4. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 18. veljače 2023.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$f(xy + f(y)) = f(x)f(y) + y.$$

Prvo rješenje.

Uvrstimo $y = 0$ u početni izraz i dobijemo da za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$f(f(0)) = f(x)f(0).$$

Ako je $f(0) \neq 0$, to znači da je $f(x) = \frac{f(f(0))}{f(0)}$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$. Ali onda je lijeva strana u početnom izrazu za sve $x, y \in \mathbb{Z}$ jednaka $\frac{f(f(0))}{f(0)}$, a desna strana je $\frac{f(f(0))^2}{f(0)^2} + y$. Kako je nemoguće da za svaki $y \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\frac{f(f(0))}{f(0)} = \frac{f(f(0))^2}{f(0)^2} + y$, zaključujemo da mora biti $f(0) = 0$.

Uvrstimo sada $y = 1$ u početni izraz. Dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$f(x + f(1)) = f(x)f(1) + 1. \tag{1}$$

Posebno, za $x = -f(1)$, koristeći $f(0) = 0$, dobivamo $0 = f(-f(1))f(1) + 1$, odnosno

$$f(-f(1))f(1) = -1.$$

Kako su $f(1)$ i $f(-f(1))$ cijeli brojevi, zaključujemo da vrijedi $f(1) = 1$ ili $f(1) = -1$.

Ako je $f(1) = 1$, onda iz (1) dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(x + 1) = f(x) + 1$. Slijedi da iz $f(x) = x$ slijedi $f(x + 1) = x + 1$ i $f(x - 1) = x - 1$, pa kako je $f(0) = 0$ matematičkom indukcijom zaključujemo da vrijedi $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$. Lako se provjeri da ta funkcija zadovoljava početni uvjet.

Ako je $f(1) = -1$, onda je $f(-f(1)) = 1$. Međutim, korištenjem $f(1) = -1$, dobivamo $f(-f(1)) = f(-(-1)) = f(1) = -1$, što je kontradikcija.

Drugo rješenje.

Na isti način kao u prvom rješenju dobivamo da vrijedi $f(0) = 0$.

Uvrštavanjem $x = 0$ u početnu jednadžbu dobivamo da vrijedi $f(f(y)) = y$ za sve $y \in \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da je f bijekcija.

Uvrstimo $y = 1$ u početni izraz, i dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$f(x + f(1)) = f(x)f(1) + 1. \tag{2}$$

Kako x varira po skupu cijelih brojeva, tako $x + f(1)$ također poprima sve cjelobrojne vrijednosti, pa isto vrijedi i za $f(x + f(1))$ jer je f bijekcija. S druge strane, izraz na desnoj strani poprima samo one cjelobrojne vrijednosti koje daju ostatak 1 pri dijeljenju s $f(1)$. To znači da svaki cijeli broj daje ostatak 1 pri dijeljenju s $f(1)$, što je jedino moguće ako je $f(1) = 1$ ili $f(1) = -1$.

Ako je $f(1) = 1$, onda iz (2) kao i u prvom rješenju slijedi da je $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$, i analogno zaključujemo da ta funkcija jest rješenje.

Ako je $f(1) = -1$, onda iz (2) dobivamo da vrijedi $f(x-1) = 1-f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$. Posebno, za $x = 1$ dobivamo $f(0) = 1 - f(1)$. Međutim, $f(0) = 0$ i $f(1) = -1$, pa dobivamo $0 = -2$, što je kontradikcija.

Zadatak 2.

Neka je n prirodan broj. Na jezeru se nalazi $2n$ lopoča označenih brojevima $1, 2, \ldots, 2n$. Žabe skaču po lopočima tako da svaka žaba kreće s lopoča označenog brojem 1, pri svakom skoku skače na lopoč s većim brojem od onog na kojem se trenutno nalazi, te završava na lopoču označenom brojem $2n$. Odredi najmanji broj žaba za koji je moguće da za svaki par (i, j) takav da je $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$ postoji žaba koja je skočila izravno s lopoča označenog s i na lopoč označen s j.

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da je odgovor n^2.

Promotrimo parove lopoča (i, j), gdje je $1 \leqslant i \leqslant n < j \leqslant 2n$. Takve parove ćemo zvati *mosnima*. Mosnih parova ima n^2.

Primijetimo da ako su (i_1, j_1) i (i_2, j_2) različiti mosni parovi lopoča, onda nije moguće da je neka žaba skočila izravno sa i_1 na j_1 te izravno sa i_2 na j_2. Zaključujemo da je broj potrebnih žaba barem n^2 jer svakom mosnom paru možemo pridružiti žabu koja je skočila izravno s jednog na drugi vrh tog para.

Sada matematičkom indukcijom za svaki prirodan broj n konstruiramo skokove za n^2 žaba tako da je zadovoljen uvjet zadatka.

Za $n = 1$, uzmemo jednu žabu koja skače s lopoča 1 na 2.

Pretpostavimo da je za neki prirodan broj n dovoljno n^2 žaba.

Promotrimo sada lopoče $1, 2, \ldots, 2n+2$. Uzmimo da $2n+1$ žaba, numeriranih s $1, 2, \ldots, 2n+1$ skače po njima na sljedeći način:

Žaba 1 skače s lopoča 1 direktno na $2n + 2$.

Za $j \in \{2, \ldots, 2n + 1\}$, žaba j skače s lopoča 1 na lopoč j, pa s lopoča j na lopoč $2n + 2$.

Time smo pokrili sve parove (i, j) za koje je $i = 1$ ili $j = 2n+2$, pa te lopoče možemo zanemariti, i možemo pretpostaviti da je prvi skok preostalih žaba s lopoča 1 na lopoč 2, te zadnji skok s lopoča $2n + 1$ na lopoč $2n + 2$.

Primijetimo da je preostalo $2n$ lopoča koji su numerirani s $2, 3, \ldots, 2n + 1$. Po pretpostavci matematičke indukcije, za taj niz lopoča moguće je naći n^2 žaba koji počinju svoje skakanje u točki 2, završavaju skakanje u točki $2n + 1$, te za svaki par (i, j) za koji je $2 \leqslant i < j \leqslant 2n + 1$ postoji žaba koja je skočila izravno s i na j.

Ako uzmemo tih n^2 žaba zajedno s $2n + 1$ žaba čija smo skakanja ranije opisali, dobivamo $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ žaba, čime je korak indukcije dokazan.

Drugo rješenje.

Promotrimo sljedeći uređaj na svim parovima (i,j), gdje je $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$: kažemo da je par (i_1, j_1) manji od para (i_2, j_2) ako je $j_1 \leqslant i_2$. Kažemo da su dva para *usporedivi* ako je jedan od njih manji od drugog od njih.

Za žabu kažemo da *pokriva* neki par (i,j) ako skače izravno s i na j.

Primijetimo da ako žaba pokriva par (i_1, j_1) i (i_2, j_2), onda je $j_1 \leqslant i_2$ ili $i_1 \leqslant j_2$. Drugim riječima, svaka žaba može pokriti samo usporedive parove lopoča.

Lanac je bilo koji skup parova lopoča takav da su svaka dva usporediva. *Antilanac* je bilo koji skup parova lopoča takav da nikoja dva nisu usporediva.

U zadatku se traži najmanji mogući broj lopoča koji pokriva cijeli skup parova (i,j) sa $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$. Prema Dilworthovom teoremu, taj broj je jednak najvećem antilancu u skupu.

Dakle, treba dokazati da je najveći antilanac veličine n^2.

Za početak, skup $\{(i,j) : i \leqslant n, j > n\}$ je antilanac, i veličine je n^2.

Neka je A neki drugi antilanac. Promotrimo par (i,j) iz lanca takav da je j najmanji mogući, i par (k,ℓ) iz lanca takav da je k najveći mogući.

Tada mora vrijediti $j > k$, te nadalje svaki par iz lanca ima prvu komponentu manju ili jednaku k, a drugu komponentu veću ili jednaku j.

Parova (u,v) za koje je $u \leqslant k$ i $v \geqslant j$ ima

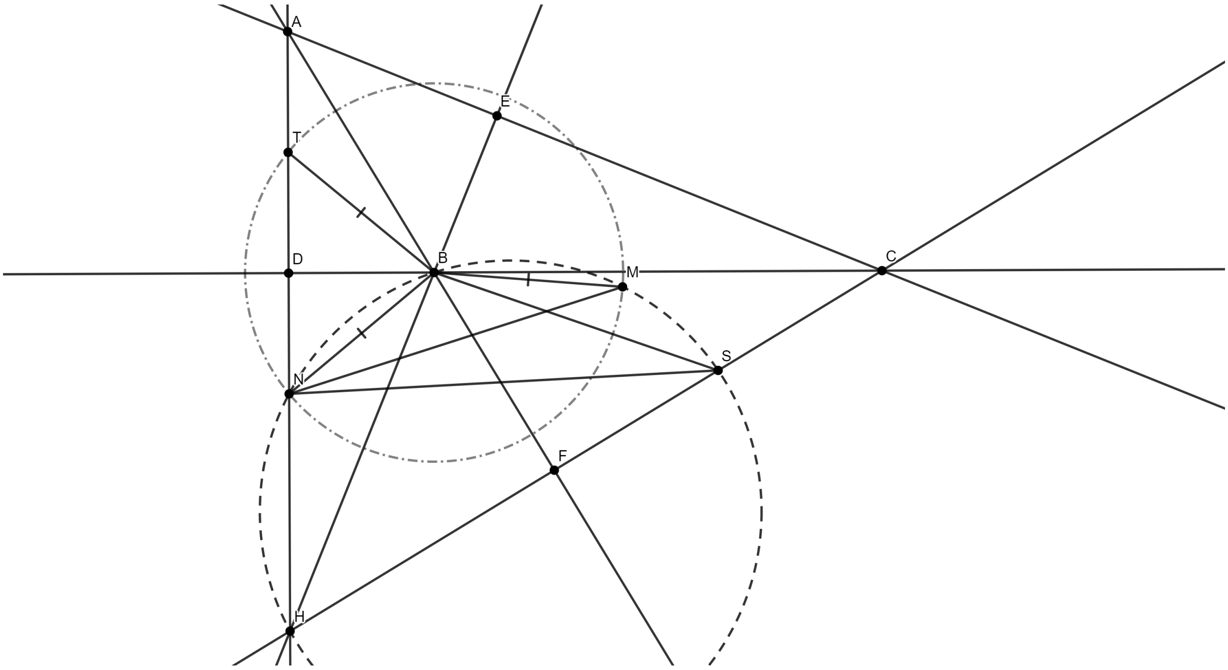
$$k(2n+1-j) \leqslant k(2n+1-k-1) \leqslant \left(\frac{k+2n-k}{2}\right)^2 = n^2,$$

gdje prva nejednakost slijedi iz $j > k$, a druga iz A–G nejednakosti. Zaključujemo da A ima najviše n^2 elemenata, pa je tvrdnja dokazana.

Zadatak 3.

Neka je ABC tupokutan trokut s tupim kutom pri vrhu B. Neka su D, E, F redom nožišta visina iz vrhova A, B, C. Neka su T i S redom polovišta dužina $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$. Neka su M i N redom točke osnosimetrične točki T u odnosu na pravce BE i BD. Dokaži da točka S leži na kružnici opisanoj trokutu BMN.

Prvo rješenje.



Označimo s H ortocentar trokuta ABC.

Primijetimo da po definiciji točaka M i N vrijedi $|BN| = |BT|$ i $|BM| = |BT|$, pa je B središte opisane kružnice od TNM. Iz toga slijedi da je $\sphericalangle NBM = 2\sphericalangle NTM$. Nadalje, kako su TM i AC okomiti na BE, slijedi da su paralelni, pa je

$$\sphericalangle NTM = \sphericalangle NAC = \sphericalangle HAE.$$

Nadalje, kako su trokuti HBD i HAE slični jer su pravokutni i imaju zajednički kut, imamo $\sphericalangle HAE = \sphericalangle HBD$. Zbog vršnih kuteva imamo $\sphericalangle HBD = \sphericalangle EBC = 90^\circ - BCA$. Dakle, $\sphericalangle NBM = 2(90^\circ - \sphericalangle BCA) = 180 - 2\sphericalangle BCA$. Kako je NBM jednakokračan, zaključujemo da je

$$\sphericalangle BMN = \sphericalangle BCA.$$

Nadalje, primijetimo da je

$$\sphericalangle BHN = \sphericalangle AHE = 90^\circ - HAE = 90^\circ - \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCA,$$

pa je $\sphericalangle BHN = \sphericalangle BMN$, pa zaključujemo da je četverokut $HNBM$ tetivan.

Dakle, dovoljno je dokazati da je četverokut $HNBS$ također tetivan.

Trokuti BDT i BDN su sukladni, a trokuti BDA i BFC su slični jer su pravokutni i imaju zajednički kut. Onda su i trokuti BFS i BDT slični jer su BT i BS težišnice iz pripadnih vrhova u sličnim trokutima BDA, BFC.

Onda je

$$\sphericalangle HNB = 180^\circ - \sphericalangle DNB = 180^\circ - \sphericalangle DTB = 180^\circ - \sphericalangle FSB = 180^\circ - \sphericalangle HSB,$$

gdje druga jednakost slijedi iz sukladnosti BDN i BDT, a treća iz sličnosti BDT i BFS.

Dakle, $HNBS$ je tetivan, pa je tvrdnja dokazana.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, označimo s H ortocentar trokuta ABC, te dokažemo $\sphericalangle NTM = \sphericalangle NAC = \sphericalangle HAE$ i $\sphericalangle NMB = \sphericalangle BCA$. Da bismo dokazali da je četverokut $NBMS$ tetivan, dovoljno je dokazati da vrijedi $\sphericalangle NSB = \sphericalangle BCA$.

Dokazat ćemo da su trokuti ABC i NBS slični. Primijetimo da su trokuti ADB i BFC slični jer su pravokutni i imaju zajednički kut. Kako su BT i BS težišnice u tim trokutima, slijedi da vrijede i sličnosti trokuta $BTA \sim BSC$ te $BTD \sim BSF$. Također primijetimo da su trokuti BDN i BDT sukladni.

Onda je

$$\frac{|BN|}{|BS|} = \frac{|BT|}{|BS|} = \frac{|BA|}{|BC|},$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz $BTA \sim BSC$.

Nadalje,

$$\sphericalangle NBS = 180^\circ - \sphericalangle SBC - \sphericalangle NBD = 180^\circ - \sphericalangle TBA - \sphericalangle TBD = \sphericalangle ABC,$$

gdje smo koristili jednakosti $\sphericalangle SBC = \sphericalangle TBA$ i $\sphericalangle NBD = \sphericalangle TBD$, koje vrijede zbog sličnosti trokuta SBC i TBA te sukladnosti trokuta BTD i BND.

Dakle, po SKS poučku su trokuti NBS i ABC slični, pa je $\sphericalangle NSB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle NMB$.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje različiti djelitelji a i b od n takvi da između njih nema drugih djelitelja od n i da vrijedi

$$n = a^2 - b.$$

Prvo rješenje.

Neka su n, a, b brojevi koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

Kako $a \mid n$ i $a \mid a^2$, mora vrijediti $a \mid b$, odnosno $b = ma$ za neki prirodan broj $m > 1$. Kako $b = ma \mid n$, možemo pisati $n = kma$ za neki prirodan broj k. Iz uvjeta znamo da između a i ma nema djelitelja od kma.

Jednadžba u novim varijablama glasi

$$kma = a^2 - ma,$$

iz čega slijedi $a = (k+1)m$, pa je $n = k(k+1)m^2$.

Iz toga da su a i b uzastopni djelitelji slijedi da između $(k+1)m$ i $(k+1)m^2$ nema djelitelja od $k(k+1)m^2$. To znači da je djelitelj km^2 ili manji ili jednak $(k+1)m$ ili veći ili jednak $(k+1)m^2$. Druga opcija je očito nemoguća, pa zaključujemo

$$km^2 \leqslant (k+1)m,$$

odnosno $km \leqslant k+1$. Ali $km \geqslant 2k$, pa je $2k \leqslant k+1$, te je nužno $k = 1$ i $m^2 \leqslant 2m$, tj. $m = 2$.

Slijedi da mora biti $n = 1 \cdot (1+1) \cdot 2^2 = 8$, $a = 4$ i $b = 8$. Očito su 4 i 8 uzastopni djelitelji od 8, pa zaključujemo da je $n = 8$ jedino rješenje.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju dobijemo da je $b = ma$ za neki prirodan broj $m > 1$. Jednadžba postaje

$$n = a(a - m).$$

Pretpostavimo da je n neparan. Tada su a i b također neparni kao njegovi djelitelji, pa je $a^2 - b$ paran, kontradikcija. Dakle, n je paran.

Ako je a neparan, onda je $2a$ djelitelj od n, ali n nema djelitelja između a i ma, pa zaključujemo da mora biti $m = 2$ i $n = a(a - 2)$. Međutim, onda je desna strana neparna, kontradikcija. Dakle, a je paran.

Kako je a paran, onda je i $b = ma$ paran, pa je $b/2 = ma/2$ djelitelj od n. Ali $ma/2$ ne smije biti između a i ma, pa zaključujemo da mora vrijediti $m = 2$, i $n = a(a - 2)$, te je a paran.

Ali onda je $2(a - 2)$ djelitelj od n. Kako je $2(a - 2) < 2a = b$, mora biti $2(a - 2) \leqslant a$, odnosno $a \leqslant 4$. Preostaje provjeriti slučajeve $a = 2$ i $a = 4$.

Ako je $a = 2$, onda je $b = 2a = 4$ i $n = 0$, kontradikcija.

Ako je $a = 4$, onda je $b = 8$ i dobivamo $n = 8$, što je stvarno rješenje jer su 4 i 8 očito uzastopni djelitelji od 8.

Treće rješenje.

Iz jednadžbe vidimo da a dijeli b jer dijeli a^2 i n, pa je $a < b$.

Uzmimo brojeve k i ℓ takve da $ak = b\ell = n$. Tada je $k > \ell$, te su k i ℓ također uzastopni djelitelji od n, jer ako bi između njih bio neki djelitelj d, onda bi n/d bio između a i b.

Sada imamo $n = \frac{n^2}{k^2} - \frac{n}{\ell}$, iz čega slijedi $1 = \frac{n}{k^2} - \frac{1}{\ell}$, odnosno

$$\ell n = k^2(1 + \ell).$$

Međutim, kako su ℓ i $\ell + l$ relativno prosti vrijedi $\ell + 1 \mid n$. Budući da je $k > \ell$ i k, ℓ su uzastopni djelitelji od n, zaključujemo da vrijedi $k = 1 + \ell$ i

$$\ell n = (1 + \ell)^3.$$

Kako su ℓ i $\ell + 1$ relativno prosti, zaključujemo da mora vrijediti $\ell = 1$, pa iz toga slijedi $n = 8$, te je $a = 8/2 = 4$, $b = 8/1 = 8$.

4. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 19. veljače 2023.

Zadatak 1.

Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$ab + cd = (a + b)(c + d).$$

Dokaži da među četiri trojke $(a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d)$ postoje barem dvije koje ne mogu biti duljine stranica trokuta.

Prvo rješenje.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ jer u suprotnom samo preimenujemo te brojeve. Nadalje, možemo pretpostaviti i $a \leqslant c$, jer u suprotnom samo zamijenimo uloge parova (a, b) i (c, d).

Dovoljno je dokazati da je $c \geqslant a + b$, jer je onda pogotovo i $d \geqslant a + b$. Pretpostavimo suprotno, da je $c < a + b$. Slijedi $(a + b)(c + d) = ab + cd < ab + (a + b)d$, iz čega slijedi $(a + b)c < ab$.

S druge strane, $ab < a(a+b) \leqslant (a+b)c$, pa imamo kontradikciju. Dakle, trojke (a, b, c) i (a, b, d) ne mogu biti duljine stranica trokuta.

Drugo rješenje.

Bez smanjenja općenitosti, neka je a najveći među brojevima. Tada je

$$a(b - (c + d)) = bc + bd - cd.$$

Tvrdimo da je $b \geqslant c + d$. Ako je $b = c + d$, gotovi smo. Inače možemo podijeliti s $b - (c + d)$ i imamo

$$a = \frac{bc + bd - cd}{b - (c + d)} = \frac{bc + d(b - (c + d)) + d^2}{b - (c + d)} = d + \frac{bc + d^2}{b - (c + d)}.$$

Kako je $a \geqslant d$, dobivamo da je

$$\frac{bc + d^2}{b - (c + d)} \geqslant 0,$$

pa kako je brojnik pozitivan, mora biti i nazivnik, pa je tvrdnja dokazana.

Dakle, $b \geqslant c + d$, pa je i $a \geqslant c + d$, pa (a, c, d) i (b, c, d) nisu duljine stranica trokuta.

Treće rješenje.

Bez smanjenja općenitosti neka je $a+b \geqslant c+d$. Dokazat ćemo da je $a > c+d$ i $b > c+d$. Bez smanjenja općenitosti neka je $a \geqslant b$.

Pretpostavimo da je $a \leqslant c+d$. Uvjet možemo zapisati kao $b(c+d-a) = cd - a(c+d)$. Lijeva strana je po pretpostavci nenegativna, pa je $cd \geqslant a(c+d)$, ali onda zbog nejednakosti $(x+y)^2 \geqslant 4xy$ vrijedi $a \leqslant \frac{c+d}{4}$. Kako je $b \leqslant a$, vrijedi i $b \leqslant \frac{c+d}{4}$, pa je $a+b \leqslant \frac{c+d}{2}$, kontradikcija. Dakle, $a > c+d$.

Pretpostavimo sada da je $b \leqslant c+d$. Imamo $a(c+d-b) = cd - b(c+d)$. Kao i prije, zaključujemo da je $b \leqslant \frac{c+d}{4}$ pa je lijeva strana veća ili jednaka

$$(c+d)\left(\frac{3(c+d)}{4}\right).$$

Međutim, prema AG nejednakosti je taj izraz veći ili jednak $3cd$, pa je svakako veći i od $cd - b(c+d)$, kontradikcija. Dakle, $b > c+d$ i $a > c+d$, pa trojke (a,c,d) i (b,c,d) ne mogu biti duljine stranica trokuta.

Četvrto rješenje.

Pretpostavimo prvo da sve trojke čine stranice nekog trokuta. Imamo da je tada

$$(a+b)(c+d) = ab + cd < a(a+b) + (a+b)d = (a+b)(a+d).$$

Iz gornje nejednakosti slijedi da je $c < a$. Međutim, također imamo da je

$$(a+b)(c+d) = ab + cd < (c+d)b + c(c+d) = (b+c)(c+d)$$

iz čega slijedi da je $a < c$ što daje kontradikciju. Dakle, barem jedna trojka ne čini stranice trokuta. Bez smanjenja općenitosti neka je to trojka $(a,\ b,\ c)$.

Pretpostavimo da ostale trojke čine stranice trokuta. Tada imamo:

$$(a+b)(c+d) = ab + cd < a(a+b) + c(a+b) = (a+c)(a+b)$$

iz čega slijedi $d < a$. Analogno je i

$$(a+b)(c+d) = ab + cd < (c+d)b + (c+d)d = (b+d)(c+d)$$

iz čega slijedi da je $a < d$ što ponovo daje kontradikciju. Dakle, barem dvije trojke ne čine stranice trokuta.

Peto rješenje.

Bez smanjenja općenitosti neka je a najveći broj među a,b,c,d.

Primijetimo da vrijedi

$$[a-(c+d)][b-(c+d)] = ab - (a+b)(c+d) + (c+d)^2 = c^2 + cd + d^2 > c(c+d) > 0,$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili uvjet zadatka. Vidimo da su onda $a-(c+d)$ i $b-(c+d)$ istog predznaka. Tvrdimo da su oba ta broja pozitivni.

Kako je a najveći broj, vrijedi $[a-(c+d)] > -c$, a vrijedi i $[b-(c+d)] > -(c+d)$. Ako je $a \leqslant c+d$ i $b \leqslant c+d$, onda slijedi $(a-(c+d))(b-(c+d)) < c(c+d)$, kontradikcija s prijašnjim zaključkom. Zaključujemo da je $a > c+d$ i $b > c+d$, pa trojke (a,c,d) i (b,c,d) ne mogu biti stranice trokuta.

Zadatak 2.

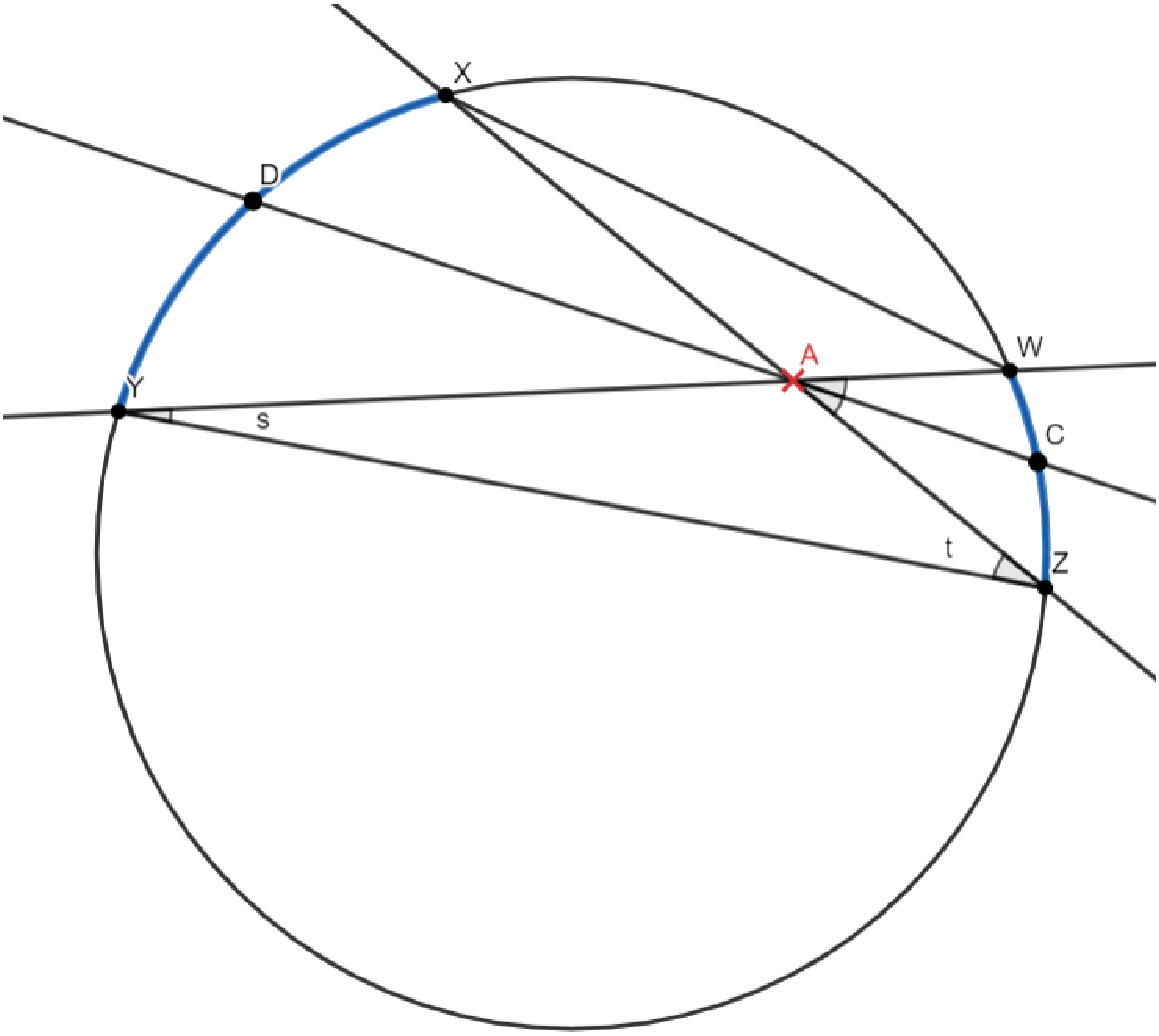
U ravnini je dana kružnica k. Za svaki i, $1 \leqslant i \leqslant 121$, pravac p_i siječe k u dvije točke, te je na tetivi određenoj tim dvjema točkama dana točka A_i.

Dokažite da na k postoji točka X takva da je za barem 29 indeksa i, $1 \leqslant i \leqslant 121$, kut između pravaca $A_i X$ i p_i manji ili jednak $21°$.

Rješenje.

Neka je $\overline{CD}$ tetiva na k, te neka je A istaknuta točka na $\overline{CD}$.

Povucimo kroz točku A pravce koji zatvaraju kut $21°$ s pravcem CD. Tada je skup svih točaka X za koje je kut između AX i CD manji ili jednak $21°$ unija dva kružna luka $\widehat{XY}$ i $\widehat{ZW}$ koji su označeni na skici.



Tvrdimo da je zbroj duljina lukova $\widehat{XY}$ i $\widehat{ZW}$ jednak $\frac{84}{360}\mathcal{O}$, gdje je $\mathcal{O}$ opseg od k.

Neka je s obodni kut nad tetivom $\overline{WZ}$ i t obodni kut nad tetivom $\overline{XY}$. Tada je kut $s+t$ jednak vanjskom kutu pri vrhu A u trokutu YAZ, a taj kut je jednak $42°$. Zaključujemo da je $s+t=42°$, a kako duljina kružnog luka čiji obodni kut je x iznosi $\frac{2x}{360}\mathcal{O}$, tvrdnja slijedi.

Za tetivu određenu pravcem p_i, označimo s S_i skup točaka X na kružnici za koje XA_i zatvara kut manji ili jednak $21°$ sa p_i. Dokazali smo da je svaki S_i unija dva luka čiji zbroj duljina je $\frac{84}{360}\mathcal{O}$.

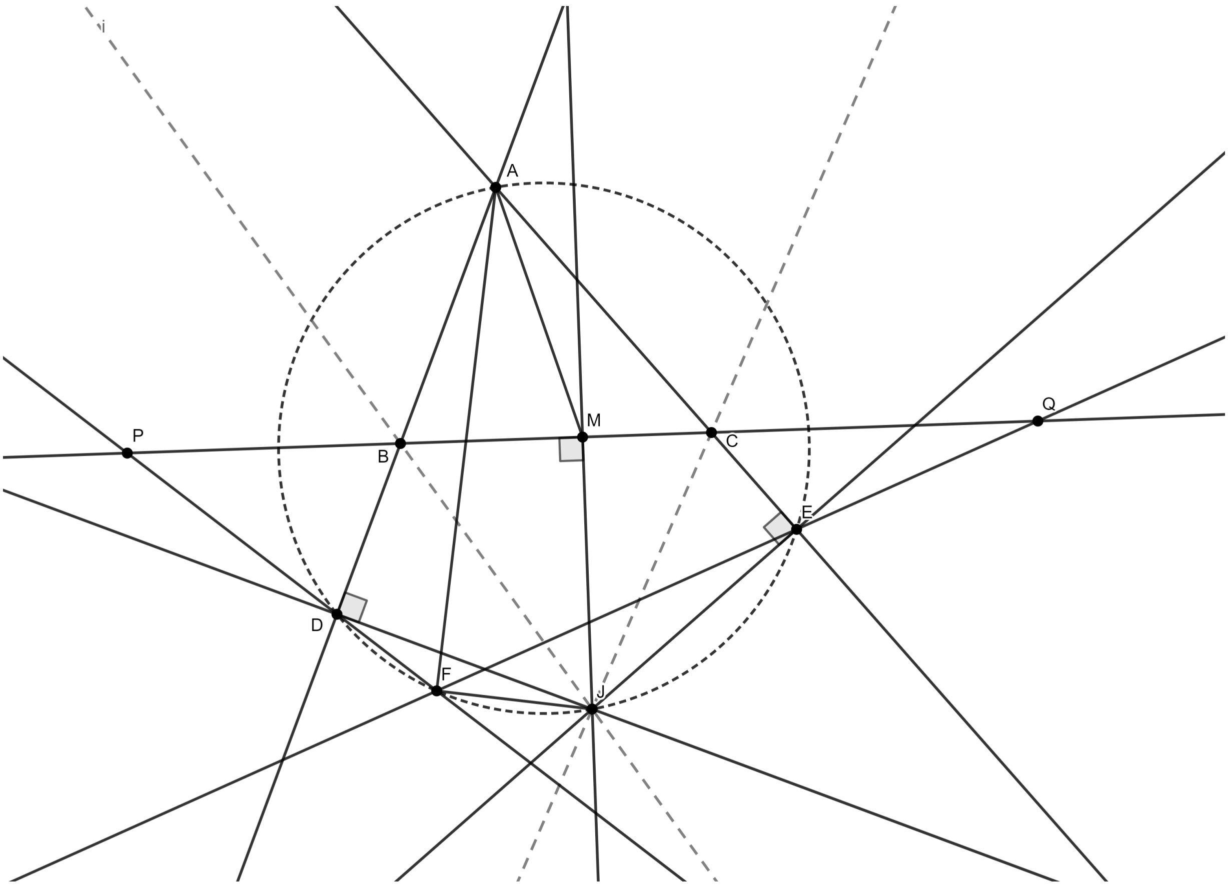
Pretpostavimo suprotno, da ne postoji točka X sa traženim svojstvom. Tada svaka točka kružnice leži u najviše 28 skupova S_i. Tada je zbroj duljina skupova S_i manji ili jednak $28\mathcal{O}$. S druge strane, znamo da je zbroj duljina skupova S_i jednak $121 \cdot \frac{84}{360}\mathcal{O} > 28\mathcal{O}$, pa smo došli do kontradikcije.

Zadatak 3.

Neka je ABC raznostraničan šiljastokutan trokut. Na pravcu BC dane su točke P i Q, pri čemu P, B, C, Q leže na pravcu u tom poretku i vrijedi $|AB| = |BP|$ i $|AC| = |CQ|$. Neka je J sjecište simetrala kutova $\sphericalangle ABP$ i $\sphericalangle ACQ$, te neka su D i E redom nožišta okomica iz točke J na pravce AB i AC. Pravci DP i EQ se sijeku u točki F, koja nije ni na dužini $\overline{PD}$ ni na dužini $\overline{QE}$.

Dokaži da je $\sphericalangle AFJ = 90°$.

Rješenje.



Primijetimo da točke D i E prema Talesovom poučku leže na kružnici s promjerom $\overline{AJ}$. Zbog Talesovog poučka, dovoljno je dokazati da točka F također leži na toj kružnici.

Označimo sa M nožište okomice iz točke J na stranicu $\overline{BC}$.

Kako je BJ simetrala kuta između pravaca AB i BC, a CJ simetrala kuta između pravaca AC i BC, točka J je jednako udaljena od AB, AC i BC, pa vrijedi $|JM| = |JD| = |JE|$. Onda su pravokutni trokuti BDJ i BMJ sukladni jer imaju zajedničku hipotenuzu i pripadne katete $\overline{DJ}, \overline{DM}$ su im jednake duljine, pa je $|BD| = |BM|$. Analogno zaključujemo da vrijedi $|CE| = |CM|$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $|PB| = |AB|$, a upravo smo dokazali $|BD| = |BM|$, pa kako je $\sphericalangle PBD = \sphericalangle ABM$, prema poučku S-K-S zaključujemo da su trokuti PBD i ABM sukladni. Iz toga slijedi $|PD| = |AM|$. Potpuno analogno zaključujemo da su trokuti QCE i ACM sukladni, te vrijedi $|QE| = |AM|$. Dakle, vrijedi i $|PD| = |QE|$.

Zbog $|JD| = |JE|$ vrijedi da je J na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$, pa vrijedi $|AD| = |AE|$. Ali $|AD| = |AB| + |BD| = |PB| + |BM| = |PM|$, te $|AE| = |AC| + |CE| = |QC| + |CM| = |QM|$, pa je $|PM| = |QM|$. Iz toga slijedi da je MJ simetrala dužine $\overline{PQ}$, pa je $|PJ| = |QJ|$.

Dakle, dokazali smo $|PD| = |QE|$ i $|PJ| = |QJ|$, a otprije znamo $|JD| = |JE|$, pa su prema poučku S-S-S trokuti PDJ i QEJ sukladni.

Onda je

$$\sphericalangle FDJ = 180^\circ - \sphericalangle PDJ = 180^\circ - \sphericalangle QEJ = \sphericalangle FEJ.$$

Dakle, četverokut $FDJE$ je tetivan, pa F leži na kružnici s promjerom $\overline{AJ}$, pa je $\sphericalangle AFJ = 90^\circ$.

Napomena. Točka J je središte pripisane kružnice o odnosu na vrh A u trokutu ABC, pa se svojstva $|BD| = |BM|$, $|CE| = |CM|$ i $|AD| = |AE|$ mogu ustanoviti i pozivanjem na poznate činjenice o pripisanim kružnicama.

Zadatak 4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje postoje prirodni brojevi x, y i z takvi da vrijedi

$$a^x = (a + b)^y = (5a + 11b)^z.$$

Prvo rješenje.

Neka su a i b brojevi za koje postoje x, y, z s traženim svojstvom. Primijetimo da vrijedi $x > y > z$ jer je $a < a + b < 5a + 11b$.

Kroz oba rješenja ćemo koristiti sljedeću oznaku. Za prost broj p i prirodan broj n, $\nu_p(n)$ je najveći cijeli broj $a \geqslant 0$ takav da $p^a \mid n$.

Dokažimo da vrijedi niz djeljivosti $a \mid a + b \mid 5a + 11b$.
Naime, neka je p prost broj koji dijeli a, $a + b$ ili $5a + 11b$, te neka su redom $\alpha = \nu_p(a)$, $\beta = \nu_p(a + b)$, $\gamma = \nu_p(5a + 11b)$.

Tada uspoređivanjem potencije broja p u rastavu od $a^x, (a+b)^y, (5a+11b)^z$ dobivamo da vrijedi $x\alpha = y\beta = z\gamma$. Kako je $x > y > z$, mora vrijedi $\alpha < \beta < \gamma$. Dakle, svaki prost broj p se manje puta javlja u rastavu od a nego od $a + b$, i manje puta u rastavu od $a + b$ nego u rastavu od $5a + 11b$, pa stvarno vrijedi

$$a \mid a + b \mid 5a + 11b.$$

Iz djeljivosti $a \mid a + b$ slijedi $a \mid b$, pa je $b = ka$ za neki prirodan broj k.

Djeljivost $a+b \mid 5a+11b$ onda možemo zapisati kao $(1+k)a \mid (5+11k)a$, odnosno $1+k \mid 5+11k$. Ali onda vrijedi i

$$1 + k \mid 5 + 11k - 11(1 + k) = -6,$$

pa je $k+1 \in \{2,3,6\}$, odnosno $k \in \{1,2,5\}$.

Ako je $k=1$, onda je $b=a$ i treba pronaći sve a za koje postoje x,y,z takvi da je

$$a^x = (2a)^y = (16a)^z.$$

Iz prve jednakosti slijedi $a^{x-y} = 2^y$, pa je a nužno potencija broja 2, odnosno $a = 2^n$ za neki $n \geqslant 1$. Za $a = 2^n$ trebamo pronaći x,y,z za koje je

$$2^{nx} = 2^{(n+1)y} = 2^{(n+4)z}.$$

Za izbor $x=(n+1)(n+4)$, $y=n(n+4)$, $z=n(n+1)$ vrijedi gornja jednakost, pa zaključujemo da su svi parovi $(a,b)=(2^n,2^n)$ za $n \in \mathbb{N}$ rješenja.

Ako je $k=2$, onda je $b=2a$ i treba pronaći sve a za koje postoje x,y,z takvi da je

$$a^x = (3a)^y = (27a)^z.$$

Iz prve jednakosti slijedi $a^{x-y} = 3^y$, pa je a nužno potencija broja 3, odnosno $a = 3^n$ za neki $n \geqslant 1$. Za $a = 3^n$ trebamo pronaći x,y,z za koje je

$$3^{nx} = 3^{(n+1)y} = 3^{(n+3)z}.$$

Za izbor $x=(n+1)(n+3)$, $y=n(n+3)$, $z=n(n+1)$ vrijedi gornja jednakost, pa zaključujemo da su svi parovi $(a,b)=(3^n,2\cdot 3^n)$ za $n \in \mathbb{N}$ rješenja.

Ako je $k=5$, onda je $b=5a$ i treba pronaći sve a za koje postoje x,y,z takvi da je

$$a^x = (6a)^y = (60a)^z.$$

Iz prve jednakosti dobivamo $a^{x-y} = 6^y$, a iz druge $a^{x-z} = 60^z$. Ali iz prve jednakosti slijedi da a nije djeljiv s 5, a iz druge da jest, što je kontradikcija. Zaključujemo da u ovom slučaju nema rješenja.

Dakle, skup rješenja je $\{(2^n,2^n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(3^n, 2\cdot 3^n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Drugo rješenje.

Dokažimo da postoje prirodan broj c i prirodni brojevi $u<v<w$ takvi da je $a=c^u$, $a+b=c^v$, $5a+11b=c^w$.

Neka je $t=\gcd(xy,xz,yz)$. Tvrdimo da je $a=c^{yz/t}$, $a+b=c^{xz/t}$, $5a+11b=c^{xy/t}$ za neki prirodan broj c. Za to je dovoljno dokazati da je $\nu_p(a)$ djeljiv s yz/t za svaki prost broj p.

Neka su $p_1,\dots,p_k$ svi prosti brojevi koji dijele neki od $a, a+b, 5a+11b$. Onda je

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}, \\ a+b &= p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}, \\ 5a+11b &= p_1^{\gamma_1}\dots p_k^{\gamma_k}. \end{aligned}$$

Onda iz uvjeta slijedi da za svaki $i \in \{1,\dots,k\}$ vrijedi

$$x\alpha_i = y\beta_i = z\gamma_i.$$

Iz toga slijedi da za svaki i postoji broj u_i takav da je

$$\alpha_i u_i = yz,\ \beta_i u_i = xy,\ \gamma_i u_i = xz.$$

Tada u_i dijeli xy, yz i zx, pa dijeli i t, pa zaključujemo da je $\alpha_i = yz/u_i$ djeljivo s t i tvrdnja je dokazana.

Primijetimo da vrijedi i obrat, ako su $a, a+b$ i $5a+11b$ potencije istog prirodnog broja, tada je moguće naći brojeve x, y, z za koje je $a^x = (a+b)^y = (5a+11b)^z$, pa je zadatak ekvivalentan s rješavanjem sljedećeg sustava jednadžbi u skupu prirodnih brojeva:

$$\begin{aligned} a &= c^u, \\ a+b &= c^v, \\ 5a+11b &= c^w. \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi $b = c^v - c^u$, a iz treće onda slijedi $11c^v - 6c^u = c^w$. Ali onda je

$$11c^{v-u} - c^{w-u} = 6.$$

Iz toga slijedi da c^{v-u} dijeli 6, pa je $v - u = 1$, te je $c \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Ako je $c = 1$, onda je $a = a + b$, kontradikcija.

Ako je $c = 2$, onda jednadžba postaje $22 - 2^{w-u} = 6$, odnosno $w - u = 4$, pa dobivamo rješenja $(u, v, w) = (n, n+1, n+4)$ za bilo koji prirodan broj n, pa je $a = 2^n$, $a + b = 2^{n+1}$, $5a + 11b = 2^{n+4}$. U ovom slučaju dobivamo familiju rješenja $(a, b) = (2^n, 2^n)$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ako je $c = 3$, onda jednadžba postaje $33 - 3^{w-u} = 6$, odnosno $w = u + 3$, i dobivamo rješenja $(u, v, w) = (n, n+1, n+3)$ za svaki prirodan broj n, pa je $a = 3^n$, $a+b = 3^{n+1}$, $5a+11b = 3^{n+4}$. U ovom slučaju dobivamo familiju rješenja $(a, b) = (3^n, 2 \cdot 3^n)$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ako je $c = 6$, onda je $66 - 6^{w-u} = 6$, ali onda je 60 potencija broja 6, kontradikcija. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.