Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

1. Otac Matko prije 10 godina imao je pet puta više godina nego njegova dva sina Josip i Kristijan zajedno. Tada je Josip bio dvostruko stariji od Kristijana. S druge strane, za 14 će godina Josip i Kristijan zajedno imati jednako godina kao i njihov otac. Koliko su sada stari Matko, Josip i Kristijan?

2. Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C. Neka je N nožište visine iz vrha C, M polovište hipotenuze i L sjecište simetrale pravog kuta s hipotenuzom. Ako mjera kuta $\sphericalangle LCN$ iznosi $15°$, odredi mjeru kuta $\sphericalangle MCL$.

3. Dokaži da je za sve prirodne brojeve n broj $n^4 - n^2$ djeljiv s 12.

4. Neka su a, b i c realni brojevi različiti od nule za koje vrijedi

$$a + b + c = 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Dokaži da je $abc < 0$.

5. Na ploči su napisana 2023 različita realna broja. Ako svaki broj na ploči (istovremeno) zamijenimo zbrojem svih ostalih brojeva, na ploči će biti ista 2023 broja kao i na početku.

Koje sve vrijednosti može poprimiti umnožak svih brojeva na ploči u nekom trenutku?

* * *

6. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut kojemu su sve stranice sukladne, a kutovi pri vrhovima C i D pravi. Ako je P sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, dokaži da je $|PA| = |PD|$.

7. Neka su $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 = n$ svi prirodni djelitelji broja n takvi da je $d_5 = 289$ i $d_3 - d_2 = 10$. Odredi n.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

1. Neka su x_1 i x_2 različita rješenja jednadžbe $x^2 + 5x + 3 = 0$. Izračunaj $\dfrac{x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3}{x_1 + x_2}$.

2. Odredi sve vrijednosti parametra $p \in \mathbb{R}$ za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2+px+2023 = 0$ cijeli brojevi.

3. Neka su p i q prosti brojevi takvi da su $p + q + 4$ i $pq - 12$ također prosti brojevi. Odredi $p + q$.

4. Dan je trokut ABC. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$ i H ortocentar tog trokuta. Ako je $|HM| = \frac{1}{2}|AB|$, dokaži da je trokut ABC pravokutan.

5. Neka je x realan broj različit od -1 i 1. Dokaži da vrijedi

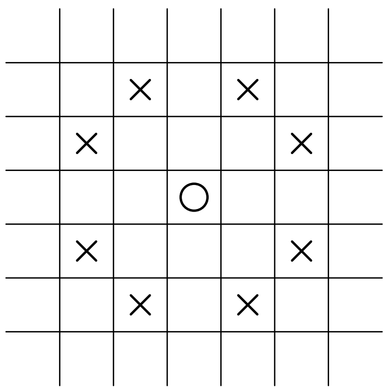
$$x^2 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 2.$$

$* \quad * \quad *$

6. Odredi sve uređene trojke cijelih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$\begin{cases} a^2 - 2ab + c^2 = ac - 13 \\ b^2 + ac = 23 \end{cases} .$$

7. Na ploči dimenzija 100×100 nalaze se dvije figure – u gornjem lijevom polju je kralj, a u gornjem desnom skakač. Figure se naizmjenično pomiču, a kralj kreće prvi. Obje figure se kreću kao u šahu: skakač se s polja označenog kružićem može pomaknuti na jedno od osam polja označenih križićima (ako je to polje na ploči), dok se kralj u svom potezu pomiče na jedno od (najviše) osam susjednih polja. Može li kralj sigurno doći do donjeg desnog polja ploče, a da ga skakač pritom ne ulovi?



Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

1. Odredi sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$||2^x - 1| - 2| = a$$

ima točno dva realna rješenja.

2. Odredi najmanji prirodan broj koji se može prikazati u obliku $50a^4$ i u obliku $3b^3$ za neke prirodne brojeve a i b.

3. Odredi sve realne brojeve x za koje postoji realan broj y takav da je

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(2y)} = 4\sin(x+y)\cos(x-y).$$

4. Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$\log_{2023-2(a+b)} b = \frac{1}{3\log_b a}?$$

5. Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H. Dokaži da vrijedi

$$|AH|^2 + |BC|^2 = |BH|^2 + |CA|^2 = |CH|^2 + |AB|^2.$$

* * *

6. Na početku je zadan prirodan broj n. Jurica odabire dva prirodna broja a i b čiji je umnožak broj n, a zatim ponavlja postupak s brojem $a+b$ umjesto n.

Odredi, u ovisnosti o broju n, najmanji mogući prirodan broj koji Jurica može dobiti kao rezultat nakon konačno mnogo koraka.

7. Neka je $ABCD$ paralelogram takav da vrijedi $|AB| = 4$, $|AD| = 3$, te je mjera kuta pri vrhu A jednaka $60°$. Kružnica k_1 dira stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ dok kružnica k_2 dira stranice $\overline{CB}$ i $\overline{CD}$.

Kružnice k_1 i k_2 su sukladne i dodiruju se izvana. Odredi duljinu polumjera tih kružnica.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je

$$|z+1| = |4-\bar{z}| \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z}{5+i}\right) = \frac{1}{13}.$$

2. Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj

$$13^{n+1} + 14^{2n-1}$$

djeljiv sa 183.

3. Dokaži da je

$$(\sqrt{20}+\sqrt{23})^{2024} + \frac{3^{2024}}{(\sqrt{20}+\sqrt{23})^{2024}}$$

prirodan broj.

4. Članovi niza $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dobiveni su množenjem odgovarajućih članova dvaju aritmetičkih nizova. Prva tri člana tako nastalog niza su $x_1 = 1440$, $x_2 = 1716$ i $x_3 = 1848$. Odredi osmi član tog niza.

5. U nekoj školi učenici mogu učiti dva klasična jezika: latinski i grčki. Od 100 učenika, njih 50 uči latinski, 40 grčki, a 20 ih uči oba jezika. Ako slučajno odaberemo dva učenika, kolika je vjerojatnost da barem jedan od njih uči latinski i barem jedan od njih uči grčki?

* * *

6. U trokut ABC površine 1 upisan je pravokutnik $PQRS$ tako da točke P i Q leže na stranici $\overline{AB}$, točka R na stranici $\overline{BC}$ i točka S na stranici $\overline{AC}$. Odredi najveći mogući iznos površine pravokutnika $PQRS$.

7. Odredi sve uređene trojke (x, y, p) gdje je p prost, a x i y prirodni brojevi za koje vrijedi

$$p^x - 1 = y^3.$$

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.