Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

4. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 18. veljače 2023.

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$f(xy + f(y)) = f(x)f(y) + y.$$

2. Neka je n prirodan broj. Na jezeru se nalazi $2n$ lopoča označenih brojevima $1, 2, \ldots, 2n$. Žabe skaču po lopočima tako da svaka žaba kreće s lopoča označenog brojem 1, pri svakom skoku skače na lopoč s većim brojem od onog na kojem se trenutno nalazi, te završava na lopoču označenom brojem $2n$. Odredi najmanji broj žaba za koji je moguće da za svaki par (i, j) takav da je $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$ postoji žaba koja je skočila izravno s lopoča označenog s i na lopoč označen s j.

3. Neka je ABC tupokutan trokut s tupim kutom pri vrhu B. Neka su D, E, F redom nožišta visina iz vrhova A, B, C. Neka su T i S redom polovišta dužina $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$. Neka su M i N redom točke osnosimetrične točki T u odnosu na pravce BE i BD. Dokaži da točka S leži na kružnici opisanoj trokutu BMN.

4. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje različiti djelitelji a i b od n takvi da između njih nema drugih djelitelja od n i da vrijedi

$$n = a^2 - b.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

4. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 19. veljače 2023.

1. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$ab + cd = (a + b)(c + d).$$

Dokaži da među četiri trojke $(a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d)$ postoje barem dvije koje ne mogu biti duljine stranica trokuta.

2. U ravnini je dana kružnica k. Za svaki i, $1 \leqslant i \leqslant 121$, pravac p_i siječe k u dvije točke, te je na tetivi određenoj tim dvjema točkama dana točka A_i.

Dokažite da na k postoji točka X takva da je za barem 29 indeksa i, $1 \leqslant i \leqslant 121$, kut između pravaca A_iX i p_i manji ili jednak $21°$.

3. Neka je ABC raznostraničan šiljastokutan trokut. Na pravcu BC dane su točke P i Q, pri čemu P, B, C, Q leže na pravcu u tom poretku i vrijedi $|AB| = |BP|$ i $|AC| = |CQ|$. Neka je J sjecište simetrala kutova $\sphericalangle ABP$ i $\sphericalangle ACQ$, te neka su D i E redom nožišta okomica iz točke J na pravce AB i AC. Pravci DP i EQ se sijeku u točki F, koja nije ni na dužini $\overline{PD}$ ni na dužini $\overline{QE}$.

Dokaži da je $\sphericalangle AFJ = 90°$.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje postoje prirodni brojevi x, y i z takvi da vrijedi

$$a^x = (a + b)^y = (5a + 11b)^z.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.