

#### 4. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 18. veljače 2023.

1. Odredi sve funkcije  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  takve da za sve  $x, y \in \mathbb{Z}$  vrijedi

$$f(xy + f(y)) = f(x)f(y) + y.$$

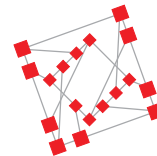
2. Neka je  $n$  prirodan broj. Na jezeru se nalazi  $2n$  lopoča označenih brojevima  $1, 2, \dots, 2n$ . Žabe skaču po lopočima tako da svaka žaba kreće s lopoča označenog brojem 1, pri svakom skoku skače na lopoč s većim brojem od onog na kojem se trenutno nalazi, te završava na lopoču označenom brojem  $2n$ . Odredi najmanji broj žaba za koji je moguće da za svaki par  $(i, j)$  takav da je  $1 \leq i < j \leq 2n$  postoji žaba koja je skočila izravno s lopoča označenog s  $i$  na lopoč označen s  $j$ .
3. Neka je  $ABC$  tupokutan trokut s tupim kutom pri vrhu  $B$ . Neka su  $D, E, F$  redom nožišta visina iz vrhova  $A, B, C$ . Neka su  $T$  i  $S$  redom polovišta dužina  $\overline{AD}$  i  $\overline{CF}$ . Neka su  $M$  i  $N$  redom točke osnosimetrične točki  $T$  u odnosu na pravce  $BE$  i  $BD$ . Dokaži da točka  $S$  leži na kružnici opisanoj trokutu  $BMN$ .
4. Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje postoje različiti djelitelji  $a$  i  $b$  od  $n$  takvi da između njih nema drugih djelitelja od  $n$  i da vrijedi

$$n = a^2 - b.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.



#### 4. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 19. veljače 2023.

1. Neka su  $a, b, c, d$  pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$ab + cd = (a + b)(c + d).$$

Dokaži da među četiri trojke  $(a, b, c)$ ,  $(a, b, d)$ ,  $(a, c, d)$ ,  $(b, c, d)$  postoje barem dvije koje ne mogu biti duljine stranica trokuta.

2. U ravnini je dana kružnica  $k$ . Za svaki  $i$ ,  $1 \leq i \leq 121$ , pravac  $p_i$  siječe  $k$  u dvije točke, te je na tetivi određenoj tim dvjema točkama dana točka  $A_i$ .

Dokažite da na  $k$  postoji točka  $X$  takva da je za barem 29 indeksa  $i$ ,  $1 \leq i \leq 121$ , kut između pravaca  $A_iX$  i  $p_i$  manji ili jednak  $21^\circ$ .

3. Neka je  $ABC$  raznostraničan šiljastokutan trokut. Na pravcu  $BC$  dane su točke  $P$  i  $Q$ , pri čemu  $P, B, C, Q$  leže na pravcu u tom poretku i vrijedi  $|AB| = |BP|$  i  $|AC| = |CQ|$ . Neka je  $J$  sjecište simetrala kutova  $\sphericalangle ABP$  i  $\sphericalangle ACQ$ , te neka su  $D$  i  $E$  redom nožišta okomica iz točke  $J$  na pravce  $AB$  i  $AC$ . Pravci  $DP$  i  $EQ$  se sijeku u točki  $F$ , koja nije ni na dužini  $\overline{PD}$  ni na dužini  $\overline{QE}$ .

Dokaži da je  $\sphericalangle AFJ = 90^\circ$ .

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(a, b)$  za koje postoje prirodni brojevi  $x, y$  i  $z$  takvi da vrijedi

$$a^x = (a + b)^y = (5a + 11b)^z.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.