nije nula, pa zaključujemo da dobiveni brojevi zaista čine rješenje početnog sustava. 1 bod

Zadatak A-1.3.

Marijan je na ploču napisao niz od n prostih brojeva tako da je svaki sljedeći broj za 6 veći od prethodnog.

Dokaži da postoji najveći prirodan broj n za koji je to moguće. Koji je to najveći n i koje je sve nizove Marijan mogao napisati na ploču za taj najveći n?

Rješenje.

Dokažimo da je najveći takav n jednak 5, te da postoji samo jedan niz duljine 5:

$$5, 11, 17, 23, 29.$$ 1 bod

Promotrimo prvih 5 brojeva bilo kojeg takvog niza s barem 5 elemenata.

Promotrimo ostatke koje ti brojevi daju pri dijeljenju s 5. 3 boda

Kako je svaki sljedeći za 6 veći od prethodnog, ostatak koji sljedeći član niza daje pri dijeljenju s 5 za jedan je veći od prethodnog, ili je taj broj djeljiv s 5 (ako prethodni daje ostatak 4 pri dijeljenju s 5). 1 bod

Zato zaključujemo da je jedan od prvih 5 brojeva niza nužno djeljiv s 5: ili se takav nalazi među prva 4 broja, ili prva 4 broja daju redom ostatke 1, 2, 3, 4 pri dijeljenju s 5, pa je peti član djeljiv s 5. 1 bod

Broj 5 jedini je prost broj djeljiv s 5, te se mora naći među prvih 5 brojeva. No, kako broj $5 - 6 = -1$ nije prost, broj 5 nužno je prvi član tog niza. 2 boda

Zato su prvih 5 članova svakog Marijanovog niza od barem 5 elemenata redom brojevi

$$5, 11, 17, 23, 29.$$

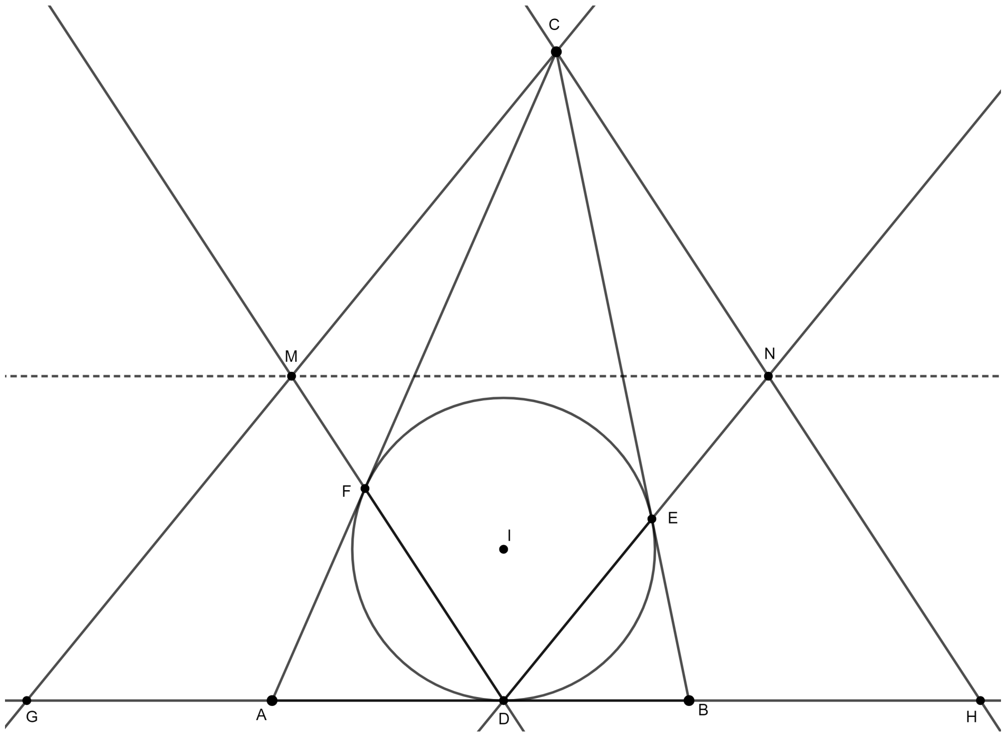
Svi brojevi su prosti, pa zaključujemo da je to jedini niz od 5 elemenata. 1 bod

Kada bi niz imao 6 ili više elemenata, šesti član niza morao bi biti jednak $29 + 6 = 35$, što nije prost broj. Zato je najveći takav n jednak 5. 1 bod

Zadatak A-1.4.

Trokutu ABC upisana je kružnica koja dira stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama D, E i F. Pravac koji prolazi točkom C i paralelan je s DE siječe pravac DF u točki M, a pravac koji prolazi točkom C i paralelan je s DF siječe pravac DE u točki N. Dokaži da pravac MN sadrži srednjicu trokuta ABC.

Rješenje.



Označimo sjecišta pravaca CM i CN s pravcem AB redom s G i H.

Kako su točke D, E i F dirališta upisane kružnice trokuta ABC, vrijede jednakosti

$$|AD| = |AF|, \quad |BD| = |BE|, \quad |CF| = |CE|.$$

Primjenom Talesovog teorema za kut $\sphericalangle ABC$ te paralelne pravce DE i GC, iz jednakosti $|BD| = |BE|$ zaključujemo $|GD| = |CE|$. 2 boda

Analogno, primjenom Talesovog teorema za kut $\sphericalangle CAB$ te paralelne pravce DF i HC, iz jednakosti $|AD| = |AF|$ zaključujemo $|DH| = |CF|$. 2 boda

Iz dobivenih jednakosti zaključujemo

$$|DH| = |CF| = |CE| = |GD|,$$

odakle slijedi da je točka D je polovište dužine $\overline{GH}$. 2 boda

Promotrimo trokut CGH. Dužina DM paralelna je sa stranicom $\overline{CH}$ te prolazi polovištem jedne stranice tog trokuta. Zato je to srednjica tog trokuta, odnosno M je polovište dužine $\overline{CG}$. 1 bod

Analogno, zaključujemo da je N polovište dužine $\overline{CH}$. 1 bod

Iz prethodna dva rezultata zaključujemo da je $\overline{MN}$ srednjica trokuta GHC. 1 bod

Konačno, kako je pravac MN paralelan s pravcem AB te je jednako udaljen od točke C kao i od pravca AB, zaključujemo da pravac MN sadrži srednjicu trokuta ABC, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Napomena: Nakon što se dokaže $|GD| = |CE|$ kao u gornjem rješenju, može se dokazati da je šesterokut $CMFIEN$ tetivan (gdje je I središte upisane kružnice trokuta ABC), te primijetiti da su trokuti DGM i ECM sukladni, odakle slijedi zaključak da je M polovište dužine $\overline{CG}$. Analogno zaključujemo da je N polovište dužine $\overline{CH}$, pa tvrdnju zadatka dovršavamo kao u gornjem rješenju.

Dokaz tetivnosti šesterokuta $CMFIEN$ nosi 2 boda, dok nakon toga dokaz sukladnosti trokuta DGM i ECM nosi 3 boda (preostali bodovi u ovakvom rješenju su prva 2 boda i zadnja 3 boda gornjeg rješenja).

Zadatak A-1.5.

U krugu sjede 2023 osobe. Među njima je N osoba koje uvijek govore istinu, dok svi ostali uvijek lažu. Svi su dali izjavu: „Obje osobe koje sjede do mene lažu." Odredi sve vrijednosti broja N za koje je to moguće.

Rješenje.

Dokazat ćemo da N može poprimiti bilo koju vrijednost iz skupa

$$\{675, 676, \ldots, 1010, 1011\}.$$ 1 bod

Iz uvjeta zadatka, obje osobe koje sjede uz osobu koja govori istinu nužno lažu. S druge strane, uz svaku osobu koja laže sjedi barem jedna osoba koja govori istinu. 1 bod

Posebno, od dvije osobe koje sjede jedna pored druge barem jedna laže (inače bi te obje osobe imale susjeda koji govori istinu), te od tri osobe u nizu barem jedna govori istinu (inače bi srednja osoba u tom nizu imala dva susjeda koja lažu). 1 bod

Očito u krugu postoji barem jedna osoba koja govori istinu i barem jedna osoba koja laže.

Promotrimo jednu osobu koja govori istinu. Ostalih 2022 osoba podijelimo u 674 trojki uzastopnih osoba. U svakoj takvoj trojki sjedi barem jedna osoba koja govori istinu (inače bismo imali tri uzastopne osobe koje lažu). Zato je broj osoba N koje govori istinu barem $1 + 674 = 675$. 2 boda

Promotrimo sada jednu osobu koja laže, i podijelimo ostalih 2022 osoba u 1011 parova susjednih osoba. U svakom paru sjedi barem jedna osoba koja laže (inače bismo imali dvije uzastopne osobe koje govore istinu). Zato je broj osoba N koje govori istinu najviše 1011. 2 boda

Time smo dokazali da je nužno $675 \leqslant N \leqslant 1011$. Dokažimo da za svaki od tih izbora broja N možemo naći povoljan razmještaj osoba u krugu.

Neka nekih sedam osoba u krugu zadovoljavaju $ILLILIL$, gdje slovo I označava osobu koja govori istinu, a L osobu koja laže. Ostalih 2016 osoba podijelimo u K šestorki uzastopnih osoba oblika $ILILIL$ i $336 - K$ šestorki oblika $ILLILL$. 1 bod

Svaka takva konfiguracija zaista zadovoljava uvjete zadatka: pored svake osobe koja govori istinu sjedi osoba koja laže, a pored svake osobe koja laže sjedi barem jedna osoba koja govori istinu (uključujući i osobe koje dolaze na kraju šestorki, budući da će nakon nje doći niz osoba koje počinju osobom koja govori istinu). 1 bod

Broj osoba koje govore istinu tada je jednak

$$N = 3 + K \cdot 3 + (336 - K) \cdot 2 = 675 + K.$$

Kako broj K može poprimiti bilo koju vrijednost iz skupa $\{0, 1, \dots, 336\}$, konstruirali smo konfiguracije osoba među kojima je broj osoba koje govore istinu poprima svaku vrijednost iz skupa $\{675, 676, \dots, 1010, 1011\}$, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Napomena: Rješenje prati sljedeću bodovnu shemu: 1 bod za točan skup vrijednosti broja N, 6 bodova za dokaz da se N mora nalaziti u tom skupu, te 3 boda za konstrukciju takvih grupa osoba za svaki N.

Moguće je dokazati sljedeću tvrdnju: između svake dvije uzastopne osobe koje govore istinu (između kojih ne postoji treća osoba koja govori istinu) sjedi jedna ili dvije osobe koje lažu. Iskaz i dokaz te tvrdnje nosi 1 bod (koji odgovara drugom bodu gornje sheme).

Za zadnja 3 boda nije dovoljno dati primjer osoba za rubne slučajeve $N = 675$ i $N = 1011$, nego i za sve između. Konstrukcija za te rubne slučajeve nosi po 1 bod, te jasan i nedvosmislen opis konstrukcije svih ostalih slučajeva nosi 1 bod. Ova tri boda ne zbrajaju se sa zadnja 3 boda iz gornje bodovne sheme.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$, odredi sliku funkcije $f(x) = \dfrac{2023}{x^2 - a^2 - x - a}$.

Rješenje.

Funkcija $g(x) = x^2 - a^2 - x - a = (x + a)(x - a - 1)$ kvadratna je funkcija. Njezine nultočke su $-a$ i $a + 1$. U tim točkama funkcija f nije definirana. 1 bod

Ordinata tjemena kvadratne funkcije iznosi $-\dfrac{1}{4} - a^2 - a$. 1 bod

Zato je slika funkcije g skup $\left[-\dfrac{1}{4} - a^2 - a, +\infty\right\rangle$. 2 boda

Promotrimo prvo slučaj u kojem su nultočke različite (što je ekvivalentno uvjetu $a \neq 1/2$). Za realne x koji se nalaze između nultočaka vrijedi izraz $g(x)$ poprima vrijednosti na skupu

$$\left[-\frac{1}{4} - a^2 - a, 0\right],$$

pa zato $f(x)$ poprima sve vrijednosti iz skupa

$$\left\langle -\infty, \frac{2023}{-\frac{1}{4} - a^2 - a}\right] = \left\langle -\infty, -\frac{8092}{1 + 4a + 4a^2}\right].$$ 1 bod

Na ostalim vrijednostima funkcija g poprima sve pozitivne vrijednosti, pa stoga i funkcija f poprima sve pozitivne vrijednosti. 1 bod

Zato u slučaju $a \neq -\dfrac{1}{2}$ slika funkcije f je skup $\left\langle -\infty, -\dfrac{8092}{1 + 4a + 4a^2}\right] \cup \langle 0, +\infty\rangle$. 2 boda

U slučaju $a = 1/2$ nultočke funkcije g se poklapaju, pa je njezina slika $[0, +\infty\rangle$, a slika funkcije f je $\langle 0, +\infty\rangle$. 2 boda

Konačno zaključujemo:

- u slučaju $a \neq -\dfrac{1}{2}$ slika funkcije f je skup $\left\langle -\infty, -\dfrac{8092}{1 + 4a + 4a^2}\right] \cup \langle 0, +\infty\rangle$;
- u slučaju $a = -\dfrac{1}{2}$ slika funkcije f je skup $\langle 0, +\infty\rangle$.

Zadatak A-2.2.

Jednadžba

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + ax + c) = 0$$

ima četiri različita realna rješenja i to su a, b, c i -1. Odredi brojeve a, b i c.

Prvo rješenje.

Dva od četiri broja a, b, c i -1 rješenja su kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$, dok su druga dva broja rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + c = 0$.

Zbroj rješenja ove jednadžbe zbroj je zbrojeva rješenja svake od kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$ i $x^2 + ax + c = 0$. Prema Vieteovih formulama, iznosi $-2a$. Kako su a, b, c i -1 sva 4 rješenja te jednadžbe, zaključujemo

$$-2a = a + b + c - 1.$$ 1 bod

Analogno, umnožak tih četiri rješenja je umnožak slobodnih koeficijenata b i c, ali je jednak i umnošku sva četiri broja a, b, c i -1. Dakle, vrijedi

$$bc = -abc.$$ 1 bod

Iz zadnje jednadžbe slijedi $(a + 1)bc = 0$. Slučaj $a = -1$ odbacujemo jer prema uvjetu zadatka sva četiri rješenja moraju biti međusobno različita. Zaključujemo da je jedan od brojeva b i c jednak nuli. 2 boda

Primijetimo da ako trojka (a, b, c) zadovoljava uvjete zadatka, da tada i trojka (a, c, b) također zadovoljava uvjete zadatka. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c = 0$.

Iz jednakosti za zbroj rješenja dobivamo

$$\begin{aligned} -2a &= a + b - 1, \\ b &= -3a + 1. \end{aligned}$$ 1 bod

Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + c = x(x + a)$ su $c = 0$ i broj $-a$. Drugo rješenje ne može biti jednako a, jer bi tada i a bio jednak nuli. Zato je a rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$. 1 bod

Uvrštavanjem broja a u tu jednadžbu dobivamo

$$0 = a^2 + a \cdot a + b = 2a^2 - 3a + 1.$$ 1 bod

Rješenja ove jednadžbe su $a = 1$ i $a = \dfrac{1}{2}$. 1 bod

Korištenjem jednakosti $b = -3a + 1$, u prvom slučaju dobivamo $b = -2$, a u drugom slučaju dobivamo $-\dfrac{1}{2}$. 1 bod

Direktnom provjerom vidimo da zaista obje mogućnosti za izbor brojeva a, b i c zadovoljavaju uvjete zadatka. Naime, rješenja jednadžbe

$$(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 0) = 0$$

su brojevi $a = 1$ i $b = -2$ (nultočke kvadratnog izraza u prvoj zagradi), te $c = 0$ i -1 (nultočke kvadratnog izraza u drugoj zagradi), dok su rješenja jednadžbe

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 0\right) = 0$$

brojevi $a = \frac{1}{2}$ i -1 (nultočke kvadratnog izraza u prvoj zagradi), te $c = 0$ i $b = -\frac{1}{2}$ (nultočke kvadratnog izraza u drugoj zagradi). 1 bod

Zaključujemo da su sve tražene trojke brojeva (a, b, c) jednake

$$(1, -2, 0),\ (1, 0, -2),\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),\ \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju zaključujemo da su po dva od četiri broja a, b, c i -1 rješenja svake od kvadratnih funkcija u zagradi s lijeve strane jednadžbe, te primijećujemo simetričnost uvjeta za nepoznanice b i c.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je -1 rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$.

Imamo tri slučaja: preostalo rješenje te kvadratne jednadžbe je a, b ili c. 1 bod

U prvom slučaju neka su a i -1 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$. Zato imamo

$$x^2 + ax + b = (x+1)(x-a) = x^2 + (1-a)x - a.$$ 1 bod

Usporedbom koeficijenata, dobivamo $a = 1 - a$ i $b = -a$, odakle slijedi $a = \frac{1}{2}$ i $b = -\frac{1}{2}$. 1 bod

Kako su a i -1 rješenja prve kvadratne jednadžbe, brojevi b i c rješenja su druge kvadratne jednadžbe. Posebno,

$$0 = b^2 + a \cdot b + c = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + c,$$

odakle je $c = 0$. 1 bod

U drugom slučaju neka su b i -1 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$. Zato imamo

$$x^2 + ax + b = (x+1)(x-b) = x^2 + (1-b)x - b.$$ 1 bod

Usporedbom koeficijenata, dobivamo $a = 1 - b$ i $b = -b$, odakle slijedi $b = 0$ i $a = 1$. 1 bod

Slično kao u prethodnom slučaju zaključujemo da je a rješenje druge kvadratne jednadžbe, pa imamo

$$0 = a^2 + a \cdot a + c = 2 + c,$$

odakle je $c = -2$. 1 bod

U trećem slučaju neka su c i -1 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$. Zato imamo

$$x^2 + ax + b = (x+1)(x-c) = x^2 + (1-c)x - c,$$

odakle dobivamo $a = 1 - c$, odnosno $c = 1 - a$. 1 bod

Kako su c i -1 rješenja prve kvadratne jednadžbe, brojevi a i b rješenja su druge kvadratne jednadžbe. Posebno,

$$0 = a^2 + a \cdot a + c = 2a^2 - a + 1,$$

no ova jednadžba nema realnih rješenja za a. Zato u ovom slučaju nema rješenja. 1 bod

Kao u prošlom rješenju direktno provjeravamo da sve četiri trojke zadovoljavaju sve uvjete zadatka. 1 bod

Napomena: U oba rješenju zadnji bod ostvaruje se za navođenje svih četiriju trojki brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju uvjet zadatka, zajedno s provjerom svih uvjeta (da su ti brojevi zaista međusobno različiti i različiti od -1, te da rješavaju jednadžbu iz zadatka).

Zadatak A-2.3.

Odredi sve uređene trojke (m, n, p) gdje su m i n prirodni brojevi, a p prost za koje vrijedi

$$25^n + 2 \cdot 5^n = p^m + 8.$$

Rješenje.

Jedino rješenje jednadžbe je $(m, n, p) = (3, 1, 3)$. 1 bod

Dodavanjem broja 1 na obje strane jednadžbe, te primjenom razlike kvadrata, dobivamo

$$(5^n + 1)^2 = p^m + 9 \qquad \text{1 bod}$$
$$(5^n - 2)(5^n + 4) = p^m. \qquad \text{1 bod}$$

Oba faktora na lijevoj strani jednadžbe prirodni su brojevi veći od 1, pa da bi u umnošku bili jednaki potenciji prostog broja, oba moraju biti njegove potencije. 1 bod

Dakle, postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $5^n - 2 = p^a$ i $5^n + 4 = p^b$, te $a + b = m$.

Kako je drugi faktor veći od prvog, zaključujemo da je $b > a$. 1 bod

Oduzimanjem dobivenih jednakosti, dobivamo

$$6 = (5^n + 4) - (5^n - 2) = p^b - p^a = p^a(p^{b-a} - 1). \qquad \text{1 bod}$$

Kako su prosti faktori broja 6 jednaki 2 i 3, imamo dva slučaja: $p = 2$ i $p = 3$. 1 bod

Ako je $p = 2$ početna jednadžba nema rješenja budući da je izraz 25^n neparan, dok su svi ostali izrazi parni. 1 bod

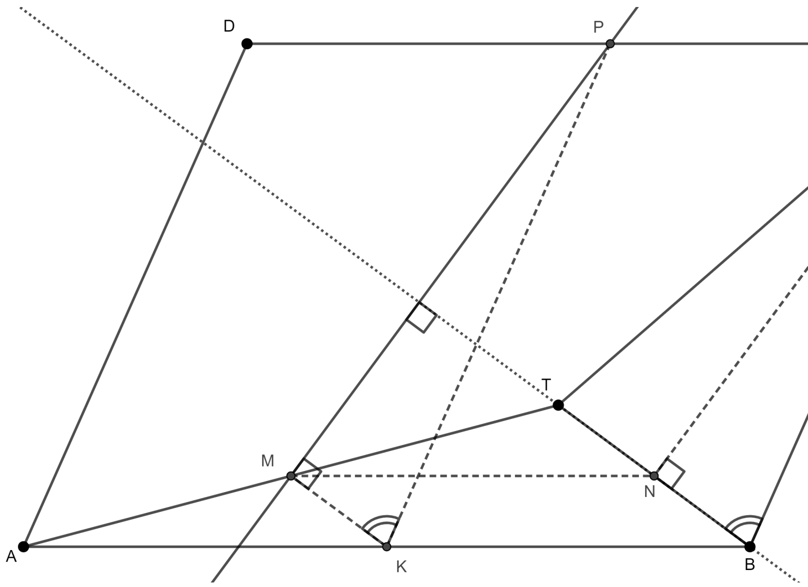
Ako je $p = 3$, tada je $p^a = 3$ i $p^{b-a} - 1 = 2$, odakle je $a = 1$ i $b = 2$. Zaključujemo da je $m = 3$, te iz $5^n - 2 = 3$ dobivamo da je $n = 1$. 2 boda

Time smo dobili jedino rješenje jednadžbe $(m, n, p) = (3, 1, 3)$.

Zadatak A-2.4.

Unutar paralelograma $ABCD$ odabrana je točka T tako da vrijedi $|TC| = |BC|$. Neka su P i M redom polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{AT}$. Dokaži da je pravac BT okomit na pravac PM.

Prvo rješenje.



Označimo sa N polovište dužine $\overline{BT}$.

Iz uvjeta $|TC| = |BC|$ slijedi da je trokut BTC jednakokračan, pa je dužina $\overline{CN}$ ujedno i visina u tom trokutu. Zato vrijedi $CN \perp BT$. 2 boda

Dužina $\overline{MN}$ srednjica je trokuta TAB. Zato vrijedi $MN \parallel AB$ i $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$. 2 boda

Kako je $ABCD$ paralelogram, a P polovište stranice $\overline{CD}$, i za dužinu $\overline{CP}$ vrijedi $CP \parallel AB$ i $|CP| = \frac{1}{2}|AB|$. 2 boda

U četverokutu $MNCP$ stranice $\overline{MN}$ i $\overline{CP}$ su paralelne i jednake duljine, pa je zato četverokut $MNCP$ paralelogram. 2 boda

Posebno, vrijedi $PM \parallel CN$. 1 bod

Dobili smo da je pravac CN paralelan s pravcem PM, a okomit na pravac BT, pa zato zaključujemo da su pravci BT i PM međusobno okomiti, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo sa N i K redom polovišta dužina $\overline{BT}$ i $\overline{AB}$.

Dužina $\overline{MK}$ srednjica je trokuta ABT, pa je paralelna sa pravcem BT. Zato je dovoljno pokazati da je $\sphericalangle KMP$ pravi. 1 bod

Iz uvjeta $|TC| = |BC|$ slijedi da je trokut BTC jednakokračan, pa je dužina $\overline{CN}$ ujedno i visina u tom trokutu. Zato je $\sphericalangle CNB$ pravi kut. 2 boda

Kako je $\overline{MK}$ srednjica trokuta ABT te N polovište dužine $\overline{BT}$ slijedi da je

$$|MK| = \frac{1}{2}|BT| = |BN|.$$ 1 bod

Kako je četverokut $ABCD$ paralelogram te kako su K i P polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ slijedi da je i četverokut $PKBC$ također paralelogram.

Zato vrijedi

$$|PK| = |BC| \quad \text{i} \quad \sphericalangle AKP = \sphericalangle ABC.$$ 2 boda

Promotrimo trokute MKP i NBC. Dokazali smo da im se dva para stranica poklapaju ($|MK| = |BN|$ i $|PK| = |BC|$). Za kutove između tih parova stranica vrijedi

$$\sphericalangle MKP = \sphericalangle AKP - \sphericalangle AKM = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABT = \sphericalangle NBC.$$ 2 boda

Zato zaključujemo da su trokuti MKP i NBC sukladni prema S–K–S poučku o sukladnosti. 1 bod

Posebno, $\sphericalangle KMP = \sphericalangle CNB = 90°$, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Zadatak A-2.5.

Žaba Žana nalazi se ishodištu brojevnog pravca, te u svakom koraku skače za jedan ulijevo, za jedan udesno ili ostaje na mjestu. Lina i Dina izabrale su relativno proste brojeve m i n, gdje je $m > n$. Nakon svakih n koraka Lina zapovijeda: „Lijevo!”, a nakon svakih m koraka Dina zapovijeda: „Desno!” Žana miruje dok ne čuje prvu zapovijed, a nakon toga počinje (ili nastavlja) skakati u smjeru prema zapovijedi. Zaustavlja se u prvom koraku u kojem čuje obje zapovijedi. U ovisnosti o brojevima m i n odredi na kojoj se udaljenosti od ishodišta Žana zaustavila.

Prvo rješenje.

Žana se zaustavila na udaljenosti $(m-n)n$ od ishodišta. 1 bod

Kako su m i n relativno prosti, Žana će prvi put čuti obje zapovijedi odjednom nakon mn koraka. 1 bod

Nazovimo *periodom* Žanine korake između i-te i $(i+1)$-te Linine zapovijedi (za neki prirodan broj i). Kako je $m > n$, u svakom periodu bit će izdana najviše jedna Dinina zapovijed. 1 bod

Za neki k promotrimo periode u kojima je Dina dala k-tu i $(n-k)$-tu zapovijed. 2 boda

Do Dinine k-te zapovijedi prošlo je mk koraka od početka, dok je njezina $(n-k)$-ta zapovijed bila izdana mk koraka prije kraja Žaninog putovanja. Dakle, te dvije zapovijedi bile su izdane simetrično u odnosu na Žanino putovanje. 1 bod

Slično, ako je Dinina k-ta zapovijed izdana nakon i-te Linine zapovijedi, Dinina $(n-k)$-ta zapovijed izdana je prije $(m-i)$-te Linine zapovijedi. Zaključujemo da su Žanini koraci izvršeni u periodima u kojima su izvršene k-ta i $(n-k)$-ta Dinina zapovijed simetrični, pa se ukupno dokidaju: u ta dva perioda Žana je napravila ukupno n koraka ulijevo i n koraka udesno. 2 boda

Stoga je Žanina udaljenost od ishodišta određena isključivo periodima u kojima nema Dininih zapovijedi.

Prije zaustavljanja proći će $(m-1)$ period u kojima će Dina dati $(n-1)$ zapovijed (ne brojeći zapovijedi u (mn)-tom koraku). U svakom periodu Dina je izdala najviše jednu zapovijed. Zaključujemo da je u $n-1$ perioda izdala jednu zapovijed, a u $m-n$ perioda nije izdala nijednu zapovijed. 1 bod

U svakom od tih $m-n$ perioda bez Dinine zapovijedi Žana je napravila n koraka ulijevo, pa je konačna Žanina udaljenost od ishodišta jednaka $(m-n)n$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju tvrdimo da je odgovor $(m-n)n$, te zaključujemo da Žana staje nakon mn koraka. 2 boda

Za prirodne brojeve a i b neka $o(a,b)$ označava ostatak pri dijeljenju broja a brojem b.

Tvrdimo da je svaki broj k iz skupa koraka $S \coloneqq \{0,1,\ldots,nm-1\}$ na jedinstven način određen uređenim parom ostataka tog broja pri dijeljenju s n i m:

$$(o(k,n),o(k,m)) \in S_2 \coloneqq \{0,1,\ldots,n-1\} \times \{0,1,\ldots,m-1\}.$$ 1 bod

Kako je veličina skupa S jednaka broju veličini skupa S_2, dovoljno je pokazati da ne postoje dva različita broja k_1, k_2 iz S koja daju isti uređeni par iz S_2. U suprotnom, njihova razlika k_1-k_2 davala bi ostatak 0 pri dijeljenju i s m i s n, pa bi bila djeljiva s mn, no najveća apsolutna razlika dvaju elemenata iz skupa S je $mn-1$. 1 bod

Dokazat ćemo sljedeću tvrdnju: nakon k-tog koraka, Žana ostaje na mjestu ako je $o(k,m)=o(k,n)$, Žana se pomiče ulijevo ako je $o(k,n)<o(k,m)$, te se pomiče udesno ako je $o(k,n)>o(k,m)$. 2 boda

Ako se brojevi $o(k,n)$ i $o(k,m)$ razlikuju, Žana se pomiče prema onoj zapovijedi koju je čula prije manjeg broja koraka. Lininu naredbu čula je prije $o(k,n)$ koraka, a Dininu naredbu čula je prije $o(k,m)$ koraka, što dokazuje gornju tvrdnju u slučaju kada je $o(k,n)$ i $o(k,m)$ razlikuju. 1 bod

Žana stoji na mjestu prvih n koraka. Za tih prvih n koraka vrijedi $o(k,n)=o(k,m)$ (gdje je $k \in \{0,\ldots,n-1\}$). S druge strane broj brojeva k koji zadovoljavaju $o(k,n)=o(k,m)$ je točno n. Zaključujemo da oni odgovaraju točno prvih n koraka, pa je i taj dio tvrdnje dokazan. 1 bod

Zato je konačna udaljenost Žane od ishodišta jednaka apsolutnoj razlici broja uređenih parova iz S_2 u kojima je prva koordinata veća od druge i broj parova u kojima je druga koordinata veća od druge.

Svi uređeni parovi $(i,j) \in S_2$ takvi da je $j<i$ posebno zadovoljavaju da su obje koordinate manje od n, stoga je broj takvih parova jednak broju uređenih parova $(j,i) \in S_2$ takvih da je $j<i<n$. 1 bod

Zato je tražena apsolutna razlika jednaka broju uređenih parova $(i,j) \in S_2$ takvih da je $i<j$, te $j \geqslant n$. U tom slučaju i može poprimiti bilo koju vrijednost iz skupa $\{0,1,\ldots,n-1\}$, a j bilo koju vrijednost iz skupa $\{n,n+1,\ldots,m-1\}$. Takvih parova je $(m-n)n$, pa toliko iznosi i konačna Žanina udaljenost od ishodišta. 1 bod

Napomena: Konačan broj parova (i, j) s kraja drugog rješenja može se izračunati i direktno. Broj parova $(i, j) \in S_2$ takvih da je $j < i$ iznosi $\frac{n(n-1)}{2}$, a broj parova $(i, j) \in S_2$ takvih da je $j > i$ iznosi $\frac{n(2m-n-1)}{2}$. Točan račun za svaki od tih brojeva nosi po 1 bod, koji odgovaraju zadnjim dvama bodovima bodovne sheme za drugo rješenje.

Četvrti bod druge bodovne sheme moguće je ostvariti korištenjem kineskog teorema o ostatcima.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$1225 \cdot 5^{x^2-3x} = 7^{x+1}.$$

Rješenje.

Koristeći $1225 = 5^2 \cdot 7^2$ i logaritmirajući svaku stranu (s bazom 5), dobivamo

$$5^2 \cdot 5^{x^2-3x} = 7^{x+1} \cdot 7^{-2}$$

$$5^{x^2-3x+2} = 7^{x-1}. \qquad \text{2 boda}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)\log_5 7 \qquad \text{4 boda}$$

$$(x-1)(x-2) = (x-1)\log_5 7 \qquad \text{2 boda}$$

$$(x-1)(x-2-\log_5 7) = 0$$

Dakle, tražena rješenja su $x = 1$ i $x = 2 + \log_5 7$. 2 boda

Napomena: Rješenje se može provesti i primjenom logaritma po bazi 7. Drugo rješenje prihvaća se i u sličnom zapisu (npr. ako je izražen preko logaritma po bazi 7, ili ako se broj 2 nalazi u argumentu logaritma kao $\log_5(7 \cdot 5^2) = \log_5 175$).

Zadnja 2 boda ostvaruju se za svako od pronađenih rješenja.

Zadatak A-3.2.

Ovisno o realnom parametru p odredi broj rješenja jednadžbe $\cos 2x = p(\sin x + \cos x)$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

Koristeći formulu za kosinus dvostrukog kuta dobivamo

$$\cos^2 x - \sin^2 x = p(\sin x + \cos x), \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = p(\sin x + \cos x).$$

Dobivamo dva slučaja:

$$\cos x + \sin x = 0 \quad \text{ili} \quad \cos x - \sin x = p. \qquad \text{2 boda}$$

U prvom slučaju ($\cos x+\sin x=0$) dijelimo s $\cos x$ (ne može biti jednak nuli jer bi u suprotnom i $\sin x$ bio jednak nuli) te dobivamo $\operatorname{tg} x=-1$, čija su rješenja na $[0,2\pi]$ jednaka $x_1=\frac{3\pi}{4}$ i $x_2=\frac{7\pi}{4}$. 1 bod

U drugom slučaju ($\cos x-\sin x=p$) množenjem s $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i primjenom adicijske formule jednadžba postaje

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{p\sqrt{2}}{2}.$$ 2 boda

Ova jednadžba ima rješenja u slučaju $-\frac{p\sqrt{2}}{2}\in[-1,1]$, odnosno kada je $p\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. 1 bod

Tada jednadžba ima točno 2 rješenja na $[0,2\pi]$, osim u slučaju kada je desna strana jednaka 1 ili -1, ili u slučaju kada su 0 i 2π neka rješenja te jednadžbe. Zajedno s time, treba provjeriti i slučaj kada je neko od rješenja ove jednadžbe ujedno i rješenje jednadžbe $\cos x+\sin x=0$.

Desna strana ova jednadžbe jednaka je 1 u slučaju $p=-\sqrt{2}$. Tada je njezino rješenje $x_1=\frac{3\pi}{4}$, koje je već rješenje iz prvog slučaja. Slično, desna strana jednadžbe je jednaka -1 za $p=\sqrt{2}$, kada je jedino rješenje već pronađeno rješenje $x_2=\frac{7\pi}{4}$. 2 boda

Jednadžba će imati tri rješenja ako je 0 jedno od rješenja, a to je u slučaju kada je $\sin\left(0-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{p\sqrt{2}}{2}$, odnosno kada je $p=1$. Ta tri rješenja su $x_3=0$, $x_4=\pi$ i $x_5=2\pi$, te su sva različita od x_1 i x_2. 1 bod

Konačno zaključujemo:

- u slučaju $p\leqslant-\sqrt{2}$ ili $p\geqslant\sqrt{2}$ početna jednadžba ima 2 rješenja;
- u slučaju $p=1$ početna jednadžba ima 5 rješenja;
- u slučaju $p\in\langle-\sqrt{2},\sqrt{2}\rangle\setminus\{1\}$ početna jednadžba ima 4 rješenja.

Napomena: Osmi i deveti bod sheme mogu biti rastavljeni na dva zasebna boda. Jedan bod predstavlja razmatranje (oba) slučaja kada jednadžba

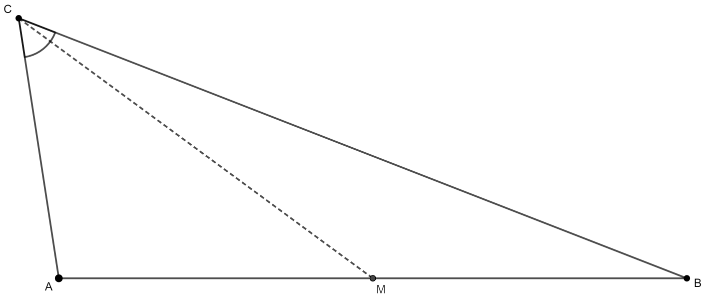
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{p\sqrt{2}}{2}$$

ima jedno rješenje, a drugi predstavlja razmatranje (oba) slučaja kada je jedno od rješenja te jednadžbe jednako x_1 ili x_2. Stoga, rješenje u kojem se razmatraju mogućnosti $p=\pm\sqrt{2}$ iz samo jednog od ova dva pogleda (recimo, kada ta jednadžba ima točno jedno rješenje, bez komentara da je to ujedno pronađeno rješenje x_1 ili x_2) ostvaruje najviše 1 bod od ta dva boda.

Zadatak A-3.3.

Dan je trokut ABC takav da je $\sphericalangle ACB=60^\circ$, $|AC|=\sqrt{3}-1$ i $|BC|=2$. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle ACM$.

Prvo rješenje.



Neka je $x = \sphericalangle ACM$. Tada je $\sphericalangle MCB = 60^\circ - x$. Primjenom poučka o sinusima na trokut AMC dobivamo

$$\frac{|AC|}{|AM|} = \frac{\sin(\sphericalangle AMC)}{\sin(x)}.$$ 1 bod

Također, primjenom poučka o sinusima na trokut MBC dobivamo

$$\frac{|BC|}{|MB|} = \frac{\sin(\sphericalangle BMC)}{\sin(60^\circ - x)}.$$ 1 bod

Ako podijelimo te dvije jednakosti i iskoristimo da je $|AM| = |MB|$ i $\sin(\sphericalangle AMC) = \sin(180^\circ - \sphericalangle AMC) = \sin(\sphericalangle BMC)$, dobivamo

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin(60^\circ - x)}{\sin x},$$ 3 boda

odnosno

$$(\sqrt{3}-1)\sin(x) = 2\sin(60^\circ - x).$$

Primijenimo li adicijsku formulu na desnu stranu jedankosti, dobivamo

$$\sin(60^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x,$$ 2 boda

odakle dobivamo

$$(\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{3}\cos x - \sin x,$$
$$\sin x = \cos x.$$ 2 boda

Kako je $0^\circ < x < 60^\circ$, slijedi $\sphericalangle ACM = x = 45^\circ$. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo s a, b, c i t redom duljine dužina $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ i $\overline{CM}$.

Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABC dobivamo

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\sphericalangle ACB \\ &= 4 + (4 - 2\sqrt{3}) - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 10 - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2 boda

Primjenom formule za duljinu težišnice t u trokutu ABC dobivamo

$$t^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

2 boda

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\left(2 \cdot 4 + 2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) - (10 - 4\sqrt{3})\right) \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2 boda

Sada primjenom poučka o kosinusu u trokutu ACM dobivamo

$$\cos\sphericalangle ACM = \frac{b^2 + t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2bt}$$

2 boda

$$\begin{aligned} &= \frac{(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)}{2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

1 bod

odakle je $\sphericalangle ACM = 45°$. 1 bod

Zadatak A-3.4.

Odredi sve racionalne brojeve x za koje vrijedi

$$x \cdot \lfloor x \rfloor \cdot (x - \lfloor x \rfloor) = 254.$$

Za racionalni broj t, $\lfloor t \rfloor$ najveći je cijeli broj koji nije veći od t. Na primjer, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$.

Rješenje.

Zapišimo broj x u obliku

$$x = n + \frac{p}{q},$$

gdje su $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}_0$ i $q \in \mathbb{N}$ takvi da su p i q relativno prosti, te je $p < q$. 1 bod

Tada je $\lfloor x \rfloor = n$, pa se jednadžba može zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{p}{q}\right) \cdot n \cdot \frac{p}{q} &= 254 \\ (nq + p) \cdot n \cdot p &= 254q^2. \end{aligned}$$ 1 bod

Kako je lijeva strana djeljiva s q^2, mora biti i desna. Brojevi p i q^2 su relativno prosti iz pretpostavke s početka. Isto vrijedi i za brojeve q^2 i $nq + p$, jer kada bi postojao prosti djelitelj $d > 1$ koji dijeli q^2 i $nq + p$, dijelio bi i nq, pa bi morao dijeliti i p. Zato zaključujemo da je jedino moguće $q^2 \mid n$. 2 boda

Zato postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $n = kq^2$, pa koristeći novu nepoznanicu jednadžbu sređujemo:

$$\begin{aligned} \left(kq^3 + p\right) \cdot kq^2 \cdot p &= 254q^2 \\ \left(kq^3 + p\right) \cdot k \cdot p &= 254. \end{aligned}$$ 1 bod

Rastav broja 254 na proste faktore je $254 = 2 \cdot 127$, pa su jedini mogući rastavi tog broja na pozitivne faktore $1 \cdot 2 \cdot 127$ i $1 \cdot 1 \cdot 254$.

Pretpostavimo prvo da je p najveći po apsolutnoj vrijednostima među faktorima kq^3+p, k i p, odnosno $p \geqslant 127$. Tada su druga dva člana po apsolutnoj vrijednosti manja ili jednaka 2. Zato imamo

$$q^3 \leqslant |kq^3| \leqslant |kq^3 + p| + p \leqslant 2 + p \leqslant 256.$$

No, s druge strane $q > p \geqslant 127$, čime dobivamo kontradikciju. 1 bod

Pretpostavimo sada da je k najveći po apsolutnoj vrijednostima među faktorima kq^3+p, k i p, odnosno $|k| \geqslant 127$. Ponovno su preostala dva člana po apsolutnoj vrijednosti manja ili jednaka 2, pa je

$$q^3 = \frac{|kq^3|}{|k|} \leqslant \frac{|kq^3 + p| + p}{|k|} \leqslant \frac{3}{127} < 1,$$

čime dobivamo kontradikciju s $q \in \mathbb{N}$. 1 bod

Zato zaključujemo da je $kq^3 + p$ najveći po apsolutnoj vrijednosti. Zato imamo jedan od tri slučaja:

$$\begin{gathered} |kq^3 + p| = 127,\ |k| = 1,\ p = 2, \quad |kq^3 + p| = 127,\ |k| = 2,\ p = 1, \\ \text{ili} \quad |kq^3 + p| = 254,\ |k| = 1,\ p = 1. \end{gathered}$$

U prvom slučaju je $kq^3 + p = \pm 127$, $k = \pm 1$, $p = 2$. Tada je $q^3 = 125$ ili $q^3 = 129$. Samo za prvu mogućnost dobivamo rješenje $q = 5$, pa je $n = 5^2 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{127}{5}$. 1 bod

U drugom slučaju je $kq^3+p=\pm 127$, $k=\pm 2$, $p=1$. Tada je $q^3=63$ ili $q^3=64$. Samo za drugu mogućnost dobivamo rješenje $q=4$, pa je $n=-2\cdot 4^2+\frac{1}{5}=\frac{-127}{4}$. 1 bod

U trećem slučaju je $kq^3+p=\pm 254$, $k=\pm 1$, $p=1$. Tada je $q^3=253$ ili $q^3=255$, što ne vodi k novim rješenjima. 1 bod

Zaključujemo da su sva rješenja n početne jednadžbe

$$\frac{127}{5} \quad \text{i} \quad \frac{-127}{4}.$$

Napomena: Tvrdnja da je kq^3+p po apsolutnoj vrijednosti najveći među faktorima može se dokazati i promatrajući slučajeve kada su svi faktori pozitivni i kada su dva faktora negativna. Dokaz tvrdnji u svakom od tih slučaja nosi po 1 bod, oni odgovaraju šestom i sedmom bodu gornje bodovne sheme.

Zadatak A-3.5.

Dana je ploča $n\times n$, obojana poput šahovske, pri čemu je gornje lijevo polje crne boje. Azra u svakom koraku bira šest polja ploče koja tvore 2×3 ili 3×2 pravokutnik i sadrže točno tri bijela polja, te ta tri polja zacrni. Za koje n Azra može postići da sva polja budu crne boje?

Rješenje.

Traženi n su oblika $6k-5$, $6k-1$ i $6k$, za proizvoljan $k\in\mathbb{N}$. 1 bod

Kako se u svakom koraku broj bijelih polja smanji za 3, zaključujemo da je broj bijelih polja na ploči prije prvog koraka nužno djeljiv s 3. 1 bod

Ako je n paran, tada na početku ploča sadrži $\frac{n^2}{2}$ bijelih polja. To je djeljivo sa 3 kada je i n djeljiv sa 3, pa je zato u tom slučaju nužno $n=6k$, $k\in\mathbb{N}$. 1 bod

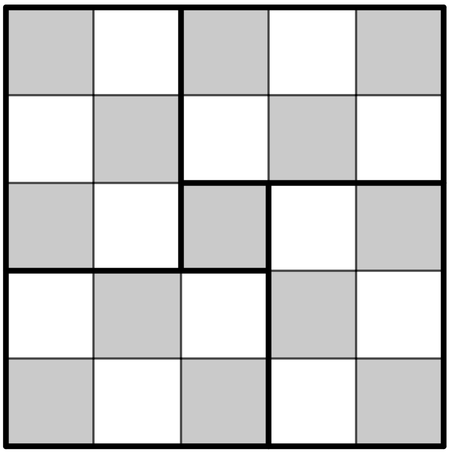
Ako je n neparan, tada na početku ploča sadrži $\frac{n^2-1}{2}=\frac{(n-1)(n+1)}{2}$ bijelih polja. Taj broj djeljiv je sa 3 čim n nije djeljiv s 3. Uzimajući u obzir i to da je neparan, n je nužno oblika $6k-1$ ili $6k-5$, $k\in\mathbb{N}$. 1 bod

Dokažimo da za sve takve n Azra može obojiti sva polja u crno.

U slučaju $n=6k$ podijelimo ploču na 2×3 pravokutnike bez zakretanja. Azra može izvesti jedan korak na svakom od tih pravokutnika (jer svaki od njih sadrži točno tri crna i tri bijela polja), te će cijela ploča postati crna budući da je svako polje ploče pokriveno barem jednim pravokutnikom. 1 bod

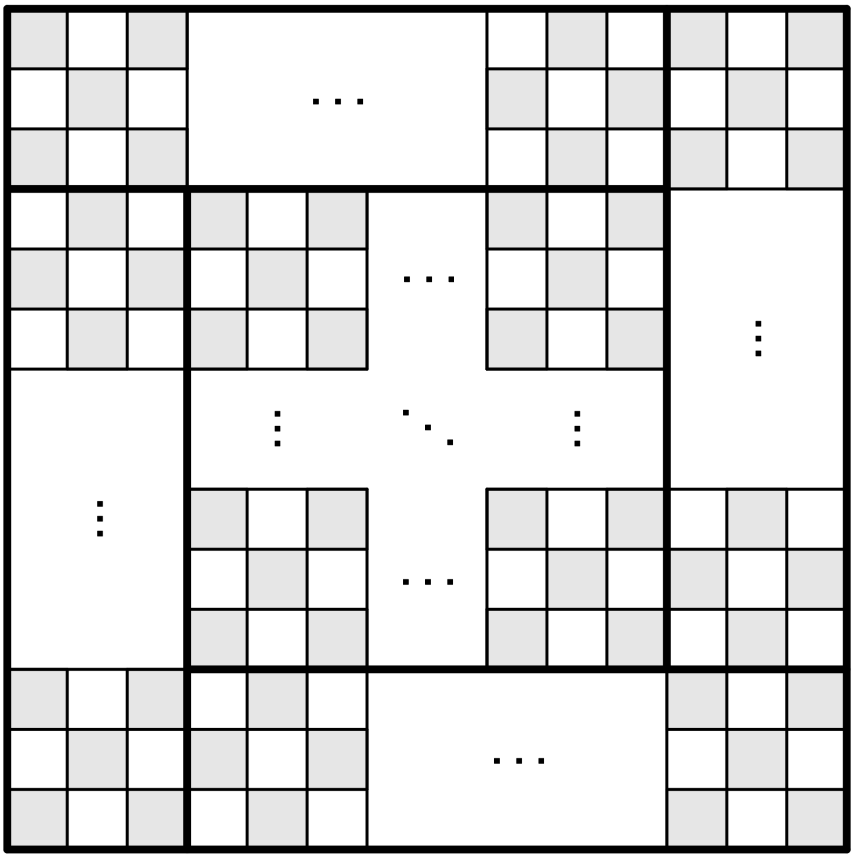
Za neparne n tvrdnju ćemo dokazati indukcijom: za svaki $k\in\mathbb{N}$, ploče oblika $(6k-5)\times(6k-5)$ i $(6k-1)\times(6k-1)$ mogu se obojiti u crno u konačno mnogo koraka.

Za bazu indukcije uzimamo $k=1$. U slučaju $n=6\cdot 1-5=1$ Azra ne treba izvesti nijedan korak, dok u slučaju $n=6\cdot 1-1=5$ Azrin odabir pravokutnika vidimo na slici. 1 bod



Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da Azra može obojiti cijelu ploču (bilo $(6k-5) \times (6k-5)$, bilo $(6k-1) \times (6k-1)$) u crno u konačno mnogo koraka, i dokažimo tvrdnju za $k+1$.

U oba slučaja, za $k+1$ ploča je veća za 6 redova i 6 stupaca. Podijelimo tu ploču $(n+6) \times (n+6)$ na 5 dijelova kao na slici. 2 boda



Kvadrat dimenzija $n \times n$ u sredini, prema pretpostavci indukcije, možemo obojiti u crno u konačno mnogo koraka. 1 bod

Kako je n neparan, broj $n+3$ je paran. Zato svaki od pravokutnika $3 \times n+3$ možemo podijeliti na $\dfrac{n+3}{2}$ pravokutnika oblika 3×2, te na svakom izvesti jedan korak. 1 bod

Time je korak indukcije završen, a time i dokaz tvrdnje s početka rješenja.

Napomena: Rješenje prati sljedeću bodovnu shemu: 1 bod za točnu tvrdnju, 3 boda za dokaz da n mora biti oblika $6k-5$, $6k-1$ ili $6k$, te 6 bodova za dokaz da n može biti tog oblika (od čega 1 bod za parne n).

Rješenjima u kojima je zanemaren slučaj $n = 1$ ne oduzima se niti jedan bod.

U bazi indukcije za neparne n svaki od primjera (za jedan broj oblika $n = 6k - 1$ i jedan broj oblika $n = 6k - 5$) nosi po 1 bod. Dio rješenja u kojem se primijeti da u slučaju $n = 1$ Azra ne mora primijeniti niti jedan korak algoritma, a koji nije u dio baze indukcije nosi 0 bodova.

Indukciju je moguće slično provesti koristeći $n = 5$ i $n = 7$ kao bazu indukcije.

Konstrukcija primjera isključivo za brojeve oblika $6k - 1$, a ne i za $6k - 5$ (ili obratno) ostvaruje najviše 3 boda od zadnjih 5 bodova gornje bodovne sheme.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

1. ožujka 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve brojeve $a, b \in \mathbb{N}_0$ i $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$2^a + 3^b + 1 = n!.$$

Rješenje.

Jedina rješenja ove jednadžbe su $(a, b, n) = (1, 1, 3)$, $(2, 0, 3)$. 1 bod

Ako je $n \leqslant 2$, desna strana jednadžbe manja je od lijeve, pa nema rješenja. Ako je $n = 3$, nužno je $b = 0$ ili $b = 1$. U oba slučaja nalazimo rješenje: $(2, 0, 3)$, $(1, 1, 3)$. 1 bod

Nadalje pretpostavljamo da je $n \geqslant 4$.

Budući da je desna strana jednakosti parna, mora biti i lijeva, a to je samo u slučaju $a \geqslant 1$. 1 bod

Promotrimo ostatke koje izrazi u jednadžbi daju pri dijeljenju s 8. Za $n \geqslant 4$, $n!$ djeljiv je s 8, dok izraz 3^b daje ostatke 3 ili 1. Kada bi bilo $a \geqslant 3$, tada bi lijeva strana jednadžbe davala ostatak 2 ili 4, čime dolazimo do kontradikcije. Dakle, nužno je $a \leqslant 2$. 3 boda

Zato imamo dva slučaja: $a = 1$ ili $a = 2$.

U slučaju $a = 1$ jednadžba postaje $3^b + 3 = n!$. Direktnom provjerom vidimo da jednadžba nema rješenja za $n = 4$ i $n = 5$. Za $n \geqslant 6$ promotrimo ostatke koje izrazi u jednadžbi daju pri dijeljenju s 9. Za $b = 0$ i $b = 1$ ne dobivamo rješenja, dok za $b \geqslant 2$ lijeva strana jednakosti daje ostatak 3 pri dijeljenju s 9. Kako je desna strana jednakosti djeljiva je s 9, dolazimo do kontradikcije, te u ovom slučaju ne dobivamo rješenja. 3 boda

U slučaju $a = 2$ jednadžba postaje $3^b + 5 = n!$. Za $b = 0$ ne dobivamo rješenje, a za $b \geqslant 1$ svi izrazi osim 5 djeljivi su s 3, pa ni u ovom slučaju ne dobivamo rješenja. 1 bod

Ovime smo razmotrili sve slučajeve pa zaključujemo da su $(a, b, n) = (1, 1, 3), (2, 0, 3)$ zaista jedina rješenja ove jednadžbe.

Zadatak A-4.2.

Za svaki prirodan broj n neka su a_n i b_n realni brojevi takvi da je $(\sqrt{3}+i)^n = a_n + ib_n$. Dokaži da izraz

$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n}$$

poprima istu vrijednost za sve $n \in \mathbb{N}$ te odredi tu vrijednost.

Prvo rješenje.

Uvedimo oznaku $z_n = (\sqrt{3}+i)^n$. Zapišimo taj broj u trigonometrijskom obliku: kako je

$$z_1 = (\sqrt{3}+i) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

zaključujemo za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$z_n = z_1^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$ 1 bod

Zato vrijedi

$$a_n = 2^n \cos\frac{n\pi}{6} \quad \text{i} \quad b_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{6},$$

pa iz adicijskih formula imamo

$$\begin{aligned} a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n &= 4^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}\sin\frac{(n+1)\pi}{6} - \cos\frac{(n+1)\pi}{6}\sin\frac{n\pi}{6}\right) \\ &= 4^n \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6} - \frac{n\pi}{6}\right) \\ &= 4^n \sin\frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

3 boda

1 bod

$$\begin{aligned} a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n &= 4^n\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{6}\cos\frac{n\pi}{6} + \sin\frac{(n+1)\pi}{6}\sin\frac{n\pi}{6}\right) \\ &= 4^n \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{6} - \frac{n\pi}{6}\right) \\ &= 4^n \cos\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

3 boda

1 bod

Konačno, imamo da je

$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$ 1 bod

Zaključujemo da izraz poprima istu vrijednost za sve $n \in \mathbb{N}$, i ta vrijednost iznosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je

$$
\begin{aligned}
&(a_{n+1}a_n + b_{n+1}b_n) + i\,(b_{n+1}a_n - a_{n+1}b_n) \\
&\quad = (a_{n+1} + ib_{n+1}) \cdot (a_n - ib_n) && \text{4 boda} \\
&\quad = (a_{n+1} + ib_{n+1}) \cdot \overline{(a_n + ib_n)} \\
&\quad = \left(\sqrt{3} + i\right)^{n+1} \cdot \overline{\left(\sqrt{3} + i\right)^{n}} && \text{1 bod} \\
&\quad = \left(\sqrt{3} + i\right)^{n+1} \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)^{n} && \text{2 boda} \\
&\quad = (\sqrt{3} + i) \cdot \left((\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)\right)^{n} \\
&\quad = 4^n\sqrt{3} + i4^n. && \text{2 boda}
\end{aligned}
$$

Usporedbom realnih i imaginarnih dijelova zaključujemo $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 4^n\sqrt{3}$ te $a_{n+1}a_n + b_{n+1}b_n = 4^n$, te je konačno

$$\frac{a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n}{a_{n+1}a_n + b_{n+1}b_n} = \frac{4^n}{4^n\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad \text{1 bod}$$

Treće rješenje.

Primijetimo da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_{n+1} + ib_{n+1} = \left(\sqrt{3} + i\right)^{n+1} = (a_n + ib_n) \cdot (\sqrt{3} + i) = (a_n\sqrt{3} - b_n) + i(a_n + b_n\sqrt{3}), \qquad \text{2 boda}$$

odnosno $a_{n+1} = a_n\sqrt{3} - b_n$ i $b_{n+1} = a_n + b_n\sqrt{3}$. 2 boda

Zato traženi izraz možemo pisati na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n}{a_{n+1}a_n + b_{n+1}b_n} &= \frac{a_n(a_n + b_n\sqrt{3}) - (a_n\sqrt{3} - b_n)b_n}{(a_n\sqrt{3} - b_n)a_n + (a_n + b_n\sqrt{3})b_n} && \text{2 boda} \\
&= \frac{a_n^2 + a_nb_n\sqrt{3} - a_nb_n\sqrt{3} + b_n^2}{a_n^2\sqrt{3} - a_nb_n + a_nb_n + b_n^2\sqrt{3}} && \text{1 bod} \\
&= \frac{a_n^2 + b_n^2}{\sqrt{3}(a_n^2 + b_n^2)} && \text{1 bod} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}, && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

gdje vrijedi $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$ jer bi u suprotnom imali $0 = a_n^2 + b_n^2 = |(\sqrt{3} + i)^n| = |\sqrt{3} + i|^n$, što nije istina. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Neka su a, b i c različiti cijeli brojevi i $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom takav da je $P(a) = a^3$ i $P(b) = b^3$. Odredi $P(1)$.

Prvo rješenje.

Uvrštavanjem a i b u polinom $P(x)$ i korištenjem uvjeta, slijedi

$$a^3 + a \cdot a^2 + b \cdot a + c = a^3 \quad \text{i} \quad b^3 + a \cdot b^2 + b \cdot b + c = b^3.$$

Oduzimanjem i sređivanjem dobivamo

$$a^3 + ab = ab^2 + b^2 \qquad \text{1 bod}$$
$$(a^2 + ab + b)(a - b) = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Budući da su a i b različiti, slijedi da je $a^2 + ab + b = 0$, odnosno $a^2 = -b(a + 1)$. 1 bod

Primijetimo da $a + 1 \neq 0$, jer bi u suprotnom jedna strana posljednje jednakosti bila jednaka nuli, a druga ne bi. Zato zaključujemo da je

$$b = -\frac{a^2}{a+1} \qquad \text{1 bod}$$
$$= 1 - a - \frac{1}{a+1} \qquad \text{2 boda}$$

Kako su a i b cijeli brojevi, broj $a + 1$ djelitelj je broja 1, odnosno $a = 0$ ili $a = -2$. 1 bod

Ako je $a = 0$, dobivamo da je $b = 0$, no to se suprotstavlja uvjetu zadatka $a \neq b$. Zato mora vrijediti $a = -2$. 1 bod

U ovom slučaju dobivamo $b = 4$, te iz bilo koje od prvih dviju jednadžbi dobivamo $c = 16$. 1 bod

Direktnom provjerom vidimo da ova trojka (a, b, c) zaista zadovoljava uvjete zadatka pa imamo

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 16,$$

odnosno

$$P(1) = 19. \qquad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Iz prvih dviju jednadžbi gornjeg rješenja vidimo da su a i b različita rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. 1 bod

Nužno je $a = 0$ (jer onda jednadžba ne bi imala dva rješenja), pa prema Vieteovoj formuli za zbroj rješenja dobivamo

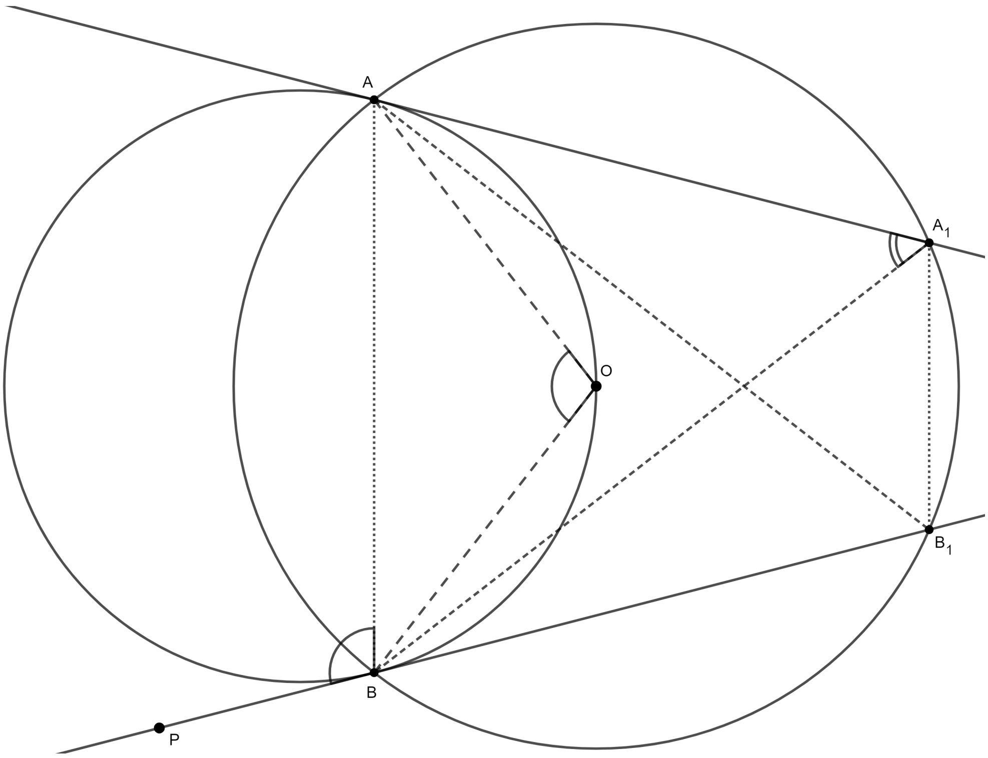
$$-\frac{b}{a} = a + b, \qquad \text{1 bod}$$
$$a^2 + ab + b = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Sada nastavljamo kao u gornjem rješenju. 7 bodova

Zadatak A-4.4.

Dvije kružnice sijeku se u točkama A i B, a pritom manja kružnica prolazi središtem veće. Tangente na manju kružnicu u točkama A i B sijeku veću kružnicu ponovno u točkama A_1 i B_1. Dokaži da je pravac A_1B simetrala kuta $\sphericalangle AA_1B_1$.

Rješenje.



Označimo s O središte veće kružnice.

Četverokut ABB_1A_1 je tetivan jer mu svi vrhovi leže na većoj kružnici, pa vrijedi

$$\sphericalangle AA_1B_1 = 180^\circ - \sphericalangle ABB_1.$$ 2 boda

Kutovi $\sphericalangle AA_1B$ i $\sphericalangle AOB$ redom su obodni i središnji kut nad istom tetivom u većoj kružnici, pa vrijedi

$$\sphericalangle AA_1B = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB.$$ 3 boda

Označimo s P bilo koju točku na pravcu BB_1 takvu da se B nalazi između B_1 i P. Prema kutu između tetive i tangente (u manjoj kružnici), kut $\sphericalangle AOB$ jednak je vanjskom kutu četverokuta ABB_1A_1 pri vrhu B, tj. vrijedi

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ABP = 180^\circ - \sphericalangle ABB_1.$$ 3 boda

Koristeći gornje zaključke, dobivamo

$$\sphericalangle AA_1B = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ABB_1) = \frac{1}{2}\sphericalangle AA_1B_1,$$ 2 boda

odakle zaključujemo da je A_1B zaista simetrala kuta $\sphericalangle AA_1B_1$, što je i trebalo dokazati.

Napomena: Do zaključka $\sphericalangle AOB = 180° - \sphericalangle ABB_1$ može se doći kao u dokazu svojstva kuta između kuta i tangente (uvodeći središte manje kružnice i koristeći da je njezina spojnica s diralištem okomita na tangentu), pa zato i tih 3 boda može biti rastavljeno na parcijalne bodove ako u rješenju postoje elementi tog dokaza.

Zadatak A-4.5.

Nikola je zamislio deveteroznamenkasti broj $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_9}$ u čijem se dekadskom prikazu svaka od znamenaka od 1 do 9 pojavljuje točno jednom. Zatim je izračunao 6 zbrojeva

$$\overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_2a_3a_4}, \quad \overline{a_2a_3a_4} + \overline{a_3a_4a_5}, \quad \overline{a_3a_4a_5} + \overline{a_4a_5a_6},$$
$$\overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_5a_6a_7}, \quad \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_6a_7a_8}, \quad \overline{a_6a_7a_8} + \overline{a_7a_8a_9}$$

i napisao na papir najveći od njih. Koji je najmanji broj koji je mogao zapisati na papir?

Rješenje.

Najmanji takav broj je 882, i postiže se za 716253489. 1 bod

Prvo dokažimo da je broj koji se nalazi na papiru mora biti barem 800. U suprotnom, svi zbrojevi stotica troznamenkastih brojeva $a_1 + a_2, \ldots, a_6 + a_7$ manji su ili jednaki 7. Dakle, vrijedi

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_5 + a_6 \leqslant 6 \cdot 7 = 42.$$

S druge strane,

$$a_1+2a_2+\cdots+2a_6+a_7 = 2(a_2+a_3+\cdots+a_6)+a_1+a_7 \geqslant 2(1+2+3+4+5)+6+7 = 43,$$

čime dobivamo kontradikciju. 1 bod

Nađimo sve deveteroznamenkaste brojeve $n = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_9}$ za koje će rezultat na papiru biti manji od 900.

Ako je neka od znamenki $a_1, \ldots, a_7$ jednaka 8 ili 9, onda će barem jedan od zbrojeva $a_1 + a_2, \ldots, a_6 + a_7$ biti veći ili jednak 9, pa broj na papiru neće biti manji od 900. Dakle, znamenke 8 i 9 moraju se naći na nekom od zadnja dva mjesta, dok se na prvih sedam mjesta nalaze znamenke $1, 2, \ldots, 7$. 1 bod

Promotrimo zbroj $\overline{a_6a_7a_8} + \overline{a_7a_8a_9}$. Za njega vrijedi

$$100(a_6 + a_7) + 10a_7 + 11a_8 + a_9 \geqslant 100(a_6 + a_7) + 10 + 11 \cdot 8 + 9 = 100(a_6 + a_7) + 107.$$

Zato kako bi broj na papiru bio manji od 900, nužno je $a_6 + a_7 \leqslant 7$. 2 boda

Pogledajmo gdje se u broju n nalazi znamenka 7. Jedina znamenka koja s njom daje sumu manju od 9 je znamenka 1. Zato se znamenka 7 ne može nalaziti na mjestima a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Također, ne smije biti ni $a_7 = 7$ jer tada ne bismo imali $a_6 + a_7 \leqslant 7$. Dakle, $a_1 = 7$. 1 bod

Kako bi zadovoljili uvjet $a_1 + a_2 \leqslant 8$, nužno je $a_2 = 1$. 1 bod

Pogledajmo gdje se u broju n nalazi znamenka 6. Uz znamenku 1, jedina znamenka koja s njom daje sumu manju od 9 je znamenka 2. Zato se znamenka 6 ne može nalaziti na mjestima a_4, a_5, a_6 (jer bi barem jedan od njenih susjeda bio prevelik). Također, ne smije biti ni $a_7 = 6$ jer tada ne bismo imali $a_6 + a_7 \leqslant 7$. Dakle, $a_3 = 6$. 1 bod

Analogno zaključujemo da je $a_4 = 2$, a zatim istim načinom redom $a_5 = 5$, $a_4 = 3$ i $a_3 = 4$. 1 bod

Zaključujemo da samo dva deveteroznamenkasta broja mogu rezultirati konačnim brojem na papiru koji bi bio manji od 900: to su 716253489 i 716253498. Direktnom provjerom uvjeravamo se da je prvom od njih broj na papiru jednak 882, a drugom 883, pa dolazimo do zaključka s početka rješenja. 1 bod

Napomena: Algebarski se može doakzati da ako su zadnje dvije znamenke broja n jednake 8 i 9 u nekom poretku, da će tada broj na papiru biti manji ako je 9 znamenka jedinica tog broja. Ta tvrdnja ne nosi bodove.

Zadnji bod bodovne sheme odgovara provjeri svih 6 zbrojeva troznamenkastih brojeva za dobivene mogućnosti za n.