ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Otac Matko prije 10 godina imao je pet puta više godina nego njegova dva sina Josip i Kristijan zajedno. Tada je Josip bio dvostruko stariji od Kristijana. S druge strane, za 14 će godina Josip i Kristijan zajedno imati jednako godina kao i njihov otac. Koliko su sada stari Matko, Josip i Kristijan?

Prvo rješenje.

Označimo sa x broj godina koje je Kristijan imao prije 10 godina.

Iz uvjeta zadatka imamo da je Josip prije 10 godina imao $2x$ godina. 1 bod

Matko je prije 10 godina imao $5(x + 2x) = 15x$ godina. 1 bod

Za 14 godina svi će imati 24 godine više nego prije 10 godina: Kristijan će imati $x+24$ godine, Josip $2x + 24$ godine, a Matko $15x + 24$ godine.

Iz zadnjeg uvjeta zadatka je tada

$$15x + 24 = (x + 24) + (2x + 24),$$ 1 bod

a rješavanjem te jednadžbe dobivamo da je $x = 2$. 2 boda

Prema tome sada Kristijan ima 12 godina, Josip 14 godina i Matko 40 godina. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo sa k broj godina koje trenutno ima Kristijan, s j broj godina koje trenutno ima Josip i s m broj godina koje trenutno ima Matko.

Iz uvjeta zadatka dobijemo sljedeći sustav jednadžbi

$$m - 10 = 5(j - 10 + k - 10),$$ 1 bod

$$j - 10 = 2(k - 10),$$ 1 bod

$$m + 14 = (j + 14) + (k + 14).$$ 1 bod

Rješavanjem tog sustava dobijemo $k = 12$, $j = 14$ i $m = 40$. 3 boda

Dakle, Kristijan trenutno ima 12 godina, Josip 14 godina i Matko 40 godina.

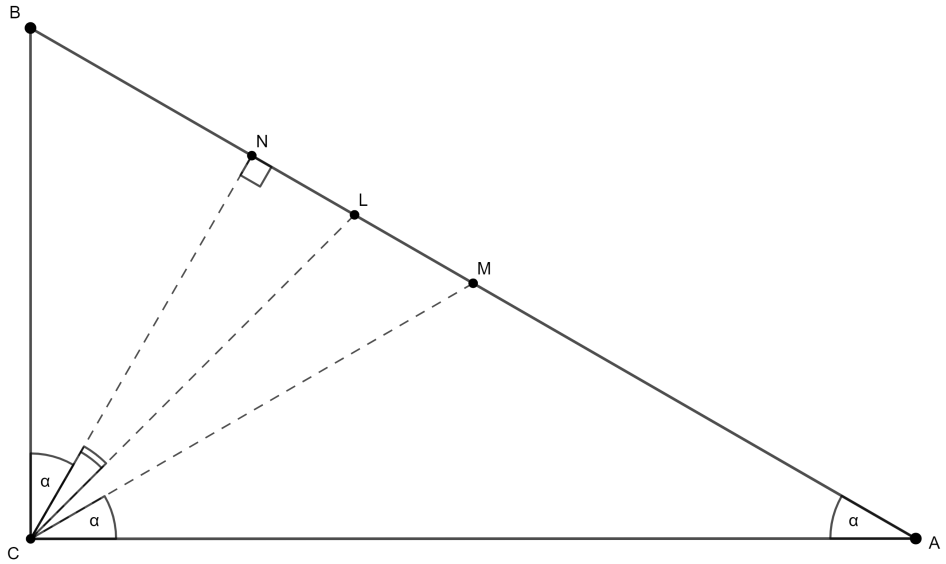
Napomena: Zadatak se može riješiti i na mnoge druge načine, uvodeći jednu, dvije ili tri nepoznanice. Svaki od tri uvjeta (u prve tri rečenice teksta zadatka) zapisanog preko odabranih nepoznanica vrijedi po 1 bod, rješavanje sustava i određivanje vrijednosti nepoznanica vrijedi 2 boda, te odgovor vrijedi 1 bod. Iznimno, u drugom rješenju zadnja 3 boda su spojena budući da su upravo nepoznanice tražene vrijednosti u zadatku.

Kao i u ostalim zadatcima, mogući su parcijalni bodovi u dijelu rješavanja jednadžbi u slučaju pogreške, po principu *prati grešku*.

Zadatak A-1.2.

Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C. Neka je N nožište visine iz vrha C, M polovište hipotenuze i L sjecište simetrale pravog kuta s hipotenuzom. Ako mjera kuta $\sphericalangle LCN$ iznosi 15°, odredi mjeru kuta $\sphericalangle MCL$.

Rješenje.



Označimo s α mjeru kuta $\sphericalangle BAC$.

Iz pravokutnog trokuta ABC imamo da je $\sphericalangle CBA = 90^\circ - \alpha$.

Kako je točka M polovište hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC slijedi da je M ujedno i središte opisane kružnice trokuta ABC. 1 bod

Zato je trokut MCA jednakokračan, pa je prema tome $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MAC = \alpha$. 1 bod

Iz pravokutnog trokuta BCN imamo da je $\sphericalangle NCB = \alpha$. 1 bod

Zaključujemo da je $\sphericalangle NCB = \sphericalangle ACM$.

Kako L leži na simetrali kuta, vrijedi $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCB$. 1 bod

Iz zadnje dvije jednakosti zaključujemo da je $\sphericalangle MCL = \sphericalangle LCN = 15^\circ$. 2 boda

Napomena: Zadnji korak u rješenju moguće je zamijeniti dvama manjim koracima: račun kuta α (uzimajući u obzir da je $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCB = 45^\circ$), te konačno račun nepoznatog kuta $\sphericalangle MCL$ iz α. Postoje dvije mogućnosti za mjeru tog kuta: u slučaju da je $|AC| > |BC|$, točke A, M, L, N i B se tim redoslijedom nalaze na hipotenuzi, te α iznosi 30°; u slučaju da je $|AC| < |BC|$, točke B, M, L, N i A se tim redoslijedom nalaze na hipotenuzi, a α iznosi 60°. Za potpuni broj bodova rješenje ne mora komentirati oba slučaja (dovoljan je samo jedan slučaj), niti mora dokazivati poredak točaka M, L i N na hipotenuzi.

Zadatak A-1.3.

Dokaži da je za sve prirodne brojeve n broj $n^4 - n^2$ djeljiv s 12.

Prvo rješenje.

Uočimo da je $n^4 - n^2 = n^2(n-1)(n+1)$.

Ako je n paran broj, tada je n^2 djeljiv s 4, pa je zato izraz $n^2(n-1)(n+1)$ djeljiv s 4. 1 bod

Ako je n neparan broj, tada su brojevi $n-1$ i $n+1$ biti parni. Zbog toga je broj $(n-1)(n+1)$ djeljiv s 4 pa je samim time i izraz $n^2(n-1)(n+1)$ djeljiv s 4. 2 boda

U oba slučaja izraz $n^2(n-1)(n+1)$ djeljiv je s 4.

S druge strane, budući da su $n-1$, n i $n+1$ tri uzastopna cijela broja, točno jedan od njih je djeljiv s 3. Zato je i cijeli umnožak $n^4 - n^2 = n^2(n-1)(n+1)$ djeljiv s 3. 2 boda

Kako smo dokazali da je traženi izraz djeljiv s 3 i 4, zaključujemo da je djeljiv s 12 za sve prirodne brojeve n. 1 bod

Drugo rješenje.

Dokažimo da je $n^4 - n^2$ djeljivo s 4 za sve prirodne brojeve n.

Ako je n paran broj, tada je $n = 2k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. U tom slučaju je $n^4 - n^2 = 4(4k^4 - k^2)$, tj. izraz $n^4 - n^2$ je djeljiv s 4. 1 bod

Ako je n neparan broj, tada je $n = 2k+1$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$. U tom slučaju je

$$n^2 = 4(k^2+k)+1 \quad \text{i} \quad n^4 = 4\left(4(k^2+k)^2 + 2(k^2+k)\right) + 1.$$ 1 bod

Dakle, n^2 i n^4 daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4, pa je onda njihova razlika $n^4 - n^2$ djeljiva s 4. 1 bod

Dokažimo još da je broj $n^4 - n^2$ djeljiv s 3 za sve prirodne brojeve n.

Ako je n djeljiv s 3, tada je $n = 3k$ za neki prirodan broj k. Tada je $n^4 - n^2 = 9(9k^4 - k^2)$, tj. broj $n^4 - n^2$ je djeljiv s 3. 1 bod

Ako je n oblika $n = 3k+1$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, tada je $n^2 = 3(3k^2+2k)+1$. Ako je oblika $n = 3k+2$, za neki $k \in \mathbb{N}_0$, tada je $n^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$.

U oba slučaja kada n nije djeljiv s 3 broj n^2 oblika je $3a+1$ za neki $a \in \mathbb{N}_0$, pa je zato

$$n^4 = (n^2)^2 = (3a+1)^2 = 3(3a^2+2a)+1.$$

Konačno, imamo da je $n^4 - n^2 = 3(3a^2 + a)$, odnosno da je izraz $n^4 - n^2$ djeljiv s 3. 1 bod

Kako je izraz $n^4 - n^2$ djeljiv s 3 i 4, zaključujemo da je $n^4 - n^2$ djeljiv s 12 za sve prirodne brojeve n. 1 bod

Napomena: Dokaz djeljivosti broja $n^4 - n^2$ s 4 može se provesti promatranjem svih mogućih ostataka broja n pri dijeljenju s 4. Bodovanje takvog rješenja treba prilagoditi uz drugo rješenje.

Drugo rješenje moguće je provesti kongruencijama.

Dijelove ovih rješenja moguće je kombinirati. Dokazi djeljivosti izraza s 3 nosi 2 boda, a dokaz djeljivosti s 4 nosi 3 boda. Zadnji bod ostvaruje se za zaključak da tvrdnja slijedi dokaže li se djeljivost izraza s 3 i 4. Rješenje koje bi prema gornjim bodovnim shemama ostvarilo manje ili jednako 2 boda, dodatni 1 bod može ostvariti u slučaju spomena jednakosti $n^4 - n^2 = n^2(n-1)(n+1)$.

Zadatak A-1.4.

Neka su a, b i c realni brojevi različiti od nule za koje vrijedi

$$a + b + c = 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Dokaži da je $abc < 0$.

Prvo rješenje.

Ako je $abc = 0$, tada je neki od brojeva a, b, c jednak nuli što je kontradikcija s uvjetom zadatka. Zato je $abc \neq 0$. 1 bod

Množenjem druge jednakosti iz teksta zadatka s abc dobivamo

$$ab + bc + ac = abc.$$ 1 bod

Kvadriranjem jednakosti $a + b + c = 0$ slijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 0,$$ 1 bod

odnosno

$$ab + bc + ac = -\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$ 1 bod

Uspoređujući dobivene vrijednosti za $ab + bc + ca$, dobivamo

$$abc = ab + bc + ac = -\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$ 1 bod

Kako je zbroj kvadrata realnih brojeva nenegativan broj, zaključujemo da je zadnji izraz nužno nepozitivan, odakle je $abc \leqslant 0$. Zajedno sa zaključkom s početka ($abc \neq 0$) zaključujemo da je $abc < 0$, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Drugo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, $abc \geqslant 0$.

Kao u prethodnom rješenju zaključimo da je $abc \neq 0$, te da je druga jednakost ekvivalentna s

$$ab + bc + ac = abc.$$ 2 boda

Posebno, nijedan od brojeva a, b i c nije jednak nuli.

Kako je $abc \neq 0$ i $abc \geqslant 0$, nužno je $abc > 0$. To je moguće ako je neparno mnogo brojeva a, b, c pozitivno. No, zbog uvjeta $a+b+c=0$, nemoguće je da su svi pozitivni. Zato je jedan od njih pozitivan, a dva su negativna. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. Izrazimo li iz prve jednakosti

$$a = -b - c,$$ 1 bod

imamo sljedeći niz ekvivalentnih jednakosti:

$$\begin{aligned}
ab + bc + ac &= abc \\
a(b+c) + bc &= abc \\
-(b+c)^2 + bc &= abc \\
0 &= abc + (b+c)^2 - bc \\
0 &= abc + b^2 + c^2 + bc.
\end{aligned}$$ 1 bod

Brojevi b^2, c^2 i bc su pozitivni realni brojevi kao umnošci dvaju negativnih, pa je cijela desna strana posljednje jednakosti pozitivna. Dakle, ona ne može biti jednaka nuli, pa smo dobili kontradikciju s našom pretpostavkom $abc \geqslant 0$. Zato je zaista $abc < 0$, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Napomena: Četvrti bod u prvoj bodovnoj shemi ostvaruje se za ekvivalentne jednadžbe u kojima se izrazi $ab + bc + ca$ i $a^2 + b^2 + c^2$ nalaze na suprotnim stranama jednakosti.

Četvrti bod u drugoj bodovnoj shemi ostvaruje se isključivo za izražavanje jedne varijable preko druge dvije tek kada se pretpostavi da je ona pozitivna, a druge dvije nisu.

Zadatak A-1.5.

Na ploči su napisana 2023 različita realna broja. Ako svaki broj na ploči (istovremeno) zamijenimo zbrojem svih ostalih brojeva, na ploči će biti ista 2023 broja kao i na početku.

Koje sve vrijednosti može poprimiti umnožak svih brojeva na ploči u nekom trenutku?

Prvo rješenje.

Označimo brojeve koji su početno napisani na ploči redom s $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2023}$ i neka je $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2023}$.

Budući da nakon prve zamjene brojeva na ploči ponovo dobijemo iste brojeve, slijedi da će i nakon bilo koje druge zamjene na ploči pisati početni brojevi. 1 bod

Prema tome umnožak svih brojeva na ploči će u svakom trenutku biti isti umnošku početnih brojeva na ploči. Ista tvrdnja vrijedi i za zbroj brojeva na ploči.

Nakon prve zamjene brojeva na ploči će tada pisati brojevi $s-x_1,\ s-x_2,\ \ldots,\ s-x_{2023}$. 1 bod

Kako su to isti brojevi koji su početno pisali na ploči imamo da je njihov zbroj također jednak s, tj.

$$s = (s - x_1) + (s - x_2) + \ldots + (s - x_{2023}) = 2023s - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{2023}) = 2022s.$$ 1 bod

Iz gornje jednadžbe slijedi da je $s = 0$. 1 bod

Prema tome, brojevi na ploči nakon prve zamjene su $-x_1,\ -x_2,\ \ldots,\ -x_{2023}$.

Kako se ponovo radi o istim brojevima koji su početno bili napisani na ploči imamo da će umnožak svih brojeva prije i nakon zamjene biti jednak, odnosno

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2023} = (-x_1) \cdot (-x_2) \cdot \ldots \cdot (-x_{2023}) = -x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2023}.$$ 1 bod

Iz gornje jednakosti imamo $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2023} = 0$. 1 bod

Dakle, umnožak svih brojeva na ploči u svakom trenutku će uvijek biti 0.

Drugo rješenje.

Kao u gornjem rješenju zaključimo da ako su brojevi na ploči nakon prvog poteza jednaki suprotnim vrijednostima brojeva napisanim na ploči na početku, te da se umnožak nakon svakog poteza ne mijenja. 4 boda

Bez smanjenja općenitosti, neka je $x_1 > x_2 > \ldots > x_{2023}$. Tada vrijedi $-x_{2023} > -x_{2022} > \ldots > -x_1$. Kako su brojevi koji su pisali na ploči na početku jednaki onima nakon izvršenja jednog poteza, nužno je

$$x_1 = -x_{2023},\ x_2 = -x_{2022},\ \ldots,\ x_{2023} = -x_1.$$ 1 bod

Posebno, $x_{1012} = -x_{1012}$, odnosno $x_{1012} = 0$.

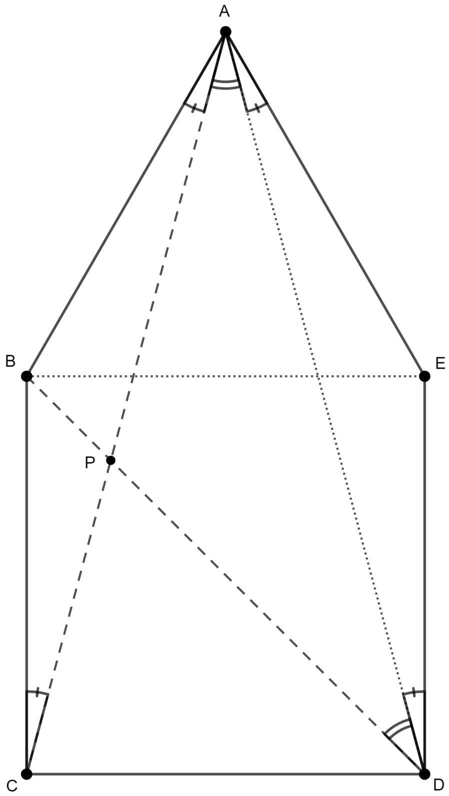
Kako je jedan od brojeva na ploči jednak nuli, zaključujemo da je umnožak tih brojeva jednak nula, te će tako biti i nakon svakog poteza. 1 bod

Napomena: Rješenje ostvaruje prvi bod iz prve bodovne sheme ako u bilo kojem obliku spominje jednakost koja govori da je zbroj svih brojeva na ploči prije zamjene jednak zbroju svih brojeva na ploči nakon zamjene, ili analognu tvrdnju za umnožak.

Zadatak A-1.6.

Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut kojemu su sve stranice sukladne, a kutovi pri vrhovima C i D pravi. Ako je P sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, dokaži da je $|PA| = |PD|$.

Rješenje.



Dužine $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ četverokuta $BCDE$ okomite su na dužinu $\overline{CD}$, pa su međusobno paralelne. Budući da su jednakih duljina, četverokut $BCDE$ je paralelogram. 1 bod

Dodatno, kako je stranica tog četverokuta $\overline{CD}$ okomita na te dvije stranice, i jednake je duljine, $BCDE$ je kvadrat. 2 boda

Budući da je $BCDE$ kvadrat imamo da je $|BE| = |CD| = |AE| = |AB|$. Dakle, u trokutu ABE sve stranice su jednake duljine, pa je zato to jednakostraničan trokut. 1 bod

Posebno vrijedi $\sphericalangle EAB = 60°$, $\sphericalangle DEA = \sphericalangle DEB + \sphericalangle BEA = 90° + 60° = 150°$, te $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EBC + \sphericalangle ABE = 90° + 60° = 150°$. 1 bod

Trokut ADE je jednakokračan, pa je zato

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle EDA = \frac{1}{2}\left(180° - \sphericalangle DEA\right) = 15°.$$ 1 bod

Analogno, trokut ABC je jednakokračan, pa je zato $\sphericalangle BAC = 15°$.

U jednakokračnom pravokutnom trokutu EBD zaključujemo $\sphericalangle EDB = 45°$. 1 bod

Zato slijedi

$$\sphericalangle PAD = \sphericalangle EAB - \sphericalangle EAD - \sphericalangle CAB = 30°,$$ 1 bod

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle EDB - \sphericalangle EDA = 30°.$$ 1 bod

Zato je $\sphericalangle PAD = \sphericalangle DAP$, odakle zaključujemo da je trokut PDA jednakokračan, odnosno da je $|PA| = |PD|$, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Napomena: Tvrdnja da je četverokut $BCDE$ kvadrat nosi 1 bod, dok dokaz te tvrdnje nosi 2 boda.

Zadatak A-1.7.

Neka su $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 = n$ svi prirodni djelitelji broja n takvi da je $d_5 = 289$ i $d_3 - d_2 = 10$. Odredi n.

Prvo rješenje.

Uočimo da je $d_5 = 289 = 17^2$.

Kako je d_5 djelitelj od n, slijedi da je $n = d_5 m = 17^2 \cdot m$ za neki prirodan broj m. 1 bod

Očito $m \neq 1$ jer bi tada vrijedilo

$$d_6 = n = d_5 m = d_5 < d_6.$$

Ako je $m = 17$, tada je $n = 17^3$. Međutim, svi djelitelji broja 17^3 su 1, 17, 17^2 i 17^3. Tada bi n imao 4 djelitelja, što je kontradikcija s uvjetom zadatka da n ima točno 6 djelitelja. 1 bod

Slično zaključujemo da u slučaju $m = 17^2$ broj n ima ukupno samo 5 djelitelja. 1 bod

Budući da je m različit od 1, 17 i 17^2, iz $n = 17^2 \cdot m$ zaključujemo da su

$$1,\ 17,\ m,\ 17m,\ 17^2 \text{ i } 17^2 m$$ 1 bod

različiti djelitelji broja n (u nekom poretku). Budući da je njih točno 6 zaključujemo da su to ujedno i svi djelitelji od n. 2 boda

Budući da su m i 17 veći od 1 i manji od $17m$ (jer je $m \neq 1$) imamo da je ili $d_2 = 17$ (i time $d_3 = m$) ili $d_2 = m$ (i $d_3 = 17$). 1 bod

Ako je $d_2 = 17$, tada je $d_3 = 10 + d_2 = 27 = 3^3$, pa imamo da je $n = 17^2 \cdot 3^3$. Međutim, to rješenje otpada jer $7^2 \cdot 3^3$ ima više od 6 djelitelja. 1 bod

Ako je $d_3 = 17$, tada je $m = d_2 = d_3 - 10 = 7$, pa imamo da je $n = 17^2 \cdot 7$. 1 bod

Direktnom provjerom vidimo da broj $17^2 \cdot 7 = 2023$ zaista ima 6 djelitelja, i da mu je 289 peti po veličini. 1 bod

Dakle, $n = 17^2 \cdot 7 = 2023$ je jedini broj s traženim svojstvom.

Drugo rješenje.

Kako je $d_5 = 289$ djelitelj od n, a 17 njegov djelitelj, zaključujemo da je 17 djelitelj i broja n. 1 bod

Kako je $d_1 = 1 < 17 < 17^2 = d_5$, imamo tri mogućnosti: $d_2 = 17$, $d_3 = 17$ ili $d_4 = 17$. 1 bod

Ako je $d_2 = 17$, tada je $d_3 = 10 + d_2 = 27$. No, tada $3 \mid 27$ i $d_3 = 27 \mid n$, pa je i 3 djelitelj broja n. On je manji od 17, što daje kontradikciju s $d_2 = 17$. 1 bod

Ako je $d_3 = 17$, tada je $d_2 = d_3 - 10 = 7$. U tom slučaju svi brojevi

$$1,\ 7,\ 17,\ 7 \cdot 17,\ 17^2,\ 7 \cdot 17^2$$

djelitelji su broja n. Njih ima 6, što znači da ih ne smije biti više, što je moguće tek ako je n jednak zadnjem od njih: $n = 7 \cdot 17^2 = 2023$. 1 bod

Direktnom provjerom vidimo da broj $17^2 \cdot 7 = 2023$ zaista ima 6 djelitelja (što vidimo i odozgo), i da mu je 289 peti po veličini. 1 bod

Preostaje slučaj $d_4 = 17$.

Primijetimo da je d_2 relativno prost sa 17 budući da je manji od njega. 1 bod

Kako je dodatno $d_2 \mid n$ i $17 \mid n$, zaključujemo da $17d_2 \mid n$, tj. broj $17d_2$ je djelitelj broja n. 2 boda

Dakle, postoji $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ takav da je $d_i = 17d_2$, te da su svi djelitelji poredani po veličini. S druge strane, vrijedi

$$d_4 = 17 < 17d_2 < 17^2 = 289 = d_5,$$

te time dobivamo kontradikciju. 2 boda

Dakle, $n = 17^2 \cdot 7 = 2023$ je jedini broj s traženim svojstvom.

Napomena: Rješenje koje ne provjeri da $n = 2023$ zadovoljava sve uvjete zadatka vrijedi najviše 9 bodova (ne ostvaruje deseti bod prve bodovne sheme, odnosno peti bod druge bodovne sheme). Pronalazak broja $n = 2023$ bez provjere svih uvjeta zadatka nosi 0 bodova (ne ostvaruje se isti bod). Pronalazak broja $n = 2023$ uz provjeru svih uvjeta zadatka nosi gore spomenuti 1 bod.

Provjera da mogućnost $d_3 = 17$ vodi na potencijalno rješenje $n = 2023$ nosi 1 bod. Dokaz da slučaj $d_2 = 17$ ne vodi rješenju nosi 1 bod.

Tvrdnje $n = d_2d_5$ i $n = d_3d_4$ mogu se iskoristiti za dijelove dokaza. Stoga rješenja koja uključuju barem jednu od te dvije jednakosti, te ukupno zaslužuju manje ili jednako od 1 bod, ostvaruju dodatni 1 bod.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Neka su x_1 i x_2 različita rješenja jednadžbe $x^2+5x+3=0$. Izračunaj $\dfrac{x_1^3x_2+x_1x_2^3}{x_1+x_2}$.

Rješenje.

Prema Vieteovim formulama slijedi

$$x_1+x_2=-5, \qquad \text{1 bod}$$
$$x_1\cdot x_2=3. \qquad \text{1 bod}$$

Iz formule za kvadrat zbroja slijedi

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5^2-2\cdot 3=19. \qquad \text{2 boda}$$

Zato je brojnik traženog razlomka jednak

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=3\cdot 19=57, \qquad \text{1 bod}$$

a tražena vrijednost iznosi

$$\frac{x_1^3x_2+x_1x_2^3}{x_1+x_2}=\frac{57}{-5}=-\frac{57}{5}. \qquad \text{1 bod}$$

Napomena: Do rezultata se može doći i eksplicitnim računanjem rješenja kvadratne jednadžbe koja iznose $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-12}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. Bodovanje takvog rješenja prati gornju bodovnu shemu: točan izračun vrijednosti x_1 i x_2 nosi 0 bodova, tek određivanje izraza koji uključuju x_1 i x_2 (kao u gornjem rješenju) nose odgovarajuće bodove.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve vrijednosti parametra $p\in\mathbb{R}$ za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2+px+2023=0$ cijeli brojevi.

Rješenje.

Označimo s x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2+px+2023=0$. Prema Vieteovim formulama slijedi

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=-p,\\ x_1\cdot x_2&=2023. \end{aligned}$$ 2 boda

Rastav broja 2023 na proste faktore iznosi $2023=7\cdot 17^2$. 1 bod

Kako su x_1 i x_2 cijeli brojevi, oni su nužno djelitelji broja 2023 (oni iznose

$$\pm 1,\ \pm 7,\ \pm 17,\ \pm 119,\ \pm 289,\ \pm 2023),$$

koji pomnoženi daju 2023.

Ako su x_1 i x_2 jednaki brojevima 1 i 2023 u nekom poretku, tada je $p=-(1+2023)=-2024$. Ako su x_1 i x_2 jednaki brojevima -1 i -2023, tada je $p=2024$. 1 bod

Ako su x_1 i x_2 jednaki brojevima 7 i 289 u nekom poretku, tada je $p=-(7+289)=-296$. U slučaju suprotnih predznaka za x_1 i x_2 imamo $p=296$. 1 bod

Konačno, ako su x_1 i x_2 jednaki brojevima 17 i 119 u nekom poretku, tada je $p=-(17+119)=-126$, a u slučaju suprotnih predznaka dobivamo i mogućnost $p=126$. 1 bod

Stoga su sve moguće vrijednosti parametra p s traženim svojstvom ± 2024, ± 296 i ± 126.

Napomena: Rješenje u kojem su pronađena samo sva pozitivna (ili negativna) rješenja za p ostvaruje 1 bod od zadnja 3 boda gornje bodovne sheme.

Zadatak A-2.3.

Neka su p i q prosti brojevi takvi da su $p+q+4$ i $pq-12$ također prosti brojevi. Odredi $p+q$.

Rješenje.

Brojevi p i q ne mogu biti iste parnosti jer bi tada $p+q+4$ bio paran broj strogo veći od 2. Zato je jedan od brojeva p ili q jednak 2. 2 boda

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p=2$.

Prema uvjetu zadatka tada su $q+6$ i $2q-12$ prosti brojevi. Broj $2q-12$ je očito paran, a kako je i prost mora vrijediti $2q-12=2$, tj. $q=7$. 2 boda

Brojevi $q=7$ i $p+q+4=13$ su također prosti, pa su svi uvjeti zadatka zadovoljeni. 1 bod

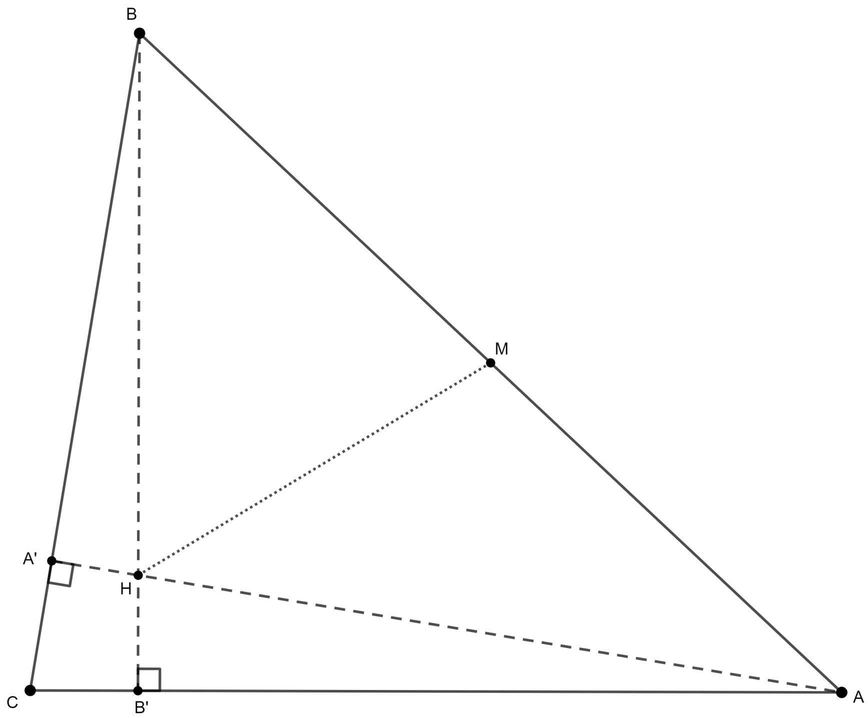
Zato je konačno $p+q=9$. 1 bod

Napomena: Peti bod iz gornje bodovne sheme moguće je ostvariti tek ako rješenje provjeri (ili spomene) da su zaista sva četiri broja $p=2$, $q=7$, $p+q+4=13$ i $pq-12=2$ prosta.

Zadatak A-2.4.

Dan je trokut ABC. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$ i H ortocentar tog trokuta. Ako je $|HM| = \frac{1}{2}|AB|$, dokaži da je trokut ABC pravokutan.

Prvo rješenje.



Označimo s α, β i γ mjere kutova trokuta ABC pri vrhovima A, B i C redom. Neka su točke A' i B' redom nožišta visina iz vrhova A i B trokuta ABC.

Promatrajući trokut ABA' vidimo da je $\sphericalangle HAB = 90° - \sphericalangle A'BA = 90° - \beta$. 1 bod

Analogno, promatrajući trokut ABB' dobivamo da je $\sphericalangle HBA = 90° - \alpha$.

Konačno, iz trokuta ABH slijedi

$$\sphericalangle BHA = 180° - \sphericalangle HBA - \sphericalangle HAB = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = 180° - \gamma,$$ 2 boda

odnosno $\gamma = 180° - \sphericalangle BHA$.

Kako je M polovište stranice $\overline{AB}$, zajedno s uvjetom iz zadatka vrijedi $|HM| = \frac{1}{2}|AB| = |AM| = |BM|$. 1 bod

Zaključujemo da je M središte opisane kružnice trokutu ABH. Kako je i polovište stranice $\overline{AB}$, slijedi da je trokut ABH pravokutan, odnosno $\sphericalangle BHA = 90°$. 1 bod

Konačno imamo da je

$$\sphericalangle BCA = 180° - \sphericalangle BHA = 180° - 90° = 90°,$$ 1 bod

odakle zaključujemo da je trokut ABC pravokutan.

Drugo rješenje.

Kao u prethodnom rješenju zaključujemo da je $\sphericalangle BHA = 90^\circ$. 2 boda

Dodatno, kao u prethodnom rješenju, označimo nožišta visina iz vrhova A i B trokuta ABC s A' i B'.

Kako je $\sphericalangle BHA = \sphericalangle BB'A = 90^\circ$, pravci AH i AC su okomiti na BH, pa su međusobno paralelni. Kako prolaze istom točkom, slijedi da se radi o istom pravcu, odnosno H leži na pravcu AC. 2 boda

Analogno možemo zaključiti i da se H nalazi na pravcu BC.

Zato je H presjek pravaca AC i BC, isto kao i točka C, odnosno točke C i H se poklapaju. 1 bod

Zato je $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BHA = 90^\circ$, pa je trokut ABC pravokutan. 1 bod

Zadatak A-2.5.

Neka je x realan broj različit od -1 i 1. Dokaži da vrijedi

$$x^2 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 2.$$

Prvo rješenje.

Sljedeće nejednakosti su međusobno ekvivalentne:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} &\geqslant 2 \\
\frac{x^2(x-1)^2(x+1)^2 + (x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} &\geqslant 2 \\
\frac{x^6 - 2x^4 + 3x^2 + 2}{(x-1)^2(x+1)^2} &\geqslant 2 && \text{1 bod} \\
\frac{x^6 - 2x^4 + 3x^2 + 2}{(x-1)^2(x+1)^2} - 2 &\geqslant 0 && \text{1 bod} \\
\frac{x^6 - 2x^4 + 3x^2 + 2 - 2(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} &\geqslant 0 \\
\frac{x^6 - 4x^4 + 7x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} &\geqslant 0. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Nazivnik je očito pozitivan (nije nula jer $x \neq \pm 1$). 1 bod

Za brojnik vrijedi

$$\begin{aligned}
x^6 - 4x^4 + 7x^2 &= x^2(x^4 - 4x^2 + 7) \\
&= x^2(x^4 - 4x^2 + 4 + 3) \\
&= x^2((x^2-2)^2 + 3),
\end{aligned}$$

pa je nenegativan kao umnožak dvaju takvih faktora. 2 boda

Zato je i

$$\frac{x^6-4x^4+7x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} \geqslant 0,$$

što je ekvivalentno s početnom nejednakosti, pa je tvrdnja zadatka dokazana.

Drugo rješenje.

Primijetimo najprije da su svi pribrojnici s lijeve strane nenegativni. Ako je $|x| \geqslant \sqrt{2}$ onda je $x^2 \geqslant 2$ te je nejednakost zadovoljena. 1 bod

Preostaje pokazati tvrdnju za x za koje je $|x| < \sqrt{2}$.

Za takav x vrijedi $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$, a to je ekvivalentno s $-1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 1$, odnosno vrijedi $|x^2-1| \leqslant 1$. 1 bod

Lijeva strana zadnje nejednakosti nikad nije jednaka nuli iz uvjeta zadatka. Zato smijemo uzeti recipročnu vrijednost na obje (pozitivne) strane nejednakosti i zaključiti

$$\frac{1}{|x^2-1|} \geqslant 1.$$ 1 bod

Primjenom A–G nejednakosti na drugi i treći pribrojnik s lijeve strane nejednakosti iz teksta zadatka dobivamo

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}} = 2\left|\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right| = \frac{2}{|x^2-1|} \geqslant 2$$ 3 boda

Zajedno s $x^2 \geqslant 0$, zaključujemo da nejednakost vrijedi i u slučaju $|x| < \sqrt{2}$. Dakle, nejednakost vrijedi za sve realne x različite od -1 i 1.

Zadatak A-2.6.

Odredi sve uređene trojke cijelih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$\begin{cases} a^2-2ab+c^2 = ac-13, \\ b^2+ac = 23. \end{cases}$$

Rješenje.

Zbrojimo li zadane jednadžbe dobivamo:

$$(a-b)^2+c^2 = 10.$$ 2 boda

Kako su $a-b$ i c cijeli brojevi, iz prethodne jednakosti imamo da je zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva jednak 10. Jedina dva takva kvadrata su 1 i 9 (te 9 i 1), pa posebno zaključujemo da je $c \in \{-3,-1,1,3\}$. 1 bod

Ako je $c \in \{-3, 3\}$, izraz ac u drugoj jednadžbi djeljiv je s 3. Zato izraz b^2 mora davati ostatak 2 pri dijeljenju s 3 (jer takav ostatak daje i broj 23). To nije moguće ni za koji kvadrat cijelog broja, pa u ovom slučaju nema rješenja. 2 boda

Ako je $c=-1$ imamo $(a-b)^2 = 9$, odnosno $a-b = \pm 3$. Ako je $a-b=3$, uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobivamo $b^2-b-26=0$ što nema cjelobrojnih rješenja. 1 bod

Ako je $a-b=-3$, iz druge jednadžbe imamo $b^2-b-20=0$. Rješenja ova kvadratne jednadžbe su $b_1=-4$, $b_2=5$, odakle dobivamo kandidate za rješenja:

$$(a,b,c)=(-7,-4,-1) \quad \text{i} \quad (a,b,c)=(2,5,-1).$$ 1 bod

Ako je $c=1$ ponovno imamo $(a-b)^2=9$, odnosno $a-b=\pm 3$. Ako je $a-b=-3$, druga jednadžba sustava daje $b^2+b-26=0$ što nema cjelobrojnih rješenja. 1 bod

Ako je $a-b=3$, dobivamo $b^2+b-20=0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $b_1=-5$, $b_2=4$, čime dobivamo nove kandidate za rješenja:

$$(a,b,c)=(-2,-5,1) \quad \text{i} \quad (a,b,c)=(7,4,1).$$ 1 bod

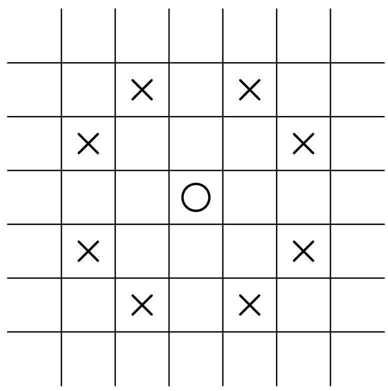
Direktnom provjerom vidimo da su sve četiri trojke

$$(a,b,c)\in\{(-7,-4,-1),(2,5,-1),(-2,-5,1),(7,4,1)\}.$$

uistinu tražena rješenja. 1 bod

Zadatak A-2.7.

Na ploči dimenzija 100×100 nalaze se dvije figure – u gornjem lijevom polju je kralj, a u gornjem desnom skakač. Figure se naizmjenično pomiču, a kralj kreće prvi. Obje figure se kreću kao u šahu: skakač se s polja označenog kružićem može pomaknuti na jedno od osam polja označenih križićima (ako je to polje na ploči), dok se kralj u svom potezu pomiče na jedno od (najviše) osam susjednih polja. Može li kralj sigurno doći do donjeg desnog polja ploče, a da ga skakač pritom ne ulovi?



Rješenje.

Odgovor je da: kralj može sigurno doći do donjeg desnog polja ploče. 1 bod

Obojimo polja ploče naizmjenično crno i bijelo (kao u šahu), tako da je gornje lijevo polje obojano crnom bojom. Tada se skakač na početku nalazi na bijelom polju, dok kralj kreće sa crnog polja. 1 bod

Primijetimo da skakač u svakom potezu mijenja boju polja na kojoj se nalazi. 1 bod

Sada opisujemo strategiju kojom kralj dolazi do cilja pritom izbjegavajući polja koja skakač napada. Prvih 98 koraka kralj bira potez desno ili potez desno-dolje. 1 bod

Dva polja na kojima se kralj može u sljedećem trenutku naći dijele stranicu. Među ta dva postoji polje na kojem se skakač ne nalazi, niti se može naći u svojem sljedećem potezu. Kako su različite boje, skakač ne može napadati oba istovremeno, a kako su susjedna, ukoliko se skakač nalazi na jednom od njih, ne može se u sljedećem potezu pomaknuti na preostalo. Zato kralj može sigurno izvesti taj potez. 3 boda

Nakon 98 koraka kralj se nalazi u predzadnjem stupcu i ne nalazi se u zadnjem retku. 1 bod

Nakon toga, kralj bira sljedeću strategiju: ako se nalazi u predzadnjem stupcu bira potez dolje ili dolje-desno, a ukoliko se nalazi u zadnjem stupcu bira potez dolje ili dolje-lijevo. 1 bod

Ponovno u svakom trenutku može sigurno izvesti jedan od ta dva poteza, jer se radi o dva polja koja dijele stranicu.

Kralj ovim potezima uvijek ostaje u jednom od posljednja dva stupca, a pomiče se za jedan redak prema dolje, pa se sigurno približava cilju. 1 bod

Ove poteze kralj ponavlja do predzadnjeg retka, kada se pomiče na ciljno polje (ako se skakač ne nalazi na tom polju) ili se pomakne na polje u predzadnjem stupcu i zadnjem retku prije pomicanja na ciljno polje u nadolazećem koraku, kada se skakač više ne nalazi na ciljnom polju.

Ovom strategijom kralj sigurno dolazi na ciljno polje na siguran način, što je i trebalo dokazati.

Napomena: Bodovna shema je sljedećeg oblika:

- točan odgovor na pitanje u tekstu zadatka (1 bod);
- opis strategije kralja (2 boda, u gornjem rješenju četvrti i deveti bod);
- obrazloženje sigurnosti strategije, tj. obrazloženje da skakač nikad neće uloviti kralja (5 bodova, od čega 1 bod za uvođenje bojanja ploče i 1 bod za tvrdnju da skakač mijenja poju polja na kojoj se nalazi u svakom koraku);
- ako to nije jasno iz samog opisa strategije, obrazloženje da će se kralj opisanom strategijom sigurno naći na ciljnom polju ploče u konačno mnogo koraka (2 boda, u gornjem rješenju osmi i deseti bod).

Rješenje koje ne pokriva slučaj da kralj izbjegava polje ploče na kojem se u tom trenutku nalazi skakač gubi 1 bod, iz dijela za obrazloženje sigurnosti strategije. Rješenje koje pokriva taj slučaj osim u zadnjem koraku ne gubi nijedan bod.

Uvođenje bojanja nije ključno za obrazloženje sigurnosti strategije. Rješenje koje u potpunosti obrazloži da skakač ne može uloviti kralja strategijom opisanom u tom rješenju bez uvođenja bojanja ostvaruje svih 5 bodova za taj dio rješenja.

Svako drugo rješenje treba biti bodovano prema opisanoj bodovnoj shemi.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$||2^x - 1| - 2| = a$$

ima točno dva realna rješenja.

Prvo rješenje.

Riješimo jednadžbu u ovisnosti u parametru a. Primijetimo prvo da za $a < 0$ jednadžba nema rješenja, dakle, nužno je $a \geqslant 0$.

Prvo tražimo rješenja za koja je $2^x - 1 \geqslant 0$, odnosno $x \geqslant 0$. Tada jednadžba postaje $|2^x - 3| = a$, što vodi na dva slučaja, ovisno o predznaku izraza $2^x - 3$ (odnosno je li $x \geqslant \log_2 3$ ili je $x < \log_2 3$). U prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} 2^x - 3 &= a \\ 2^x &= 3 + a \\ x &= \log_2(3 + a). \end{aligned}$$

U ovom slučaju $x = \log_2 3 + a$ je rješenje ako i samo ako je $a \geqslant -2$ (jer x mora biti nenegativan, te logaritam dobro definiran), a to sigurno vrijedi jer je $a \geqslant 0$. 1 bod

U drugom slučaju imamo $2^x - 3 = -a$, odakle dobivamo rješenje $x = \log_2(3 - a)$ ako i samo ako je $a \leqslant 2$. 1 bod

Sada tražimo rješenja za koja je $2^x - 1 < 0$, odnosno $x < 0$. Tada jednadžba postaje

$$\begin{aligned} |1 - 2^x - 2| &= a \\ |2^x + 1| &= a \\ 2^x + 1 &= a \\ x &= \log_2(a - 1) \end{aligned}$$

(treća jednadžba slijedi jer je izraz $2^x + 1$ pozitivan za sve x). U ovom slučaju dobivamo rješenje $x = \log_2(a - 1)$ ako i samo ako je $1 < a < 2$ (jer x mora biti negativan, te logaritam dobro definiran). 1 bod

Konačno:

- kada je $a < 0$, jednadžba nema nijedno rješenje;
- kada je $a = 0$ jednadžba ima jedno rješenje: $x = \log_2 3$;

- kada je $a \in \langle 0,1]$ jednadžba ima dva rješenja: $x = \log_2 3$ i $x = \log_2(3-a)$;
- kada je $a \in \langle 1,2\rangle$ jednadžba ima tri rješenja: $x = \log_2 3$, $x = \log_2(a-1)$ i $x = \log_2(3-a)$.
- kada je $a = 2$ jednadžba ima dva rješenja: $x = \log_2 3$ i $x = 0$;
- kada je $a > 2$ jednadžba ima jedno rješenje: $x = \log_2 3$. 3 boda

Zaključujemo jednadžba ima točno 2 rješenja kada je $a \in \langle 0,1]$ i $a = 2$.

Drugo rješenje.

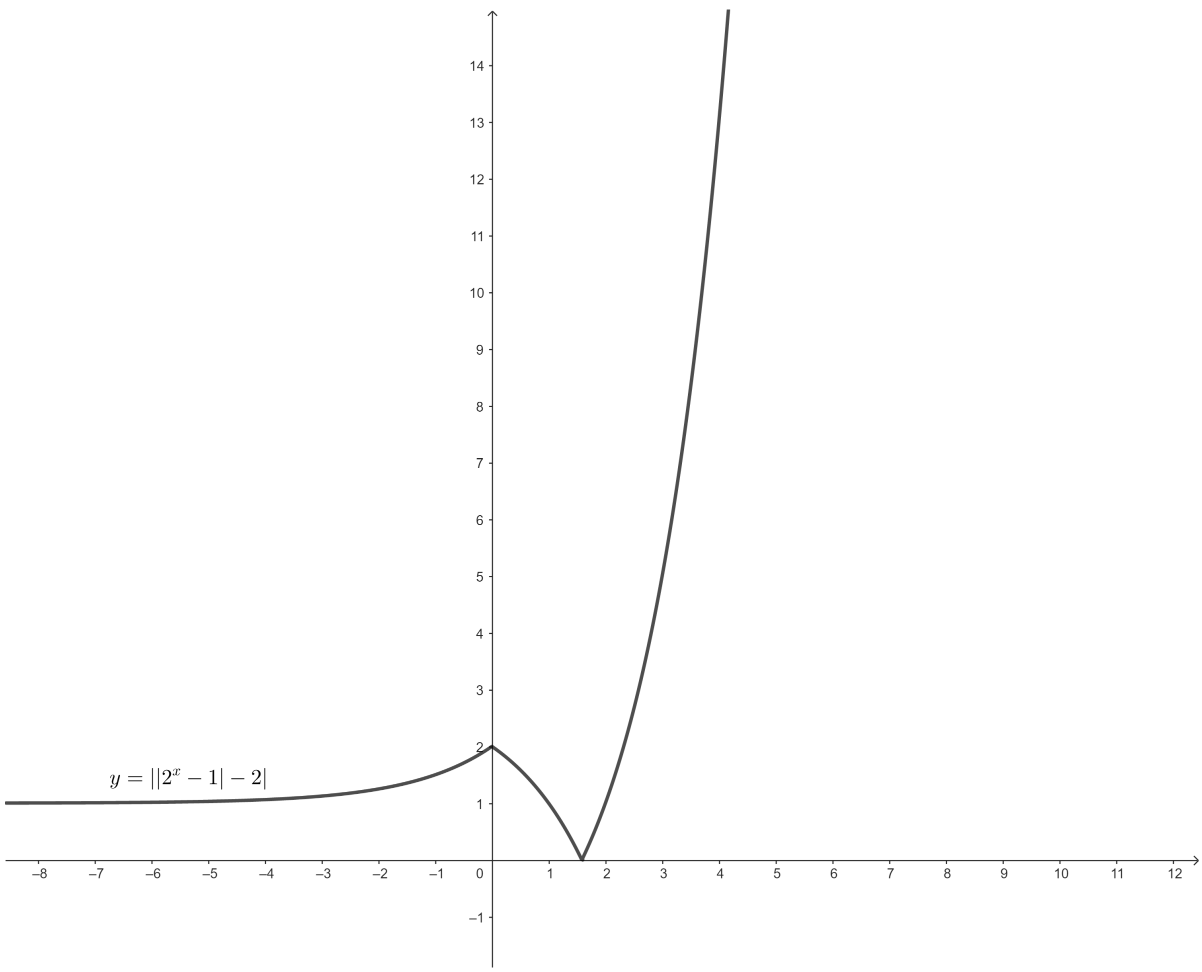
Skicirajmo graf funkcije $f(x) = ||2^x - 1| - 2|$. Kao prvo, graf funkcije $2^x - 1$ dobiven je pomicanjem grafa funkcije 2^x za jedan prema dolje. 1 bod

Graf funkcije $|2^x - 1|$ dobijemo tako da dio grafa funkcije $2^x - 1$ koji se nalazi ispod osi x osnosimetrično preslikamo preko osi x. 1 bod

Točka grafa funkcije $2^x - 1$ koja se nalazi na osi x je njezina nultočka. Rješenje jednadžbe $2^x - 1 = 0$ je $x = 0$.

Graf funkcije $|2^x - 1| - 2$ dobivamo pomicanjem prethodnog grafa funkcije za 2 dolje, dok graf funkcije $f(x) = ||2^x - 1| - 2|$ dobivamo ponovnim preslikavanjem negativnog dijela prethodnog grafa preko osi x.

Iz svega navedenog, graf funkcije $f(x)$ izgleda kao na slici. 1 bod



Broj rješenja jednadžbe $f(x) = a$ jednak je broju presjeka pravca $y = a$ i grafa funkcije $f(x)$. Kao na kraju prošlog rješenja, odredimo broj rješenja u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ (po slučajevima $a < 0$, $a = 0$, $a \in \langle 0, 1]$, $a \in \langle 1, 2\rangle$, $a = 2$, $a > 2$), te zaključujemo da jednadžba ima točno 2 rješenja kada je $a \in \langle 0, 1]$ i $a = 2$. 3 boda

Zadatak A-3.2.

Odredi najmanji prirodan broj koji se može prikazati u obliku $50a^4$ i u obliku $3b^3$ za neke prirodne brojeve a i b.

Prvo rješenje.

Neka je m najmanji prirodni broj za koji postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je m jednak

$$50a^4 = 3b^3.$$

U gornjoj jednadžbi vidimo da lijeva strana jednakosti mora biti djeljiva s 3 jer je i desna, što je jedino moguće ako je broj a^4 djeljiv s 3. Kako je 3 prost broj, to je moguće tek ako je a djeljiv s 3. 1 bod

Desna strana jednakosti mora biti djeljiva s 2 i 5, što je po sličnom načinu zaključivanja moguće tek ako je b djeljiv s 2 i 5.

Zato postoje prirodni brojevi a_1 i b_1 takvi da je $a = 3a_1$ i $b = 10b_1$. 1 bod

Primijetimo da su a i b najmanji mogući kada su a_1 i b_1 najmanji mogući. Uvrštavanjem u početnu jednakost dobivamo

$$3^3 a_1^4 = 2^2 \cdot 5 b_1^3.$$

Analogno zaključujemo da a_1 mora biti djeljiv s 2 i 5, a b_1 s 3. Zato je $a_1 = 10a_2$ i $b_1 = 3b_2$, za neke $a_2, b_2 \in \mathbb{N}$. 1 bod

Ponovno, tražimo najmanje moguće a_2 i b_2. Jednadžba sada postaje

$$2^2 \cdot 5^3 a_2^4 = b_2^3.$$

Sada zaključujemo da je $b_2 = 10 \cdot b_3$, za neki $b_3 \in \mathbb{N}$. 1 bod

Iz sljedeće jednadžbe $a_2^4 = 2b_2^3$ zaključujemo da je a_2 oblika $2a_3$ ($a_3 \in \mathbb{N}$), a iz nove jednadžbe $2^3 a_3^4 = b_3^3$ zaključujemo da je b_3 oblika $2b_4$ ($b_4 \in \mathbb{N}$). Konačno, dobivamo jednadžbu $a_3^4 = b_4^3$ kojoj je najmanje rješenje u prirodnim brojevima $a_3 = b_4 = 1$. 1 bod

Zato je najmanji traženi prirodni broj m jednak

$$m = 50a^4 = 50 \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^4 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 648\ 000\ 000.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Koristeći rastav na proste faktore, zapišimo brojeve a i b u obliku

$$a = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot x \quad \text{i} \quad b = 2^{l_1} \cdot 3^{l_2} \cdot 5^{l_3} \cdot y,$$

gdje su $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}_0$, a brojevi x i y su prirodni brojevi relativno prosti s 2, 3 i 5. 1 bod

Jednadžba $50a^4 = 3b^3$ sada postaje

$$2^{1+4k_1} \cdot 3^{4k_2} \cdot 5^{2+4k_3} \cdot x^4 = 2^{3l_1} \cdot 3^{1+3l_2} \cdot 5^{3l_3} \cdot y^3.$$

Kako bi jednakost bila zadovoljena, eksponenti u potencijama prostih brojeva 2, 3 i 5 se moraju poklapati, a brojevi koji su relativno prosti s tim brojevima moraju biti jednaki. Zato imamo

$$\begin{aligned} 1 + 4k_1 &= 3l_1, \\ 4k_2 &= 1 + 3l_2, \\ 2 + 4k_3 &= 3l_3, \\ x^4 &= y^3. \end{aligned}$$

1 bod

Najmanje rješenje zadnje jednadžbe je $x = y = 1$. 1 bod

U prvoj jednadžbi lijeva strana jednakosti mora biti djeljiva s 3, a najmanji takav k_1 da se to postigne je jednak 2. Zato je i najmanji takav $l_1 = 3$. 1 bod

U drugoj jednadžbi je slično najmanje rješenje $k_2 = l_2 = 1$, dok je u trećoj jednadžbi najmanje rješenje $k_3 = 1$, $l_3 = 2$. 1 bod

Zato je traženo rješenje

$$50a^4 = 50 \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^4 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 648\ 000\ 000.$$

1 bod

Napomena: Da bi rješenje ostvarilo zadnji bod traženi prirodan broj može ostati zapisan u obliku rastava na proste faktore.

U prvom rješenju prvi bod ostvaruje se za bilo koji od tri zaključka: a je djeljiv s 3, b je djeljiv s 2 ili b je djeljiv s 5.

U drugom rješenju četvrti bod ostvaruje se za bilo koje točno rješenje za uređene parove (k_1, l_1), (k_2, l_2), (k_3, l_3), dok se peti bod ostvaruje za točna preostala dva rješenja.

Zadatak A-3.3.

Odredi sve realne brojeve x za koje postoji realan broj y takav da je

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(2y)} = 4 \sin(x + y) \cos(x - y).$$

Rješenje.

Primijetimo da mora vrijediti $\sin(2y) \neq 0$ da jednadžba bude dobro definirana.

Primjenom formule pretvorbe iz umnoška u zbroj jednadžba postaje

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(2y)} = 2(\sin(2x) + \sin(2y)),$$

odnosno

$$\sin^2(2y) + \sin(2x)\sin(2y) - \frac{\sin(2x)}{2} = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Odavde vidimo da je $\sin(2y) = 0$ ako i samo ako je $\sin(2x) = 0$. Dakle, nužno je $\sin(2x) \neq 0$. 1 bod

Rješavanjem kvadratne jednadžbe po $\sin(2y)$ dobivamo

$$\sin(2y) = \frac{-\sin(2x) \pm \sqrt{\sin^2(2x) + 2\sin(2x)}}{2}.$$

Uvedimo oznaku $t \coloneqq \sin(2x)$. Barem jedna jednadžba

$$\sin(2y) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 2t}}{2} \quad \text{i} \quad \sin(2y) = \frac{-t - \sqrt{t^2 + 2t}}{2}$$

ima rješenje $y \in \mathbb{R}$ ako je $t^2 + 2t \geqslant 0$, te ako se izraz na desnoj strani odgovarajuće jednadžbe nalazi u intervalu $[-1, 1]$. 1 bod

Kako je $t = \sin(2x) \in [-1, 1]$, vrijedi $2 + t > 0$, pa je

$$t^2 + 2t = t(t + 2) \geqslant 0$$

ako i samo ako je $t \geqslant 0$, što zajedno s uvjetom $\sin(2x) \neq 0$ daje $t > 0$. 1 bod

U tom slučaju je

$$\frac{-t + \sqrt{t^2 + 2t}}{2} \geqslant \frac{-t + \sqrt{t^2}}{2} = 0 > -1,$$

te

$$\frac{-t + \sqrt{t^2 + 2t}}{2} \leqslant \frac{-t + \sqrt{t^2 + 2t + 1}}{2} = \frac{-t + (t + 1)}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zaključujemo da rješenje $y \in \mathbb{R}$ jednadžbe

$$\sin(2y) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 2t}}{2}$$

postoji ako i samo ako je $\sin(2x) > 0$. 1 bod

Uvjet $\sin(2x) > 0$ ekvivalentan je s

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle k\pi, \frac{(2k + 1)\pi}{2} \right\rangle,$$

pa su to upravo svi realni brojevi x s traženim svojstvom. 1 bod

Zadatak A-3.4.

Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$\log_{2023-2(a+b)} b = \frac{1}{3 \log_b a}?$$

Rješenje.

Da bi jednakost bila dobro definirana, nužno je

$$\begin{aligned} 2023 - 2(a+b) &\in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle, \\ b &\in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle, \\ \log_b a &\neq 0. \end{aligned}$$

Kako su a i b prirodni, prva dva uvjeta postaju $2023 - 2(a+b) \geqslant 2$ i $b \geqslant 2$. Zadnji uvjet je ekvivalentan s $a \geqslant 2$. 1 bod

Početnu jednadžbu možemo srediti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_b(2023 - 2(a+b))} &= \frac{1}{\log_b a^3} && \text{1 bod} \\ \log_b(2023 - 2(a+b)) &= \log_b a^3 \\ 2023 - 2(a+b)) &= a^3 && \text{1 bod} \\ a^3 + 2(a+b) &= 2023 \\ a^3 + 2a + 2b &= 2023. \end{aligned}$$

Primijetimo da je uvjet $a^3 = 2023 - 2(a+b) \geqslant 2$ automatski zadovoljen čim je $a \geqslant 2$. Dakle, tražimo broj prirodnih rješenja (a, b) dobivene jednadžbe koja zadovoljavaju $a, b \geqslant 2$.

Broj rješenja te jednadžbe jednak je broju neparnih prirodnih brojeva a za koje je

$$a^3 + 2a \leqslant 2019. \qquad \text{1 bod}$$

Naime, da bi lijeva i desna strana jednakosti bile iste parnosti, nužno je a^3 neparan, odnosno, a je neparan. S druge strane, za proizvoljan neparan a koji zadovoljava gornju nejednakost, broj $b = \dfrac{2023 - a^3 - 2a}{2}$ je jedinstveni prirodan broj koji zadovoljava traženu jednadžbu. 1 bod

Za $a \leqslant 11$ vrijedi $a^3 + 2a \leqslant 11^3 + 2 \cdot 11 = 1353 < 2019$, dok za $a \geqslant 13$ vrijedi $a^3 + 2a \geqslant 13^3 + 2 \cdot 13 = 2223$. Kako postoji 5 neparnih prirodnih brojeva manjih ili jednakih 11, a većih od 2, zaključujemo da postoji 5 uređenih parova koji su rješenje jednadžbe iz zadatka. 1 bod

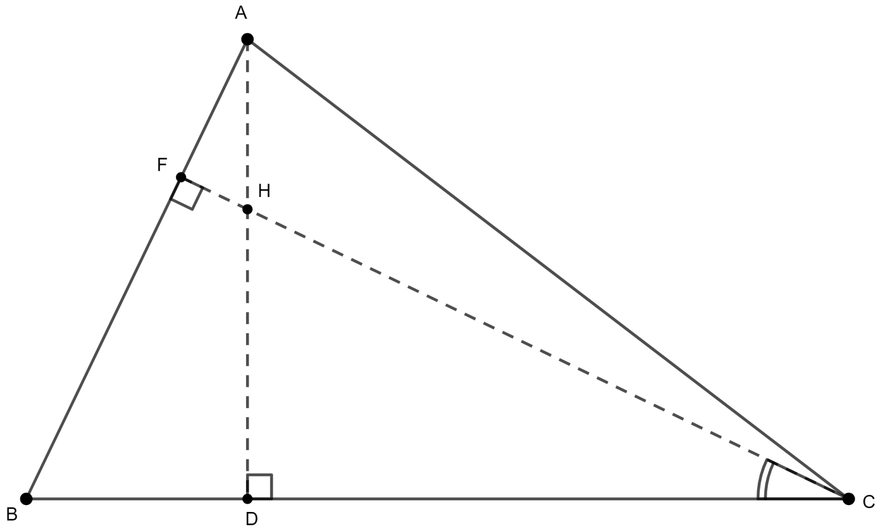
Napomena: Drugi bod bodovne sheme ostvaruje se ako se dobije izraz u kojem se broj $(2023 - 2(a+b))$ ne nalazi u bazi logaritma. Treći bod ostvaruje se ako se dobije jednadžba koja ne uključuje logaritme.

Zadatak A-3.5.

Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H. Dokaži da vrijedi

$$|AH|^2 + |BC|^2 = |BH|^2 + |CA|^2 = |CH|^2 + |AB|^2.$$

Prvo rješenje.



Bez smanjenja općenitosti dokažimo samo jednakost $|BH|^2 + |CA|^2 = |CH|^2 + |AB|^2$, budući da preostala slijedi analogno.

Tvrdnju možemo zapisati na ekvivalentan način:

$$|BH|^2 - |CH|^2 = |AB|^2 - |CA|^2.$$ 1 bod

Označimo s D nožište visine iz vrha A. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute ADB i ADC dobivamo

$$|AB|^2 - |CA|^2 = \left(|AD|^2 + |BD|^2\right) - \left(|CD|^2 + |DA|^2\right) = |BD|^2 - |CD|^2.$$ 1 bod

S druge strane, primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute HDB i HDC dobivamo

$$|BH|^2 - |CH|^2 = \left(|BD|^2 + |DH|^2\right) - \left(|CD|^2 + |DH|^2\right) = |BD|^2 - |CD|^2.$$ 1 bod

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi

$$|BH|^2 - |CH|^2 = |AB|^2 - |CA|^2,$$ 3 boda

što smo i htjeli dokazati.

Drugo rješenje.

Neka su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom, te neka su α, β i γ mjere kutova trokuta pri vrhovima A, B i C redom.

Neka je kao u prošlom rješenju D nožište visine iz vrha A, te neka je F nožište visine iz vrha C.

U pravokutnom trokutu CFB zaključujemo $\sphericalangle FCB = 90° - \sphericalangle FBC = 90° - \beta$.

U pravokutnom trokutu ADC vrijedi

$$|CD| = |AC| \cos \sphericalangle DCA = b \cos \gamma.$$ 1 bod

U pravokutnom trokutu CDH vrijedi

$$|CH| = \frac{|CD|}{\cos \sphericalangle DCH} = \frac{|CD|}{\sin \beta},$$ 1 bod

što uz izračun za duljinu dužine $\overline{CD}$ daje

$$|CH| = \frac{b \cos \gamma}{\sin \beta}.$$ 1 bod

Korištenjem sinusovog poučka, gornji izraz možemo pisati i kao

$$|CH| = \frac{b}{\sin \beta} \cos \gamma = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \gamma.$$ 1 bod

Zato je

$$|AB|^2 + |CH|^2 = c^2 + \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} \cos^2 \gamma = c^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma}\right) = \frac{c^2}{\sin^2 \gamma}.$$ 1 bod

Ponovna primjena sinusovog poučka daje

$$|AB|^2 + |CH|^2 = 4R^2.$$ 1 bod

Analogno, zaključujemo i za preostala dva izraza

$$|BC|^2 + |AH^2| = 4R^2 \quad \text{i} \quad |CA|^2 + |BH^2| = 4R^2,$$

čime smo dokazali da su zaista sva tri tražena izraza međusobno jednaka.

Zadatak A-3.6.

Na početku je zadan prirodan broj n. Jurica odabire dva prirodna broja a i b čiji je umnožak broj n, a zatim ponavlja postupak s brojem $a + b$ umjesto n.

Odredi, u ovisnosti o broju n, najmanji mogući prirodan broj koji Jurica može dobiti kao rezultat nakon konačno mnogo koraka.

Rješenje.

Dokažimo sljedeću tvrdnju: ako se u nekom koraku na ploči nalazi broj koji je veći ili jednak 5, na ploči se nikad neće naći broj manji od 5. 1 bod

Pretpostavimo suprotno, i promotrimo prvi trenutak u kojem se broj na ploči koji je veći ili jednak od 5 mijenja brojem manjim od 5. Za taj broj $m \geqslant 5$ postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $ab = m \geqslant 5$, te vrijedi $a + b \geqslant 4$. No, prema A–G nejednakosti imamo

$$4 \geqslant a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \geqslant 2\sqrt{5},$$

čime dobivamo kontradikciju. 1 bod

S druge strane, ako se na ploči nalazi broj veći od 5, postoji niz koraka kojim se na ploči može naći broj 5. 1 bod

Algoritam koji provodimo je sljedeći: ako se na ploči nalazi paran broj (oblika $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$), mijenjamo ga brojem $2 + k$; ako se na ploči nalazi neparan broj (oblika $m = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$), mijenjamo ga brojem $m + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$, a zatim brojem $(k + 1) + 2 = k + 3$. 1 bod

Ako je broj $m > 5$ paran, vrijedi $m = 2k$ uz $k \geqslant 3$, pa je

$$2k = k + k > k + 2.$$

Ako je broj $m > 5$ neparan, vrijedi $m = 2k + 1$ uz $k \geqslant 3$, pa je

$$2k + 1 = k + k + 1 > k + 2 + 1 = k + 3.$$

U oba slučaja, broj na ploči strogo veći od 5 u jednom ili dva koraka zamijenili smo brojem strogo manjim od tog broja. 1 bod

Taj postupak možemo ponavljati dokle god se na ploči nalazi broj veći od 5. Kako time dobivamo sve manje prirodne brojeve, a ne možemo dobiti broj manji od 5, zaključujemo da će u nekom trenutku na ploči pisati broj 5. 1 bod

Dakle, ako je na početku bio zadan broj $n > 5$, najmanji prirodan broj koji Jurica može dobiti na ploči je 5. 1 bod

Pogledajmo što se događa u slučaju kada je $n \leqslant 5$.

Ako je u nekom koraku na ploči broj m na ploči prost ili jednak 1, broj koji će biti zapisan u sljedećem koraku nužno je jednak $m + 1$. 1 bod

Zato ako je $n = 5$, u prvom koraku nužno dobivamo broj 6, ali to je broj veći od 5, pa prema gornjem dijelu dokaza najmanji broj koji možemo dobiti na ploči je broj 5.

Ako je $n = 4$, u prvom koraku možemo dobiti broj $2 + 2 = 4$ ili $1 + 4 = 5$. Ako Jurica napiše broj 5, neće moći dobiti broj manji od 5. Stoga je najmanji broj koji Jurica u ovom slučaju može dobiti broj 4. 1 bod

Ako je $n \leqslant 3$, u prvom koraku možemo dobiti samo broj $n + 1$. Već u prvom koraku povećavamo broj koji se nalazi na ploči. Povećanje broja na ploči nastavlja se dok ne dođemo do broja 4, nakon kojeg iz gornje analize više ne možemo dobiti broj manji od 4. Zato u ovom slučaju najmanji Juričin rezultat je onaj koji dobije nakon prvog koraka, a to je $n + 1$. 1 bod

Zato konačno imamo:

- ako je $n \in \{1,2,3\}$: najmanji broj koji može pisati na ploči iznosi $n+1$;
- ako je $n=4$: najmanji broj koji može pisati na ploči iznosi 4;
- ako je $n \geqslant 5$: najmanji broj koji može pisati na ploči iznosi 5.

Napomena: Analiza slučajeva $n \leqslant 4$ ne može biti potpuna bez dokaza tvrdnje da ako se na ploči nađe broj veći od 5 da se na ploči više nikad neće naći broj manji od 5 (ili neke slične tvrdnje). Zato nepotpuna rješenja treba bodovati na sljedeći način:

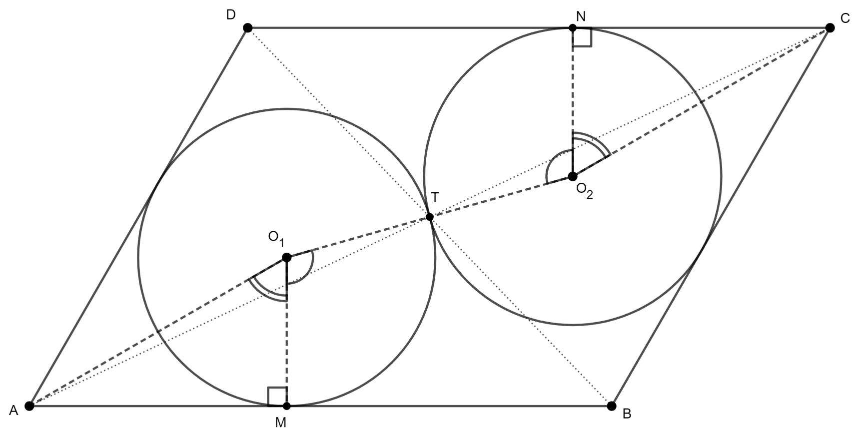
- slutnja točnih rješenja za slučajeve $n \leqslant 4$ bez ikojeg dijela dokaza nosi 1 bod (odgovara zadnjem bodu gornje bodovne sheme);
- slutnja točnih rješenja za slučajeve $n \leqslant 4$ uz analizu da će Jurica u tim slučajevima na ploči u nekom trenutku dobiti broj 4, nakon kojeg može dobiti 4 ili 5 nosi 2 boda (koji odgovaraju zadnjim dvama bodovima bodovne sheme);
- iskazana tvrdnja da broj veći od 5 nikad neće moći biti zamijenjen brojem manjim od 5, te potpun dokaz za slučajeve $n \leqslant 4$ nosi 3 boda (odgovaraju prvom bodu te zadnjim dvama bodovima gornje bodovne sheme).

Zadatak A-3.7.

Neka je $ABCD$ paralelogram takav da vrijedi $|AB|=4$, $|AD|=3$, te je mjera kuta pri vrhu A jednaka $60°$. Kružnica k_1 dira stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ dok kružnica k_2 dira stranice $\overline{CB}$ i $\overline{CD}$.

Kružnice k_1 i k_2 su sukladne i dodiruju se izvana. Odredi duljinu polumjera tih kružnica.

Rješenje.



Neka su O_1 i O_2 središte kružnica k_1 i k_2 redom. Neka je M dirалište kružnice k_1 sa stranicom $\overline{AB}$, N diralište kružnice k_2 sa stranicom $\overline{CD}$, te T diralište tih dviju kružnica. Neka je r radijus tih kružnica.

Primijetimo da je T polovište dužine $\overline{O_1O_2}$.

Kako su dužine $\overline{O_1M}$ i $\overline{O_2N}$ okomite na međusobno paralelne pravce AB i CD (jer kružnice diraju te pravce u točkama M i N), zaključujemo da su dužine $\overline{O_1M}$ i $\overline{O_2N}$ paralelne. Odavde je $\sphericalangle MO_1T = \sphericalangle TO_2N$. 1 bod

Budući da k_1 dira stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, središte kružnice O_1 leži na simetrali kuta iz vrha A. Analogno i točka O_2 leži na simetrali kuta iz vrha C, pa vrijedi jednakost kutova $\sphericalangle O_1AM = \sphericalangle O_2CN = 30°$. 1 bod

Kako je dodatno $|O_1M| = |O_2N| = r$, zaključujemo da su AMO_1 i CNO_2 međusobno sukladni pravokutni trokuti. Posebno, vrijedi $|AO_1| = |CO_2|$ i $\sphericalangle AO_1M = \sphericalangle CO_2N$. 1 bod

Promotrimo trokute AO_1T i CO_2T. Znamo da vrijedi $|AO_1| = |CO_2|$, dok su dužine $\overline{O_1T}$ i $\overline{O_2T}$ radijusi kružnica k_1 i k_2, pa su jednakih duljina. Konačno, vrijedi

$$\sphericalangle AO_1T = \sphericalangle AO_1M + \sphericalangle MO_1T = \sphericalangle CO_2N + \sphericalangle NO_2T = \sphericalangle CO_2T,$$

pa su ti trokuti sukladni po S–K–S poučku o sukladnosti. 1 bod

Posebno, vrijedi $|AT| = |TC|$ i $\sphericalangle ATO_1 = \sphericalangle CTO_2$. Kako su točke O_1, T i O_2 kolinearne, iz jednakosti kutova zaključujemo da su i točke A, T i C kolinearne. Dakle, T je polovište dijagonale $\overline{AC}$ paralelograma $ABCD$, odakle zaključujemo da je T sjecište dijagonala paralelograma. 1 bod

Kako je T polovište dijagonale $\overline{BD}$ i dužine $\overline{O_1O_2}$, zaključujemo da je četverokut O_1BO_2D paralelogram. U njemu vrijedi jednakost paralelograma:

$$|O_1O_2|^2 + |BD|^2 = 2\left(|O_1B|^2 + |O_1D|^2\right).$$ 1 bod

Duljinu dužine $\overline{BD}$ možemo odrediti kosinusovim poučkom u trokutu ABD:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cos \sphericalangle BAD = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13.$$ 1 bod

Duljinu dužine $\overline{O_1B}$ određujemo Pitagorinim poučkom iz trokuta O_1BM. Kako je

$$|MB| = |AB| - |AM| = |AB| - |O_1M| \operatorname{tg} \sphericalangle O_1AM = 4 - r\sqrt{3},$$

slijedi

$$|O_1B|^2 = |O_1M|^2 + |MB|^2 = r^2 + (4 - r\sqrt{3})^2.$$ 1 bod

Analogno zaključujemo $|O_1D|^2 = r^2 + (3 - r\sqrt{3})^2$. Uvrštavanjem dobivenog u jednakost paralelograma dobivamo jednadžbu za r:

$$\begin{aligned} 13 + 4r^2 &= 2\left(r^2 + (4 - r\sqrt{3})^2 + r^2 + (3 - r\sqrt{3})^2\right) \\ 13 + 4r^2 &= 4r^2 + 50 - 28\sqrt{3} + 12r^2 \\ 0 &= 12r^2 - 28\sqrt{3}r + 37. \end{aligned}$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su

$$r_{1,2} = \frac{28\sqrt{3} \pm 24}{24} = \frac{7\sqrt{3}}{6} \pm 1.$$ 1 bod

Rješenje $\dfrac{7\sqrt{3}}{6} + 1$ odbacujemo budući da bi u tom slučaju radijus kružnice bio veći od 2, odnosno promjer kružnice bio bi veći duljina obiju stranica paralelograma, pa u tom slučaju k_1 i k_2 ne mogu biti unutar paralelograma.

Zato konačno zaključujemo da je traženi radijus

$$r = \frac{7\sqrt{3}}{6} - 1.$$

1 bod

Napomena: Tvrdnja da je T sjecište dijagonala bez dokaza vrijedi 1 bod, što odgovara petom bodu gornje bodovne sheme. Dokaz se može provesti i uvođenjem centralne simetrije u odnosu na istu točku T, no i u tom slučaju treba provesti dokaz te tvrdnje za potpun broj bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je

$$|z+1| = |4-\bar{z}| \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z}{5+i}\right) = \frac{1}{13}.$$

Prvo rješenje.

Neka je $z = a + bi$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} |z+1| &= |a+1+bi| = \sqrt{(a+1)^2+b^2}, \\ |4-\bar{z}| &= |3-a+bi| = \sqrt{(4-a)^2+b^2}. \end{aligned}$$

Kvadriranjem prve jednadžbe i uvrštavanjem dobivenog slijedi

$$(a+1)^2+b^2 = (4-a)^2+b^2 \qquad \text{1 bod}$$

$$a^2+2a+1 = 16-8a+a^2$$

$$10a = 15$$

$$a = \frac{3}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Izraz iz druge jednadžbe prvo možemo srediti:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{5+i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{a+bi}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{5a+b+(5b-a)i}{26}\right) = \frac{5b-a}{26}. \qquad \text{1 bod}$$

Zato je

$$\frac{5b-a}{26} = \frac{1}{13}$$

$$5b-a = 2. \qquad \text{1 bod}$$

Korištenjem $a = \frac{3}{2}$ slijedi da je $b = \frac{7}{10}$. 1 bod

Stoga je jedini takav kompleksan broj z jednak $\frac{3}{2}+\frac{7}{10}i$. 1 bod

Drugo rješenje.

Iz prve jednadžbe slijedi da je $|z+1|^2 = |4-\bar{z}|^2$. Koristeći identitet $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$ slijedi

$$\begin{aligned} |z+1|^2 &= |4-\bar{z}|^2 \\ (z+1)(\bar{z}+1) &= (4-\bar{z})(4-z) && \text{1 bod} \\ z\bar{z}+z+\bar{z}+1 &= 16-4\bar{z}-az+z\bar{z} \\ 5z+5\bar{z} &= 15 \\ z+\bar{z} &= 3. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Koristeći identitet $w - \bar{w} = 2i \cdot \mathrm{Im}(w)$, dobivamo

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z}{5+i}\right) \cdot 2i = \frac{z}{5+i} - \frac{\bar{z}}{5-i} = \frac{5z - zi - 5\bar{z} - \bar{z}i}{(5+i)(5-i)} = \frac{5(z-\bar{z}) - i(z+\bar{z})}{26}. \qquad \text{1 bod}$$

Korištenjem jednadžbe $z + \bar{z} = 3$ i gornjeg računa u drugu jednadžbu dobivamo

$$\frac{2i}{13} = \mathrm{Im}\left(\frac{z}{5+i}\right) \cdot 2i = \frac{5(z-\bar{z}) - 3i}{26},$$

odakle je

$$z - \bar{z} = \frac{7}{5}i. \qquad \text{1 bod}$$

Zbrajanjem jednadžbi $z + \bar{z} = 3$ i $z - \bar{z} = \frac{7}{5}i$ te dijeljenjem s 2 dobivamo jedini traženi broj $z = \frac{3}{2} + \frac{7}{10}i$. 2 boda

Zadatak A-4.2.

Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj

$$13^{n+1} + 14^{2n-1}$$

djeljiv sa 183.

Prvo rješenje.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom: za svaki prirodan broj n izraz $13^{n+1} + 14^{2n-1}$ djeljiv je sa 183. Baza indukcije zadovoljena je za $n = 1$ jer u tom slučaju navedeni izraz $13^2 + 14 = 183$ očito jest djeljiv sa 183. 1 bod

Pretpostavimo sada da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da 183 dijeli $13^{n+1} + 14^{2n-1}$. 1 bod

Za korak indukcije promotrimo izraz za $n+1$:

$$\begin{aligned} 13^{(n+1)+1} + 14^{2(n+1)-1} &= 13 \cdot 13^{n+1} + 196 \cdot 14^{2n-1} \\ &= 13 \cdot (13^{n+1} + 14^{2n-1}) + 183 \cdot 14^{2n-1}. && \text{3 boda} \end{aligned}$$

Po pretpostavci indukcije izraz $13^{n+1} + 14^{2n-1}$ djeljiv je sa 183. Zato je i izraz

$$13^{(n+1)+1} + 14^{2(n+1)-1}$$

djeljiv sa 183 kao zbroj dva takva izraza. Time smo dokazali korak indukcije, pa vrijedi tvrdnja indukcije, a time i tvrdnja zadatka. 1 bod

Drugo rješenje.

Promotrimo koje ostatke pri dijeljenju sa 183 daju neke potencije brojeva 13 i 14:

$$\begin{aligned}
13^2 &\equiv -14 \pmod{183},\\
13^3 &\equiv 1 \pmod{183},\\
14^2 &\equiv 13 \pmod{183},\\
14^3 &\equiv -1 \pmod{183}.
\end{aligned}$$

1 bod

Zato promotrimo slučajeve u ovisnosti o tome koji ostatak n daje pri dijeljenju sa 3.

Kada je n oblika $3k$ ($k \in \mathbb{N}$), tada imamo

$$\begin{aligned}
13^{n+1} + 14^{2n-1} &= 13^{3k} \cdot 13^1 + 14^{6k-3} \cdot 14^2\\
&= (13^3)^k \cdot 13 + (14^3)^{2k-1} \cdot 14^2\\
&\equiv 1^k \cdot 13 + (-1)^{2k-1} \cdot 13\\
&\equiv 13 - 13 \equiv 0 \pmod{183}.
\end{aligned}$$

2 boda

U slučaju kada je n oblika $3k+1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), imamo

$$\begin{aligned}
13^{n+1} + 14^{2n-1} &= 13^{3k} \cdot 13^2 + 14^{6k} \cdot 14^1\\
&= (13^3)^k \cdot 13^2 + (14^3)^{2k} \cdot 14\\
&\equiv 1^k \cdot (-14) + (-1)^{2k} \cdot 14\\
&\equiv -14 + 14 \equiv 0 \pmod{183}.
\end{aligned}$$

2 boda

Konačno, u slučaju $n = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}_0$), imamo

$$\begin{aligned}
13^{n+1} + 14^{2n-1} &= 13^{3k+3} + 14^{6k+3}\\
&= (13^3)^{k+1} + (14^3)^{2k+1}\\
&\equiv 1^{k+1} + (-1)^{2k+1}\\
&\equiv 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{183}.
\end{aligned}$$

1 bod

Kako je izraz $13^{n+1} + 14^{2n-1}$ djeljiv sa 183 neovisno o ostatku koji broj n daje pri dijeljenju s 3, zaključujemo da je taj izraz djeljiv sa 183 za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena: Ako rješenje ne uključuje cijelu analizu djeljivosti traženog izraza u ovisnosti o ostatcima broja n pri dijeljenju s 3, nego samo jedan (odnosno dva) slučaja, ostvaruje najviše prva 3 boda (odnosno prvih 5 bodova) iz druge bodovne sheme.

Zadatak A-4.3.

Dokaži da je

$$(\sqrt{20} + \sqrt{23})^{2024} + \frac{3^{2024}}{(\sqrt{20} + \sqrt{23})^{2024}}$$

prirodan broj.

Rješenje.

Racionalizacijom slijedi

$$\frac{3}{\sqrt{20}+\sqrt{23}}=\sqrt{23}-\sqrt{20}.$$

Primjenom binomnog poučka imamo 1 bod

$$\left(\sqrt{20}+\sqrt{23}\right)^{2024}=\sum_{n=0}^{2024}\binom{2024}{n}\sqrt{20}^{n}\cdot\sqrt{23}^{2024-n},$$

te

$$\frac{3^{2024}}{(\sqrt{20}+\sqrt{23})^{2024}}=\left(\sqrt{23}-\sqrt{20}\right)^{2024}=\sum_{n=0}^{2024}\binom{2024}{n}(-1)^{n}\cdot\sqrt{20}^{n}\cdot\sqrt{23}^{2024-n}.$$ 1 bod

Zbrajanjem tih dvaju izraza izrazi uz parne indekse n se poklapaju, dok se oni s neparnim indeksom n krate. 2 boda

Korištenjem $n=2k$ traženi izraz možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}(\sqrt{20}+\sqrt{23})^{2024}+\frac{3^{2024}}{(\sqrt{20}+\sqrt{23})^{2024}}&=2\sum_{k=0}^{1012}\binom{2024}{2k}\sqrt{20}^{2k}\cdot\sqrt{23}^{2(1012-k)}\\&=2\sum_{k=0}^{1012}\binom{2024}{2n}20^{k}\cdot23^{1012-k}.\end{aligned}$$ 1 bod

Zadnji izraz očito je prirodan broj kao suma takvih, čime je tvrdnja zadatka dokazana. 1 bod

Napomena: Rješenje je moguće provesti bez korištenja oznaka za sumaciju na analogan način.

Zadatak A-4.4.

Članovi niza $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dobiveni su množenjem odgovarajućih članova dvaju aritmetičkih nizova. Prva tri člana tako nastalog niza su $x_1=1440$, $x_2=1716$ i $x_3=1848$. Odredi osmi član tog niza.

Rješenje.

Neka su $a, a+n, a+2n, \ldots$ i $b, b+m, b+2m, \ldots$ dva aritmetička niza. Iz uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{aligned}ab&=1440,\\(a+n)(b+m)&=ab+am+bn+nm=1716,\\(a+2n)(b+2m)&=ab+2am+2bn+4nm=1848.\end{aligned}$$ 1 bod

Uvedimo oznake $x=am+bn$ i $y=nm$. 1 bod

Uvrštavanjem prve jednadžbe u druge dvije, dobivamo sustav

$$\begin{aligned}x+y&=276,\\2x+4y&=408.\end{aligned}$$ 1 bod

Rješenje tog sustava je $x = 348, y = -72$. 1 bod

Osmi član niza zato iznosi

$$\begin{aligned}(a+7b)(a+7m) &= ab + 7(am+bn) + 49mn \\ &= ab + 7x + 49y \qquad \text{1 bod} \\ &= 1440 + 7 \cdot 348 + 49 \cdot (-72) = 348. \qquad \text{1 bod}\end{aligned}$$

Zadatak A-4.5.

U nekoj školi učenici mogu učiti dva klasična jezika: latinski i grčki. Od 100 učenika, njih 50 uči latinski, 40 grčki, a 20 ih uči oba jezika. Ako slučajno odaberemo dva učenika, kolika je vjerojatnost da barem jedan od njih uči latinski i barem jedan od njih uči grčki?

Prvo rješenje.

Iz navedenih informacija zaključujemo da u promatranoj školi 30 učenika uči samo latinski, 20 učenika samo grčki, 20 učenika uči i latinski i grčki te 30 učenika ne uči niti jedan od navedenih jezika. 1 bod

Slučajno odabrana dva učenika zadovoljavaju uvjet da barem jedan od njih uči latinski i barem jedan od njih uči grčki ako vrijedi jedno od sljedećeg:

a) barem jedan od odabrana dva učenika uči i latinski i grčki jezik,
b) jedan učenik uči samo latinski dok drugi učenik uči samo grčki jezik.

Kako su to disjunktni slučajevi, traženu vjerojatnost dobivamo kao zbroj vjerojatnosti događaja definiranih pod a) i b). 1 bod

Vjerojatnost pod a) možemo dobiti računajući komplement tog slučaja, tj. da među slučajno odabrana dva učenika niti jedan od njih ne uči i latinski i grčki jezik. Kako je u školi ukupno 80 učenika koji ne uče bar jedan od navedena dva jezika, broj (neuređenih) parova učenika koji ne uče oba jezika iznosi $\binom{80}{2}$. Kako ukupno postoji $\binom{100}{2}$ različitih parova učenika, zaključujemo da je vjerojatnost događaja pod a) jednaka

$$1 - \frac{\binom{80}{2}}{\binom{100}{2}}. \qquad \text{2 boda}$$

Za slučaj pod b) odgovarajući odabiri parova učenika moraju uključivati jednog učenika koji uči samo latinski i jednog učenika koji uči samo grčki. Takvih parova je $30 \cdot 20$. Kako ukupno postoji $\binom{100}{2}$ parova učenika, vjerojatnost slučaja b) iznosi

$$\frac{30 \cdot 20}{\binom{100}{2}}. \qquad \text{1 bod}$$

Zaključujemo, vjerojatnost da barem jedan učenik uči latinski i barem jedan grčki jezik prilikom slučajnog odabira dva učenika iznosi

$$1 - \frac{\binom{80}{2}}{\binom{100}{2}} + \frac{30 \cdot 20}{\binom{100}{2}} = \frac{239}{495}. \qquad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, zaključujemo da u promatranoj školi 30 učenika uči samo latinski, 20 učenika samo grčki, 20 učenika uči i latinski i grčki te 30 učenika ne uči niti jedan od navedenih jezika. 1 bod

Umjesto tražene vjerojatnosti p, odredimo vjerojatnost q komplementa tog događaja: nijedan od dva učenika ne uči latinski ili nijedan od dva učenika ne uči grčki. Vrijednost iz teksta zadatka jednaka je $p = 1 - q$. 1 bod

Vjerojatnost događaja q jednaka je vjerojatnosti da nijedan odabranih učenika ne uči latinski uvećana za vjerojatnost da nijedan ne uči grčki, te umanjena za slučaj u kojem oba učenika ne uče nijedan jezik. 1 bod

Kako je broj učenika koji ne uči latinski jednak $100 - 50 = 50$, vjerojatnost da dva slučajno odabrana učenika ne uče latinski jednaka je

$$\frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}}.$$ 1 bod

Slično, broj učenika koji ne uči grčki jednak je $100 - 40 = 60$, dok je broj učenika koji ne uči nijedan jezik jednak 30. Zato vjerojatnosti da nijedan od učenika ne uči grčki, odnosno da oba učenika ne uče niti jedan jezik iznose redom

$$\frac{\binom{60}{2}}{\binom{100}{2}}, \quad \frac{\binom{30}{2}}{\binom{100}{2}}.$$ 1 bod

Konačno, imamo

$$q = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} + \frac{\binom{60}{2}}{\binom{100}{2}} - \frac{\binom{30}{2}}{\binom{100}{2}},$$

te je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = 1 - q = 1 - \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} - \frac{\binom{60}{2}}{\binom{100}{2}} + \frac{\binom{30}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{239}{495}.$$ 1 bod

Napomena: U prvom rješenju vjerojatnost pod a) moguće je izračunati i kao zbroj vjerojatnosti događaja u kojem jedan učenik uči oba jezika, a drugi ne, te vjerojatnosti događaja u kojem oba učenika uče oba jezika. Te vjerojatnosti iznose redom

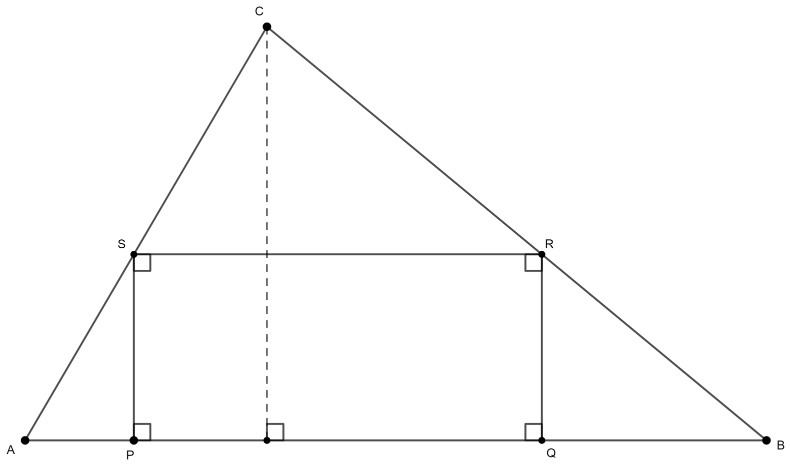
$$\frac{20 \cdot 80}{\binom{100}{2}}, \quad \frac{\binom{20}{2}}{\binom{100}{2}}.$$

U drugom rješenju račun za vjerojatnost q trećim bodom opisana je računom triju drugih vjerojatnosti. Određivanje bilo koje od njih nosi 1 bod (u drugom rješenju to se odnosi na četvrti bod), dok određivanje i preostalih dviju nosi dodatni 1 bod (što odgovara petom bodu te bodovne sheme).

Zadatak A-4.6.

U trokut ABC površine 1 upisan je pravokutnik $PQRS$ tako da točke P i Q leže na stranici $\overline{AB}$, točka R na stranici $\overline{BC}$ i točka S na stranici $\overline{AC}$. Odredi najveći mogući iznos površine pravokutnika $PQRS$.

Rješenje.



Uvedimo oznake $c := |AB|$, $x := |PQ| = |RS|$, $y := |QR| = |PS|$. Dodatno, neka je h duljina visine trokuta ABC iz vrha C.

Iz $AB||RS$ zaključujemo da su trokuti ABC i SRC slični. 1 bod

Dodatno, kako je $AB||RS$ i $|QR| = y$, pravci na kojima visine iz C trokuta ABC i SRC se poklapaju, pa je zato duljina visine trokuta SRC iz vrha C jednaka $h - y$. 1 bod

Iz sličnosti trokuta ABC i SRC vrijedi da je omjer odgovarajućih duljina stranica jednak omjeru duljina visina iz vrha C. Zato imamo

$$\frac{|RS|}{|AB|} = \frac{h-y}{h}.$$

Koristeći oznake s početka rješenja, gornja jednakost postaje

$$x = \frac{c}{h}(h-y).$$ 1 bod

Označimo s P površinu pravokutnika $PQRS$. Tada je

$$P = xy = \frac{c}{h} \cdot y(h-y).$$ 2 boda

Gornji izraz promatramo kao kvadratnu funkciju po varijabli y. Ona ostvaruje maksimum u tjemenu, za vrijednost $y = \frac{h}{2}$. 2 boda

U tom slučaju vrijedi

$$P = \frac{c}{h} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{ch}{4} = \frac{1}{2},$$

budući da je površina trokuta ABC jednaka 1. 1 bod

Zato je gornja ograda na površinu pravokutnika $PQRS$ jednaka $\frac{1}{2}$.

Ta ograda se može postići u slučaju kada je $y = \frac{h}{2}$, što odgovara slučaju kada je pravac RS raspolavlja visinu iz vrha C, a time i stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. To je slučaj kada su točke R i S polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom, a P i Q njihove ortogonalne projekcije na pravac AB. 1 bod

Dakle, najveća moguća površina pravokutnika $PQRS$ iznosi $\frac{1}{2}$. 1 bod

Napomena: Bodovna shema strukturirana je na sljedeći način:

- odgovor da je traženi maksimum $\frac{1}{2}$, što nosi zadnji 1 bod iz bodovne sheme;
- dokaz da površina pravokutnika ne može biti veća od $\frac{1}{2}$, čemu odgovara prvih 8 bodova iz bodovne sheme;
- opis primjera odabira točaka P, Q, R i S za koje je površina pravokutnika $PQRS$ jednaka $\frac{1}{2}$, što nosi predzadnji 1 bod iz bodovne sheme.

Nakon što se površina pravokutnika $PQRS$ izrazi preko jedne varijable, dokaz da je njegova površina manja od $\frac{1}{2}$ može se provesti i korištenjem A–G nejednakosti.

Zadatak A-4.7.

Odredi sve uređene trojke (x, y, p) gdje je p prost, a x i y prirodni brojevi za koje vrijedi

$$p^x - 1 = y^3.$$

Rješenje.

Kad prebacimo 1 na desnu stranu i faktoriziramo ju, dobivamo

$$p^x = (y+1)(y^2 - y + 1).$$ 1 bod

Zaključujemo da je gornja jednakost zadovoljena ako je svaki od izraza $y+1$ i y^2-y+1 potencija broja p, odnosno postoje $a, b \in \mathbb{N}_0$ takvi da je

$$y + 1 = p^a \quad \text{i} \quad y^2 - y + 1 = p^b.$$ 2 boda

Uvrstimo li $y = p^a - 1$ u drugu jednadžbu, sređivanjem dobivamo

$$p^{2a} - 3p^a + 3 = p^b.$$ 1 bod

Svi izrazi u gornjoj jednakosti osim broja 3 djeljivi su manjim od brojeva p^a, p^b, pa zato i 3 mora biti djeljiv tim brojem. 2 boda

To je jedino moguće ako je manji od brojeva a i b jednak 0 ili 1, što vodi na 4 slučaja.

U prvom slučaju neka je $a = 0$. Tada je iz prethodne jednadžbe $y = p^a - 1 = 1 - 1 = 0$, što nije prirodan broj, pa time nismo dobili rješenje početne jednadžbe. 1 bod

U drugom slučaju neka je $b = 0$. Tada iz jednadžbe $y^2 - y + 1 = p^b$ dobivamo $y(y-1) = 0$, čije je jedino rješenje u prirodnom brojevima $y = 1$. Tada je $p^a = y + 1 = 2 = 2^1$. Uz provjeru, dobivamo jedno rješenje početne jednadžbe: $(x, y, p) = (1, 1, 2)$. 1 bod

U trećem slučaju neka je $a = 1$ (i $b \geqslant a$). Tada iz jednadžbe $p^{2a} - 3p^a + 3 = p^b$ vidimo da $p^a \mid 3$, odakle je $p = 3$. Tada je $y = p^a - 1 = 2$, odakle uz provjeru dobivamo dodatno rješenje početne jednadžbe: $(x, y, p) = (2, 2, 3)$. 1 bod

U zadnjem slučaju imamo $b = 1$ (i $a \geqslant b$). Na isti način dokažemo da je $p = 3$, odakle imamo $y^2 - y + 1 = p^b = 3$. Jedino prirodno rješenje ove jednadžbe je $y = 2$ što vodi prema već pronađenom rješenju $(x, y, p) = (2, 2, 3)$. 1 bod

Zato su sve uređene trojke (x, y, p) koje zadovoljavaju uvjete zadatka jednake

$$(1, 1, 2) \quad \text{i} \quad (2, 2, 3).$$

Napomena: Do rastava na četiri slučaja iz gornjeg rješenja moguće je doći traženjem najvećeg zajedničkog djelitelja primjenom Euklidovog algoritma na brojeve

$$y + 1 = p^a \quad \text{i} \quad y^2 - y + 1 = p^b.$$

Primjena Euklidovog algoritma nosi 1 bod, a zaključak da je taj djelitelj jednak 1 ili 3, te da je manji od brojeva $y + 1$, $y^2 - y + 1$ jednak 1 ili 3 nosi 2 boda.

Pronalazak svakog od rješenja $(1, 1, 2)$ i $(2, 2, 3)$ nosi po 1 bod, koji odgovaraju osmom i devetom bodu gornje bodovne sheme.