ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Zapišite izraz $\left[27^{-2m+3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{3-2m}\right]^{-2} : 81^{1+m} - 6 \cdot 81^{-3}$, gdje je m cijeli broj, u obliku potencije s pozitivnim eksponentom.

Rješenje.

Sredimo dani izraz:

$$\left[27^{-2m+3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{3-2m}\right]^{-2} : 81^{1+m} - 6 \cdot 81^{-3} = \qquad \text{2 boda}$$

$$= \left[3^{9-6m} \cdot 3^{4m-6}\right]^{-2} : 3^{4+4m} - 6 \cdot 3^{-12} = \qquad \text{1 bod}$$

$$= \left[3^{3-2m}\right]^{-2} : 3^{4+4m} - 6 \cdot 3^{-12} =$$

$$= 3^{4m-6} : 3^{4+4m} - 6 \cdot 3^{-12} = \qquad \text{1 bod}$$

$$= 3^{-10} - 6 \cdot 3^{-12} =$$

$$= 3^{-12} \cdot (3^2 - 6) = 3 \cdot 3^{-12} = 3^{-11} \qquad \text{1 bod}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-1.2.

Ako se broj stranica pravilnog mnogokuta poveća za 4, broj dijagonala poveća se za 94. Odredite broj dijagonala mnogokuta prije povećanja broja stranica.

Rješenje.

Označimo s n broj stranica mnogokuta, a s d broj njegovih dijagonala. Formula za računanje broja dijagonala pravilnog mnogokuta je $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$. 1 bod

Prema uvjetu iz zadatka slijedi jednadžba:

$$\frac{n(n-3)}{2} + 94 = \frac{(n+4)(n+1)}{2}.$$ 2 boda

Nakon sređivanja imamo redom:

$$\begin{aligned} n(n-3) + 188 &= (n+4)(n+1) \\ n^2 - 3n + 188 &= n^2 + 5n + 4 \\ 8n &= 184 \end{aligned}$$ 1 bod

Slijedi da je $n = 23$. 1 bod

Ukupni broj dijagonala jednak je $d = \dfrac{23 \cdot (23-3)}{2} = 230$. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Marko je potrošio 100 eura nakon što je dobio plaću. Pet dana nakon toga dobio je na lutriji $\frac{1}{4}$ od iznosa koji mu je preostao od plaće i potrošio je još 100 eura. Nakon petnaest dana dobio je $\frac{1}{4}$ od iznosa koji je tada imao i ponovno potrošio 100 eura. Na kraju je imao 800 eura više nego u trenutku dobivanja plaće. Koliku je plaću dobio Marko?

Rješenje.

Označimo s x iznos Markove plaće. Nakon potrošenih 100 eura Marko ima iznos od $x - 100$ eura. 1 bod

Nakon pet dana dobio je četvrtinu preostalog iznosa odnosno $\frac{1}{4} \cdot (x - 100)$ eura. Uz potrošenih još 100 eura tada ima
$(x-100) + \frac{1}{4} \cdot (x-100) - 100 = \frac{5}{4}x - 225$ eura. 1 bod

Nakon petnaest dana dobio je $\frac{1}{4} \cdot (\frac{5}{4}x - 225)$ eura pa tada ima ukupno $\frac{5}{4}x - 225 + \frac{1}{4}(\frac{5}{4}x - 225) = \frac{5}{4}(\frac{5}{4}x - 225)$ eura. 1 bod

Zatim ponovno troši još 100 eura i u konačnici ima 800 eura više nego na početku, što pišemo kao $\frac{5}{4}(\frac{5}{4}x - 225) - 100 = 800 + x$. 1 bod

Tada je redom:

$$\begin{aligned} \frac{25}{16}x - x &= 800 + 100 + \frac{1125}{4} \\ \frac{9}{16}x &= 900 + \frac{1125}{4} \\ 9x &= 18900 \\ x &= 2100 \end{aligned}$$

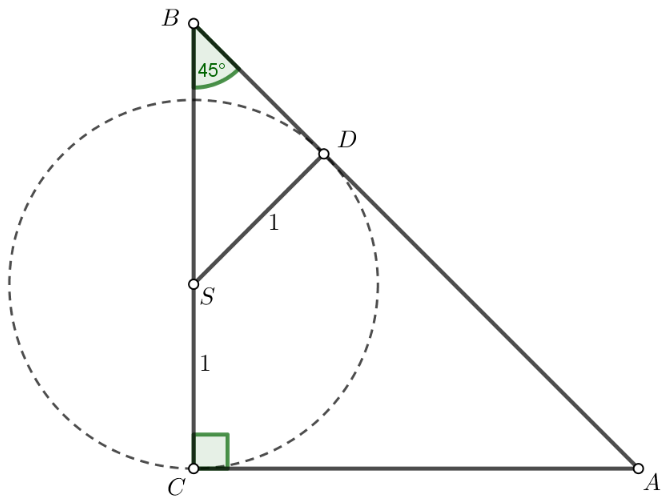
Dakle, iznos plaće koju je Marko dobio je 2100 eura. 2 boda

Napomena: Ako je učenik napravio manju računsku pogrešku, a ima dobar niz postavljenih jednakosti, oduzeti 1 bod.

Zadatak B-1.4.

Neka je ABC jednakokračni pravokutni trokut. Kružnica sa središtem na jednoj od kateta prolazi vrhom pravog kuta C i dodiruje hipotenuzu trokuta ABC. Odredite duljinu hipotenuze trokuta ABC ako je polumjer dane kružnice jednak 1.

Rješenje.



Skica 1 bod

Budući da kružnica dodiruje hipotenuzu pravokutnog trokuta, hipotenuza je tangenta te kružnice i polumjer u točki dirališta D okomit je na hipotenuzu. 1 bod

Kako je trokut ABC jednakokračan i pravokutan, kut pri vrhu B iznosi $45°$ te je trokut BSD također jednakokračan pravokutan trokut. 1 bod

Stoga je $|BD| = 1$, $|BS| = \sqrt{2}$, $|AC| = |BC| = 1 + \sqrt{2}$. 1 bod

Hipotenuza $|AB|$ trokuta ABC iznosi $|AB| = \sqrt{2(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} + 2$. 2 boda

Napomena: Umjesto Pitagorina poučka učenik može zaključiti da je točka S jednako udaljena od krakova kuta CAD odnosno da se nalazi na simetrali toga kuta i $|AD| = |AC| = 1 + \sqrt{2}$, a tada je hipotenuza jednaka $|AD| + |BD| = 2 + \sqrt{2}$.
To vrijedi 2 boda.

Zadatak B-1.5.

Niz od n bijelih i n crnih pločica složen je tako da se crne i bijele pločice pojavljuju naizmjence, a niz započinje bijelom pločicom. Cilj je presložiti pločice tako da sve crne pločice budu jedna pored druge na početku niza, a sve bijele pločice na kraju. Jedini dozvoljeni potez je zamjena susjednih pločica. Koliko je najmanje takvih zamjena potrebno da bi se da bi se postigao cilj?

Rješenje.

Prvi potez je zamjena prve dvije pločice. Poredak $BCBCBC\ldots$ prelazi u poredak $CBBCBC\ldots$. To je jedna zamjena. 1 bod

Nakon toga da bi se nova crna pločica dovela na drugu poziciju u nizu potrebne su najmanje sljedeće 2 zamjene: Poredak $CBBCBC\ldots$ prvo prelazi u poredak $CBCBBC\ldots$, a zatim u $CCBBBC\ldots$. 1 bod

Analogno, da bi se treća crna pločica dovela na treću poziciju potrebne su najmanje 3 zamjene: $CCBBCB\ldots \to CCBCBB\ldots \to CCCBBB\ldots$. Zaključujemo: da bi se n-ta crna pločica dovela na n-tu poziciju potrebno je najmanje n zamjena. 1 bod

Najmanji ukupan broj zamjena je tada $N = 1+2+3+4+5+\cdots+n$. 1 bod

Zapišimo zbroj N još jednom u obrnutom poretku pribrojnika, pa zatim zbrojimo obje jednakosti kao što slijedi:

$$
\begin{aligned}
N &= 1+2+3+4+5+\cdots+(n-1)+n, \\
N &= n+(n-1)+\cdots+5+4+3+2+1, \\
\Longrightarrow\ 2N &= (1+n)+(2+n-1)+\cdots+(n-1+2)+(n+1) = n(n+1).
\end{aligned}
$$

Odatle je $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 2 boda

Napomena: Nije dovoljno da učenik samo napiše da je ukupan broj zamjena jednak $1+2+3+\cdots+n$, mora to na neki način obrazložiti, skicom poretka pločica ili riječima. Ako nema obrazloženje treba oduzeti 3 boda — dobiva samo bod za zbroj.

Zbroj N točno izračunat na bilo koji način, uključujući i poznavanje formule, vrijedi 2 boda.

Zadatak B-1.6.

Znamenka desetica troznamenkastog broja je 9, a zbroj njegovih znamenaka djeljiv je sa 6. Zamijenimo li tom broju znamenke stotica i jedinica, novi je broj za 99 manji od dvostrukog početnog broja. Odredite početni troznamenkasti broj.

Prvo rješenje.

Dani troznamenkasti broj zapisujemo u obliku $\overline{a9b}$. Budući da su a i b znamenke različite od 0 i zbroj znamenaka je djeljiv sa 6, a manji od 27 vrijedi

$$a+9+b \in \{12,18,24\}\,,\text{ odnosno } a+b \in \{3,9,15\}\,. \qquad (\star)$$ 2 boda

Nadalje, prema uvjetu iz zadatka vrijedi $\overline{b9a} = 2 \cdot \overline{a9b} - 99$, odnosno

$$100b + 90 + a = 2(100a + 90 + b) - 99.$$ 1 bod

$$199a - 98b = 9. \qquad (\star\star)$$ 1 bod

Prema $(\star)$ imamo tri mogućnosti:

$$b = 3 - a \text{ ili } b = 9 - a \text{ ili } b = 15 - a.$$

Provjerimo sve tri uvrštavanjem u $(\star\star)$.

Ako je $b = 3 - a$, tada je redom:

$$199a - 98(3-a) = 9$$ 1 bod

$$199a - 294 + 98a = 9$$

$$297a = 303.$$

Ova jednadžba očito nema cjelobrojno rješenje. 1 bod

Ako je $b = 9 - a$, tada je redom:

$$199a - 98(9-a) = 9$$ 1 bod

$$199a - 882 + 98a = 9$$

$$297a = 891$$

$$\Longrightarrow \; a = 3,\; b = 9 - 3 = 6.$$ 1 bod

Ako je $b = 15 - a$, tada je redom:

$$199a - 98(15-a) = 9$$ 1 bod

$$199a - 1470 + 98a = 9$$

$$297a = 1479.$$

Posljednja jednadžba nema cjelobrojno rješenje jer je lijeva strana djeljiva s 9, a desna strana nije. 1 bod

Dakle, traženi troznamenkasti broj jednak je 396.

Drugo rješenje.

Budući da je $a, b \in \{1,2,3,\ldots,9\}$, zaključujemo kao i u prvom rješenju da je

$$a+9+b \in \{12,18,24\}\,, \text{ odnosno } a+b \in \{3,9,15\}\,. \qquad (\star) \qquad \text{2 boda}$$

Ako je $a+b=3$, tada je $(a,b) \in \{(1,2),(2,1)\}$. 1 bod

Ako je $a+b=9$, tada je $(a,b) \in \{(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2),(8,1)\}$. 1 bod

Ako je $a+b=15$, tada je $(a,b) \in \{(6,9),(7,8),(8,7),(9,6)\}$. 1 bod

Među navedenim mogućnostima tražimo uređeni par za koji vrijedi

$$\overline{b9a} = 2 \cdot \overline{a9b} - 99. \qquad \text{1 bod}$$

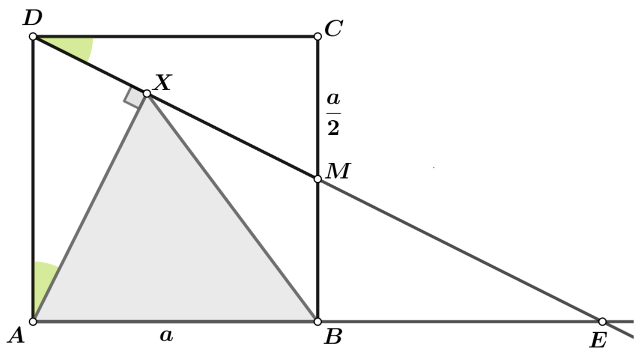
Direktnom provjerom dobiva se da je ova jednakost točna samo za $(a,b) = (3,6)$ odnosno da je traženi broj jednak 396. 4 boda

Napomena: Mora biti vidljiva provjera barem za sve parove u kojima je $a < b$ da bi učenik dobio sva 4 boda predviđena za provjeru nabrojenih mogućnosti. Provjerom smatramo i ako su samo ispisani parovi troznamenkastih brojeva, bez računanja jer je za većinu njih dovoljno jasno da ne mogu zadovoljavati postavljeni uvjet. Primjerice: 798 i 897 te 699 i 966 očito ne zadovoljavaju uvjet zadatka. Ako je provjera vidljiva samo za par $(3,6)$, učenik u tom dijelu dobiva samo 1 bod umjesto 4 boda.

Zadatak B-1.7.

Neka je duljina stranice kvadrata $ABCD$ jednaka a. Točka M je polovište stranice $\overline{BC}$. Točka X je sjecište pravca MD i okomice povučene iz vrha A na pravac MD. Izračunajte opseg trokuta ABX u ovisnosti o duljini a.

Prvo rješenje.



Skica 1 bod

Neka je točka E sjecište pravaca AB i DM. Trokuti CDM i BEM su sukladni jer je $|CM| = |BM|$, $\sphericalangle CMD = \sphericalangle BME$ (vršni kutovi) i pravokutni su. 1 bod

Slijedi da je $|BE| = |CD| = a$. 1 bod

U pravokutnom trokutu AEX dužina $\overline{BX}$ je težišnica iz vrha X na hipotenuzu AE pa je $|BX| = \frac{1}{2}|AE| = a$. 1 bod

Po Pitagorinom poučku je $|DE| = \sqrt{|AD|^2 + |AE|^2} = a\sqrt{5}$. 1 bod

Površina pravokutnog trokuta AED je $P_{AED} = \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$. 1 bod

Istu površinu možemo izraziti pomoću hipotenuze $|DE|$ i visine $|AX|$:

$$P_{AED} = \frac{|DE| \cdot |AX|}{2}.$$ 1 bod

Izjednačimo li izraze za površinu trokuta AED dobivamo

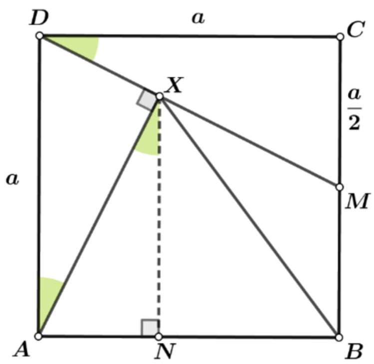
$$a^2 = \frac{|AX| \cdot a\sqrt{5}}{2},$$ 1 bod

odnosno $|AX| = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$. 1 bod

Traženi opseg trokuta ABX je konačno:

$$o = 2a + \frac{2\sqrt{5}}{5}a = 2a(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}).$$ 1 bod

Drugo rješenje.



Skica 1 bod

Prema Pitagorinom poučku je $|DM| = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. 1 bod

Povucimo sada visinu trokuta ABX iz vrha X.

Uočimo da su pravokutni trokuti AXD, DCM i NXA slični prema poučku KK. 1 bod

Iz sličnosti trokuta AXD i DCM slijedi redom

$$\frac{|AX|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|DM|}$$ 1 bod

$$\frac{|AX|}{a} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}$$

$$|AX| = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$ 1 bod

Iz sličnosti trokuta NXA i DCM slijedi redom

$$\frac{|AN|}{|CM|} = \frac{|AX|}{|DM|} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5}$$ 1 bod

$$|AN| = \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2a}{5},$$

a tada je $|NB| = \dfrac{3a}{5}$. 1 bod

Analogno iz $\frac{|NX|}{|CD|} = \frac{|AX|}{|DM|} = \frac{4}{5}$ slijedi $|NX| = a \cdot \frac{4}{5} = \frac{4a}{5}$. 1 bod

Po Pitagorinom poučku je $|BX| = \sqrt{|BN|^2 + |NX|^2} = a$. 1 bod

Konačno, opseg trokuta ABX je $o = 2a + \frac{2\sqrt{5}}{5}a = 2a(1 + \frac{\sqrt{5}}{5})$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite vrijednost brojevnog izraza $\sqrt{2}+\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}-1\right)^3-\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Rješenje.

Racionalizirajmo najprije nazivnike zadanih razlomaka.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3\cdot\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}{2+1}=\sqrt[3]{2}+1$$ 2 boda

$$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}-1$$ 2 boda

Uvrstimo dobivene vrijednosti u početni brojevni izraz i izračunajmo.

$$\sqrt{2}+\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}-1\right)^3-\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=$$

$$\sqrt{2}+\left(\sqrt[3]{2}+1-1\right)^3-\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$\sqrt{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\sqrt{2}+1=$$

$$\sqrt{2}+2-\sqrt{2}+1=$$

3 2 boda

Zadatak B-2.2.

Cijena mobitela prije prvoga sniženja iznosila je 200 €. Budući da se mobitel nije prodao nakon što mu je cijena prvi put snižena, prodavač je cijenu još jednom snizio za isti postotak. Ako konačna cijena mobitela iznosi 162 €, koliko je iznosila cijena mobitela nakon prvoga sniženja?

Prvo rješenje.

Označimo s x % traženi postotak.

Nakon prvoga sniženja cijena mobitela iznosi $200-x\ \%\cdot 200=200-2x$. 1 bod

Nakon drugoga sniženja cijena mobitela iznosi:

$200-2x-x\ \%\cdot(200-2x)=200-2x-2x+0.02x^2=0.02x^2-4x+200.$ 1 bod

Znamo da je konačna cijena mobitela jednaka 162 € pa rješavanjem kvadratne jednadžbe odredimo traženi postotak.

$0.02x^2 - 4x + 200 = 162$ 1 bod

$0.02x^2 - 4x + 38 = 0 \backslash \cdot 50$

$x^2 - 200x + 1900 = 0$

Dobivena rješenja iznose $x_1 = 10$ i $x_2 = 190$. 1 bod

Kako cijena ne može biti snižena za više od 100 %, zaključujemo da je cijena oba puta umanjena za 10 %. 1 bod

Cijena mobitela nakon prvoga sniženja iznosila je $200 - 2 \cdot 10 = 180$ €. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo s x % traženi postotak.

Nakon prvoga sniženja cijena mobitela iznosi $200\left(1 - \frac{x}{100}\right)$. 1 bod

Nakon drugoga sniženja cijena mobitela iznosi:

$200\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 200\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$. 1 bod

Budući konačna cijena mobitela iznosi 162 €, rješavanjem jednadžbe

$200\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 162$ dobivamo traženi postotak. 1 bod

$200\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 162 \backslash : 200$

$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{81}{100}$

1. slučaj:

$1 - \frac{x}{100} = \frac{9}{10}$

$x = 10$ 1 bod

Cijena je snižena za 10 % pa cijena mobitela nakon prvoga sniženja iznosi:

$200 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 180$ €. 1 bod

2. slučaj:

$1 - \frac{x}{100} = -\frac{9}{10}$

$x = 190$

Cijena ne može biti snižena za 190 % pa u ovome slučaju nema rješenja. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Kvadratna funkcija f pozitivna je samo na intervalu $\langle -2,\ 3\rangle$, a kvadratna funkcija g pozitivna je samo na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 5, +\infty\rangle$. Broj 1 nultočka je rastuće linearne funkcije h. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi $\dfrac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} > 0$.

Prvo rješenje.

Rastuća linearna funkcija h pozitivna je na intervalu $\langle 1,\ +\infty\rangle$, a negativna na intervalu $\langle -\infty,\ 1\rangle$. 1 bod

Odredimo predznake funkcija f, g i h na svakome pojedinom intervalu.

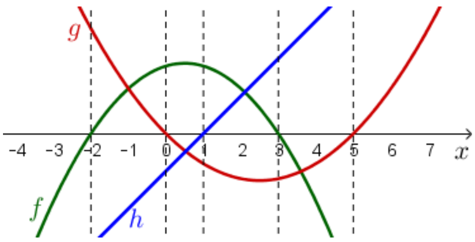
	f	g	h	$\frac{f\cdot g}{h}$
$\langle -\infty,\ -2\rangle$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\langle -2,\ 0\rangle$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\langle 0,\ 1\rangle$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\langle 1,\ 3\rangle$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\langle 3,\ 5\rangle$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\langle 5,\ +\infty\rangle$	$-$	$+$	$+$	$-$

3 boda

Zaključujemo da je $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)} > 0$ za $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0,\ 1\rangle \cup \langle 3,\ 5\rangle$. 2 boda

Drugo rješenje.

Skicirajmo grafove funkcija f, g i h.



1 bod

Umnožak $f(x)\cdot g(x)$ pozitivan je ako su vrijednosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$ obje pozitivne ili obje negativne, a to se postiže za $x \in \langle -2,\ 0\rangle \cup \langle 3,\ 5\rangle$. Zaključujemo da je umnožak $f(x)\cdot g(x)$ negativan za $x \in \langle -\infty,\ -2\rangle \cup \langle 0,\ 1\rangle \cup \langle 5,\ +\infty\rangle$. 2 boda

Rastuća linearna funkcija h pozitivna je na intervalu $\langle 1,\ +\infty\rangle$, a negativna na intervalu $\langle -\infty,\ 1\rangle$. 1 bod

Vrijedi da je $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)} > 0$ ako su umnožak $f(x)\cdot g(x)$ i funkcija $h(x)$ istovremeno pozitivni ili istovremeno negativni. Kako su $f(x)\cdot g(x)$ i $h(x)$ pozitivni za $x \in \langle 3,\ 5\rangle$, a negativni za $x \in \langle -\infty,\ -2\rangle \cup \langle 0,\ 1\rangle$, zaključujemo da je $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)} > 0$ za

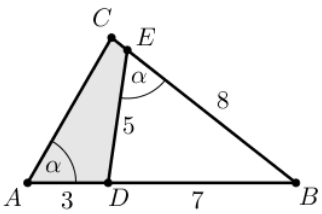
$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0,\ 1\rangle \cup \langle 3,\ 5\rangle$. 2 boda

Zadatak B-2.4.

Zadan je trokut ABC. Točka D nalazi se na stranici $\overline{AB}$, a točka E na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC tako da je $|AD| = 3$ cm, $|BD| = 7$ cm, $|BE| = 8$ cm, $|DE| = 5$ cm i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEB$. Kolika je površina četverokuta $ADEC$?

Prvo rješenje.

Skicirajmo trokut i označimo sve zadane elemente. 1 bod



Trokuti ABC i EBD slični su po KK poučku o sličnosti jer imaju dva para sukladnih kutova ($\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEB$, $\sphericalangle CBA$ im je zajednički).

Koeficijent sličnosti tih trokuta iznosi $k = \dfrac{|AB|}{|BE|} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$. 1 bod

Površinu trokuta EBD računamo koristeći Heronovu formulu:

$P(\triangle EBD) = \sqrt{10 \cdot (10-8) \cdot (10-7) \cdot (10-5)} = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 10\sqrt{3}$ cm^2. 1 bod

Za površine sličnih trokuta vrijedi da je $\dfrac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle EBD)} = k^2$.

Površina trokuta ABC iznosi:

$P(\triangle ABC) = P(\triangle EBD) \cdot k^2 = 10\sqrt{3} \cdot k^2 = 10\sqrt{3} \cdot \dfrac{25}{16} = \dfrac{125\sqrt{3}}{8}$ cm^2. 2 boda

Površina četverokuta $ADEC$ iznosi:

$P(ADEC) = P(\triangle ABC) - P(\triangle EBD) = \dfrac{125\sqrt{3}}{8} - 10\sqrt{3} = \dfrac{45\sqrt{3}}{8}$ cm^2. 1 bod

Drugo rješenje.

Skicirajmo trokut i označimo sve zadane elemente kao u prvome rješenju. 1 bod

Prema poučku o kosinusu vrijedi da je $\cos\alpha = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$ iz čega slijedi da je $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Površina trokuta EBD iznosi:

$P(\triangle EBD) = \dfrac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |BE| \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ cm^2. 1 bod

Trokuti ABC i EBD slični su po KK poučku o sličnosti jer imaju dva para sukladnih kutova ($\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEB$, $\sphericalangle CBA$ im je zajednički).

Zbog sličnosti vrijedi $\dfrac{|AC|}{10} = \dfrac{5}{8}$ pa je $|AC| = \dfrac{25}{4}$cm.

Površina trokuta ABC iznosi: $P(\triangle ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot \dfrac{25}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{125\sqrt{3}}{8}$ cm^2. 2 boda

Površina četverokuta $ADEC$ iznosi:

$$P(ADEC) = P(\triangle ABC) - P(\triangle EBD) = \frac{125\sqrt{3}}{8} - 10\sqrt{3} = \frac{45\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2.$$ 1 bod

Zadatak B-2.5.

Sto kartica označeno je brojevima od 1 do 100 tako da je na svakoj kartici isti broj otisnut na obje strane. Jedna strana svake kartice crvene je boje, dok je druga strana plave boje. Ana je najprije postavila sve kartice na stol crvenom stranom prema gore, a zatim je okrenula sve kartice na kojima su brojevi djeljivi s 2. Nakon toga je pregledala sve kartice i okrenula svaku karticu na kojoj je broj djeljiv s 3. Koliko je kartica okrenuto crvenom stranom prema gore nakon što je Ana završila s okretanjem kartica?

Prvo rješenje.

U početku je svih 100 kartica postavljeno crvenom stranom prema gore. Nakon što Ana prvi put okrene kartice, 50 kartica s parnim brojevima okrenuto je plavom stranom prema gore, dok je 50 kartica s neparnim brojevima i dalje okrenuto crvenom stranom prema gore. 1 bod

Tijekom drugog okretanja Ana okreće sve kartice na kojima se nalazi broj djeljiv s 3. Prilikom ovog okretanja Ana će svaku karticu s neparnim brojem djeljivim s 3 postaviti tako da bude okrenuta plavom stranom prema gore. Između 1 i 100 nalazi se 17 neparnih brojeva koji su djeljivi s 3 (to su brojevi: 3, 9, 15, 21, ... , 93 i 99). 1 bod

Istovremeno, Ana će svaku karticu s parnim brojem djeljivim s 3 postaviti tako da ponovno bude okrenuta crvenom stranom prema gore. Između 1 i 100 nalazi se 16 parnih brojeva koji su djeljivi sa 3 (to su brojevi: 6, 12, 18, 24, ... , 90 i 96). 2 boda

Konačno, nakon drugoga okretanja $50 - 17 + 16 = 49$ kartica postavljeno je crvenom stranom prema gore. 2 boda

Drugo rješenje.

Nakon što je Ana prvi put okrenula kartice, kartice s parnim brojevima okrenute su plavom stranom prema gore, dok su kartice s neparnim brojevima okrenute crvenom stranom prema gore.

1	**2**	3	**4**	5	**6**	7	**8**	9	**10**
11	**12**	13	**14**	15	**16**	17	**18**	19	**20**
21	**22**	23	**24**	25	**26**	27	**28**	29	**30**
31	**32**	33	**34**	35	**36**	37	**38**	39	**40**
41	**42**	43	**44**	45	**46**	47	**48**	49	**50**
51	**52**	53	**54**	55	**56**	57	**58**	59	**60**
61	**62**	63	**64**	65	**66**	67	**68**	69	**70**
71	**72**	73	**74**	75	**76**	77	**78**	79	**80**
81	**82**	83	**84**	85	**86**	87	**88**	89	**90**
91	**92**	93	**94**	95	**96**	97	**98**	99	**100**

2 boda

Ana je prilikom drugoga okretanja promijenila boju gornje strane kartica na kojima se nalazi višekratnik broja 3.

1	**2**	**3**	**4**	5	6	7	**8**	**9**	**10**
11	12	13	**14**	**15**	**16**	17	18	19	**20**
21	**22**	23	24	25	**26**	**27**	**28**	29	30
31	**32**	**33**	**34**	35	36	37	**38**	**39**	**40**
41	42	43	**44**	**45**	**46**	47	48	49	**50**
51	**52**	53	54	55	**56**	**57**	**58**	59	60
61	**62**	**63**	**64**	65	66	67	**68**	**69**	**70**
71	72	73	**74**	**75**	**76**	77	78	79	**80**
81	**82**	83	84	85	**86**	**87**	**88**	89	90
91	**92**	**93**	**94**	95	96	97	**98**	**99**	**100**

2 boda

Prebrojavanjem odredimo da je 49 kartica okrenuto crvenom stranom prema gore. 2 boda

Napomena: Učeniku koji na bilo koji način odredi boju svake od kartica i točno prebroji koliko je kartica okrenuto crvenom stranom prema gore treba priznati svih 6 bodova.

Zadatak B-2.6.

Zadan je kvadrat $ABCD$. U istoj ravnini izabrana je točka O takva da vrijedi $|OA| = |OB| = 5$ cm i $|OD| = \sqrt{13}$ cm. Koliko iznosi duljina stranice toga kvadrata?

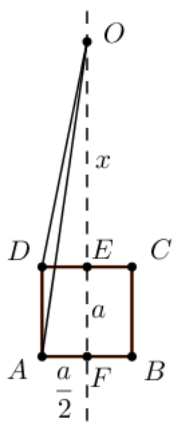
Rješenje.

Skicirajmo najprije zadani kvadrat $ABCD$ stranice duljine a, u slučaju da je točka O izvan kvadrata.

Iz jednakosti duljina dužina $|OA| = |OB| = 5$ cm zaključujemo da je trokut ABO jednakokračan s osnovicom $\overline{AB}$, što znači da se točka O nalazi na simetrali stranice $\overline{AB}$.

Neka je točka E sjecište simetrale i stranice $\overline{CD}$, a točka F sjecište simetrale i stranice $\overline{AB}$. Uočimo da su točke E i F polovišta stranica kvadrata kojima pripadaju, odnosno, vrijedi da je $|AF| = |DE| = \dfrac{a}{2}$. 1 bod

Kako je $|OD| = \sqrt{13}$ cm $<$ |OA|, zaključujemo da se točka O nalazi na simetrali izvan kvadrata bliže stranici $\overline{CD}$ nego stranici $\overline{AB}$.



1 bod

Označimo $|OE| = x$ cm.

Za duljine stranica pravokutnoga trokuta DEO vrijedi $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = \sqrt{13}^2$, odnosno $\frac{a^2}{4} + x^2 = 13$. 1 bod

Za duljine stranica pravokutnoga trokuta AFO vrijedi $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (x+a)^2 = 5^2$, odnosno $\frac{a^2}{4} + x^2 + 2ax + a^2 = 25$. 1 bod

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\begin{cases} \frac{a^2}{4} + x^2 = 13 \\ \frac{a^2}{4} + x^2 + 2ax + a^2 = 25 \end{cases}$$

$13 + 2ax + a^2 = 25$

$2ax = 12 - a^2 / : 2a$

$x = \frac{12 - a^2}{2a} = \frac{6}{a} - \frac{a}{2}$ 2 boda

Uvrštavanjem x u gornju jednadžbu u sustavu dobivamo da je:

$\frac{a^2}{4} + \left(\frac{6}{a} - \frac{a}{2}\right)^2 = 13$

$\frac{a^2}{2} - 19 + \frac{36}{a^2} = 0 / \cdot 2a^2$

$a^4 - 38a^2 + 72 = 0$ 1 bod

$(a^2 - 2)(a^2 - 36) = 0$

1. slučaj: $a^2 = 2$, stranica kvadrata duljine je $a = \sqrt{2}$ cm.

Tada je $x = \frac{12 - 2}{2\sqrt{2}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

2. slučaj: $a^2 = 36$, stranica kvadrata duljine je $a = 6$ cm.

Tada je $x = \frac{12 - 36}{12} = \frac{-24}{12} = -2$ cm, što je nemoguće jer duljina stranice trokuta ne može biti negativan broj.

Zaključujemo da tražena duljina stranice iznosi $\sqrt{2}$ cm. 1 bod

U slučaju da je točka O unutar kvadrata, duljina $|OF| = a - x$, ali se analognim postupkom dolazi do iste konačne jednadžbe. Iz te jednadžbe proizlaze ista rješenja, ali se pri odabiru duljine stranice kvadrata uzima 6 cm. 2 boda

Zadatak B-2.7.

Zadane su funkcije $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$ i $g(x) = |2x - 4| - 6$. Kolika je površina trokuta kojemu su dva vrha sjecišta grafova funkcija f i g, a treći je vrh trokuta točka minimuma funkcije g?

Prvo rješenje.

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$.

Odredimo najprije koordinate njezina tjemena.

$$x_T = -\frac{b}{2a} = 6, \quad y_T = \frac{4ac - b^2}{4a} = 7$$

Tjeme funkcije f točka je $T(6,\ 7)$. 1 bod

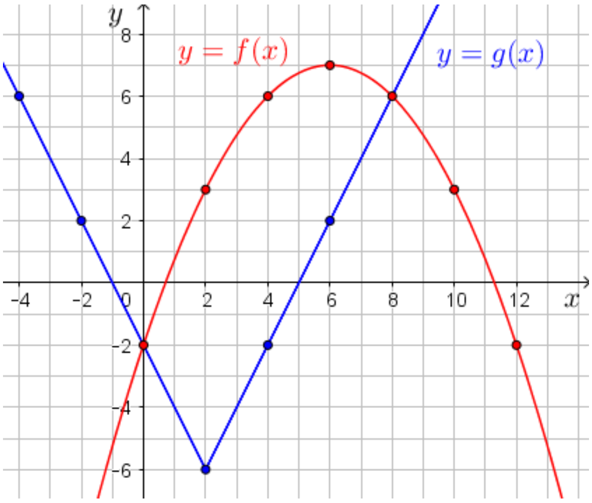
Odredimo nekoliko točaka koje pripadaju grafu funkcije f pa skicirajmo traženi graf. 2 boda

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	-2	3	6	7	6	3	-2

U istome koordinatnom sustavu nacrtajmo i graf funkcije $g(x) = |2x - 4| - 6$. 2 boda

U tablici su prikazane izračunate vrijednosti funkcije g za neke argumente x.

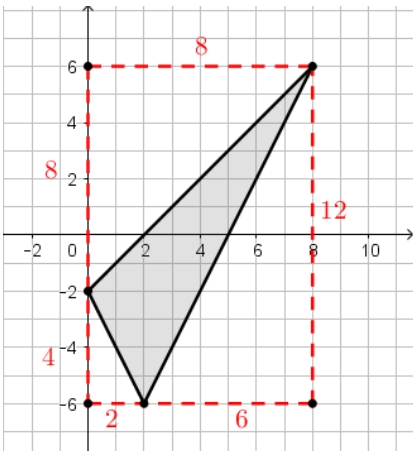
x	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	6	2	-2	-6	-2	2	6



Točka minimuma funkcije g je $(2,\ -6)$. 1 bod

Sjecišta grafova funkcija f i g točke su koje pripadaju i jednome i drugome grafu, a to su točke s koordinatama $(0,\ -2)$ i $(8,\ 6)$. 1 bod

Skicirajmo trokut s vrhovima $(2,\ -6)$, $(0,\ -2)$ i $(8,\ 6)$ te mu odredimo površinu.



1 bod

Površina trokuta iznosi:

$P = 12 \cdot 8 - \dfrac{8 \cdot 8}{2} - \dfrac{12 \cdot 6}{2} - \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 24$ kvadratne jedinice. 2 boda

Napomena: Učenik koji je koordinate sjecišta očitao s grafa bez provjere da točke uistinu pripadaju grafovima obiju funkcija može dobiti najviše 9 bodova.

Drugo rješenje.

Koordinate sjecišta funkcija $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 3x - 2$ i $g(x) = |2x-4| - 6$ mogu se odrediti rješavanjem jednadžbe $f(x) = g(x)$.

$-\dfrac{1}{4}x^2 + 3x - 2 = |2x - 4| - 6$ 1 bod

1. slučaj: za $2x - 4 \geqslant 0$, odnosno $x \geqslant 2$:

$-\dfrac{1}{4}x^2 + 3x - 2 = 2x - 4 - 6$

$-\dfrac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0 / \cdot 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+4) = 0$

Rješenje ove jednadžbe samo je $x = 8$ (jer $x = -4$ ne zadovoljava uvjet $x \geqslant 2$).

$f(8) = g(8) = 6$

Koordinate jednoga sjecišta su $(8,\ 6)$. 2 boda

2. slučaj: za $2x - 4 < 0$, odnosno $x < 2$:

$-\dfrac{1}{4}x^2 + 3x - 2 = -2x + 4 - 6$

$\dfrac{1}{4}x^2 - 5x = 0 / \cdot 4 \Rightarrow x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x(x - 20) = 0$

Rješenje ove jednadžbe samo je $x = 0$ (jer $x = 20$ ne zadovoljava uvjet $x < 2$).

$f(0) = g(0) = -2$

Koordinate drugoga sjecišta su $(0,\ -2)$. 2 boda

Kako je $g(x) = |2x - 4| - 6 \geqslant 0 - 6 = -6$ za svaki realni broj x, zaključujemo da je -6 minimum funkcije g. Kako bismo odredili x za koji se taj minimum postiže, riješimo jednadžbu $g(x) = -6$.

$|2x - 4| - 6 = -6$

$|2x - 4| = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Točka minimuma funkcije g jest $(2,\ -6)$. 2 boda

Konačno, odredimo površinu trokuta s vrhovima $(2,\ -6)$, $(0,\ -2)$ i $(8,\ 6)$ kao u prvome načinu rješavanja: $P = 24$ kvadratne jedinice. 3 boda

Napomena: Površina trokuta može se izračunati koristeći formulu sa zadanim koordinatama vrhova:

$P = \dfrac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| = \dfrac{1}{2}|32 + 0 + 16| = 24$ kv. jedinice.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Ako je $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$, koliko je $\frac{(\cos x - 1 + \sin x)(\cos x + 1 - \sin x)}{\cos x - \cos x \sin x}$?

Prvo rješenje.

Ako u brojniku zadanog izraza uočimo razliku kvadrata ili pomnožimo zagrade, a u nazivniku izlučimo $\cos x$ dobivamo redom:

$$\frac{(\cos x - 1 + \sin x)(\cos x + 1 - \sin x)}{\cos x - \cos x \sin x} = \frac{[\cos x - (1 - \sin x)][\cos x + (1 - \sin x)]}{\cos x(1 - \sin x)} =$$

$$\frac{\cos^2 x - (1 - \sin x)^2}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{\cos^2 x - 1 + 2\sin x - \sin^2 x}{\cos x(1 - \sin x)}.$$ 2 boda

Nakon primjene osnovnog trigonometrijskog identiteta $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ slijedi

$$\frac{\cos^2 x - 1 + 2\sin x - \sin^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{-\sin^2 x + 2\sin x - \sin^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} =$$ 1 bod

$$\frac{2\sin x - 2\sin^2 x}{\cos x(1 - \sin x)}.$$ 1 bod

Nakon toga u brojniku izlučimo $2\sin x$, skratimo razlomak i primijenimo zadanu jednakost.

$$\frac{2\sin x - 2\sin^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{2\sin x(1 - \sin x)}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{2\sin x}{\cos x} =$$ 1 bod

$$2\operatorname{tg} x = \frac{2}{\operatorname{ctg} x} = 4.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Kako je $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2}$ slijedi $\sin x = 2\cos x$. 1 bod

Uvrstimo li $\sin x = 2\cos x$ u dani izraz slijedi

$$\frac{(\cos x - 1 + \sin x)(\cos x + 1 - \sin x)}{\cos x - \cos x \sin x} = \frac{(\cos x - 1 + 2\cos x)(\cos x + 1 - 2\cos x)}{\cos x - \cos x \cdot 2\cos x} =$$

$$\frac{(3\cos x - 1)(1 - \cos x)}{\cos x - 2\cos^2 x} = \frac{4\cos x - 3\cos^2 x - 1}{\cos x - 2\cos^2 x}.$$ 1 bod

Nakon primjene osnovnog trigonometrijskog identiteta $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ imamo

$$\frac{4\cos x - 3\cos^2 x - 1}{\cos x - 2\cos^2 x} = \frac{4\cos x - 3\cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - 2\cos^2 x} = \frac{4\cos x - 4\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - 2\cos^2 x}.$$ 1 bod

Nadalje uvrstimo li $\sin^2 x = 4\cos^2 x$ dobivamo

$$\frac{4\cos x - 4\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - 2\cos^2 x} = \frac{4\cos x - 4\cos^2 x - 4\cos^2 x}{\cos x - 2\cos^2 x} = \frac{4\cos x - 8\cos^2 x}{\cos x - 2\cos^2 x}.$$ 2 boda

Izlučimo zajedničke faktore u brojniku i nazivniku i skratimo razlomak:

$$\frac{4\cos x - 8\cos^2 x}{\cos x - 2\cos^2 x} = \frac{4\cos x(1 - 2\cos x)}{\cos x(1 - 2\cos x)} = 4.$$ 1 bod

Treće rješenje.

Iz činjenice da je $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2}$ slijedi redom

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{4},$$ 1 bod

$$4 - 4\sin^2 x = \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{4}{5},$$

$$\sin x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$ 1 bod

$$\cos x = \frac{1}{2}\sin x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$ 1 bod

Uvrstimo li dobivene vrijednosti s pozitivnim predznakom u dani izraz slijedi:

$$\frac{(\cos x - 1 + \sin x)(\cos x + 1 - \sin x)}{\cos x - \cos x \sin x} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{5} - 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1\right)\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5} - \frac{3}{5} - 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{8}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5}}$$ 1 bod

$$\frac{4\left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5}} = 4.$$ 1 bod

Uvrstimo li dobivene vrijednosti s negativnim predznakom u dani izraz slijedi:

$$\frac{(\cos x-1+\sin x)(\cos x+1-\sin x)}{\cos x-\cos x\sin x}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}+1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

$$=\frac{\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}-1\right)\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2}{5}}=\frac{-\frac{3\sqrt{5}}{5}-\frac{3}{5}-1-\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2}{5}}=\frac{-\frac{4\sqrt{5}}{5}-\frac{8}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2}{5}}$$

$$\frac{4\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2}{5}\right)}{-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2}{5}}=4.$$ 1 bod

Zadatak B-3.2.

Riješite jednadžbu: $\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+5}-\frac{5x^{\frac{1}{4}}-15}{x^{\frac{1}{4}}-5}=\frac{50}{x^{\frac{1}{2}}-25}$.

Rješenje.

Uočimo da je najmanji zajednički nazivnik svih razlomaka u jednadžbi jednak

$$\left(x^{\frac{1}{4}}+5\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-5\right)=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2-5^2=x^{\frac{1}{2}}-25.$$

i pomnožimo njime danu jednadžbu. Dobivamo:

$$x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}-5\right)-\left(5x^{\frac{1}{4}}-15\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+5\right)=50,$$ 1 bod

pri čemu treba vrijediti uvjet $x \neq 625$.

Pojednostavnimo dobiveni izraz. Redom slijedi:

$$x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}-5x^{\frac{1}{2}}-25x^{\frac{1}{4}}+15x^{\frac{1}{4}}+75=50,$$ 1 bod

$$-4x^{\frac{1}{2}}-15x^{\frac{1}{4}}+25=0.$$ 1 bod

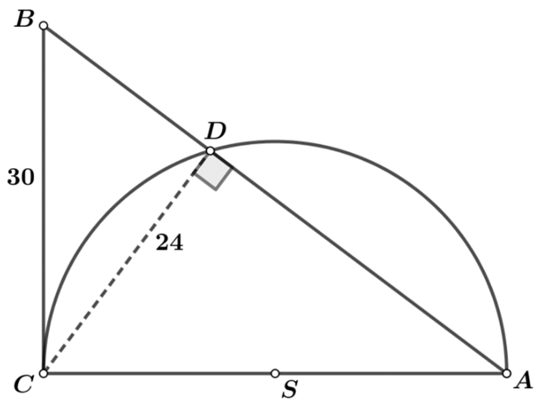
Uočimo da je $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2=x^{\frac{1}{2}}$, odnosno da je dobivena jednadžba kvadratna. Budući da je $x^{\frac{1}{4}} \geqslant 0$ za sve realne brojeve x, rješenje $x^{\frac{1}{4}}=-5$ nije moguće. 1 bod

Rješenje $x^{\frac{1}{4}}=\frac{5}{4}$ je pozitivno pa je konačno rješenje $x=\left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{625}{256}$. 2 boda

Zadatak B-3.3.

Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Dulja kateta $\overline{AC}$ promjer je polukružnice koja hipotenuzu siječe u točki D. Odredite duljinu polukružnice ako duljina manje katete iznosi 30 cm, a duljina tetive $\overline{CD}$ iznosi 24 cm.

Prvo rješenje.



Kut CDA je pravi kut jer je nad promjerom kružnice, pa su trokuti ADC i CDB pravokutni trokuti. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku vrijedi $|BD|^2 = |CB|^2 - |CD|^2 = 30^2 - 24^2 = 324$ pa je

$$|BD| = 18 \text{ cm.}$$ 1 bod

Ako kut u vrhu B označimo s β iz pravokutnog trokuta CDB slijedi

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}.$$ 1 bod

U pravokutnom trokutu ABC je $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{|AC|}{30}$. 1 bod

Tada je $\dfrac{|AC|}{30} = \dfrac{4}{3}$ pa je dulja kateta $|AC| = 40$ cm. 1 bod

Konačno, duljina polukružnice je $l = r\pi = 20\pi$ cm. 1 bod

Drugo rješenje.

Skica kao i u prvom rješenju.

Kut CDA je pravi kut jer je nad promjerom kružnice, pa su trokuti ADC i CDB pravokutni trokuti. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku vrijedi $|BD|^2 = |CB|^2 - |CD|^2 = 30^2 - 24^2 = 324$ pa je

$$|BD| = 18 \text{ cm.}$$ 1 bod

Primjenom Euklidova poučka slijedi $|CD|^2 = |BD| \cdot |DA|$. 1 bod

Sada je $24^2 = 18 \cdot |DA|$ pa je $|DA| = 32$. 1 bod

Dakle, hipotenuza $|AB|$ zadanog pravokutnog trokuta je $18 + 32 = 50$ cm, a prema Pitagorinom poučku za trokut ABC dulja kateta $|AC| = 40$ cm. 1 bod

Konačno, duljina polukružnice je $l = r\pi = 20\pi$ cm. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Restoran svojim gostima nudi za predjelo platu hladnih mesnih narezaka, riblju paštetu i salatu od povrća. Od juha gosti imaju na raspolaganju pileću juhu, goveđu juhu, riblju juhu, juhu od brokule i juhu od šparoga. Za glavno jelo nudi riblju, mesnu ili vegetarijansku platu, a za desert veganski kolač ili veganski sladoled. Ako gost bira od svakog slijeda po jedno jelo, kolika je vjerojatnost da će slučajnim odabirom jela dobiti potpuno vegetarijanski obrok (obrok bez mesa i ribe)?

Rješenje.

Skup svih elementarnih ishoda je skup svih mogućih odabira jela, odnosno skup svih mogućih uređenih četvorki oblika (predjelo, juha, glavno jelo, desert). 1 bod

Pri tome se predjelo može izabrati na 3 načina, juha na 5 načina, glavno jelo na 3 načina, a desert na 2 načina. Dakle, ukupno je $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 90$ ishoda. 2 boda

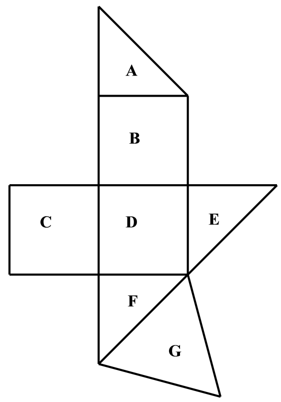
Kod ishoda koji odgovaraju događaju predjelo se može izabrati na 1 način, juha na 2 načina, glavno jelo na 1 način te desert na 2 načina.

Dakle, događaju odabran je vegetarijanski obrok odgovara $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ ishoda. 2 boda

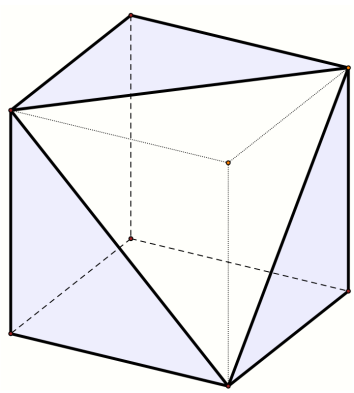
Iz svega navedenog tražena vjerojatnost jednaka je $\frac{4}{90} = \frac{2}{45}$. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Na slici je mreža geometrijskog tijela. Likovi A, E i F su jednakokračni pravokutni trokuti. Likovi B, C i D su kvadrati stranice duljine 1, a G je jednakostraničan trokut. Odredite obujam toga tijela.



Rješenje.



Uočimo da je zadana mreža geometrijskog tijela kojeg dobijemo ako od kocke odsiječemo pravilnu trostranu piramidu. (bodove nosi skica ili precizan opis geometrijskog tijela) 3 boda

Obujam ovog tijela računamo kao razliku obujma kocke i piramide $V = V_{\text{kocke}} - V_{\text{piramide}}$.

$$V_{\text{kocke}} = a^3 = 1,$$

$$V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{6}.$$ 2 boda

$$V = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$ 1 bod

Zadatak B-3.6.

Odredite sve parove realnih brojeva (x, y) koji su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ 2\log x + 2\log y = \log 9 + \log 25. \end{cases}$$

Rješenje.

Uvjeti na rješenja su $x > 0,\ y > 0$. 1 bod

Dani sustav ekvivalentan je sljedećem nizu sustava:

$$\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ \log x^2 + \log y^2 = \log 225. \end{cases} \implies \begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ \log(xy)^2 = \log 15^2. \end{cases} \implies \begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ (xy)^2 = 15^2. \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$$ 2 boda

Iz jednadžbe $y^{5x^2-51x+10} = 1$ slijedi $y = 1$ ili $5x^2 - 51x + 10 = 0$. 2 boda

Ako je $y = 1$ onda je $x = 15$ te je jedno rješenje uređeni par $(15, 1)$. 1 bod

Ako je $5x^2 - 51x + 10 = 0$, onda je $x = 10$ ili $x = \frac{1}{5}$. 2 boda

Iz $x = 10$ slijedi da je $y = \frac{3}{2}$, a iz $x = \frac{1}{5}$ slijedi da je $y = 75$.

Dakle, rješenja danog sustava su uređeni parovi $(15, 1)$, $\left(10, \frac{3}{2}\right)$ i $\left(\frac{1}{5}, 75\right)$. 2 boda

Zadatak B-3.7.

Ustanovljeno je da se tijekom školske godine broj izostanaka učenika trećeg razreda može opisati funkcijom $f(t) = 2^{t+a} + b$, gdje je t broj proteklih mjeseci od početka školske godine 1. rujna, $f(t)$ ukupan broj izostanaka u prvih t mjeseci, a a i b su konstante. Ove su godine učenici u studenom izostali 128 sati.

a) Nakon koliko će mjeseci učenici imati 4064 sati izostanaka?

b) Koliko su učenici imali neopravdanih izostanaka u prosincu ako je omjer opravdanih i neopravdanih izostanaka u prosincu bio 29 : 3?

Rješenje.

a) Odredimo prvo konstante a i b u funkciji $f(t) = 2^{t+a} + b$.
Da su učenici u studenom izostali 128 sati zapisujemo:

$$f(3) - f(2) = 128.$$ 1 bod

Tada je prema zadanome pravilu redom:

$$2^{3+a} + b - (2^{2+a} + b) = 128,$$

$$8 \cdot 2^a - 4 \cdot 2^a = 128,$$

$$4 \cdot 2^a = 128,$$ 1 bod

$$2^a = 32,$$

$$a = 5.$$ 1 bod

Budući da je na početku školske godine 0 izostanaka, vrijedi $f(0) = 2^a + b = 0$ pa je $b = -2^a$, odnosno $b = -32$. 1 bod

Tada je $f(t) = 2^{t+5} - 32$. Izračunajmo sad traženi broj mjeseci. Redom vrijedi:

$$2^{t+5} - 32 = 4064,$$

$$2^{t+5} = 4096,$$

$$2^{t+5} = 2^{12},$$ 1 bod

$$t + 5 = 12,$$

$$t = 7.$$

Nakon 7 mjeseci će imati 4096 sati izostanaka. 1 bod

b) U prosincu je izostanaka

$$f(4) - f(3) = 2^{4+5} + 32 - (2^{3+5} + 32) = 2^9 - 2^8 = 2^8(2-1) = 256.$$ 2 boda

Omjer opravdanih i neopravdanih izostanaka je $O : N = 29 : 3$.

$$O = 29k, \quad N = 3k,$$

$$29k + 3k = 256,$$

$$32k = 256,$$

$$k = 8.$$

Neopravdanih izostanaka je 24. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

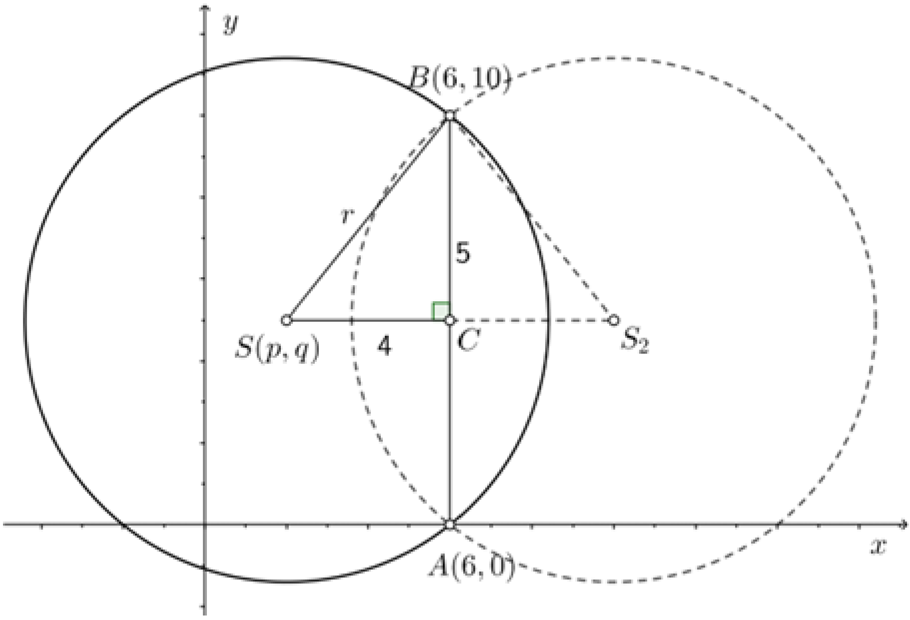
26. siječnja 2023.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Krajnje točke tetive kružnice k imaju koordinate $(6,0)$ i $(6,10)$. Odredite jednadžbu kružnice k ako je udaljenost njezina središta od tetive jednaka 4.

Rješenje.



Skica s jasno naznačenim pravokutnim trokutom čije su katete duljine 4 i 5 te zaključkom da je q očito jednak 5 — 2 boda

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut BSC dobivamo
$r=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$. — 1 bod

Kako točka C očito ima koordinate $(6,5)$ i kako je udaljenost središta kružnice od točke jednaka 4 zaključujemo da je $p=6-4=2$ ili $p=6+4=10$. — 2 boda

Dakle, imamo dva moguća rješenja:

$$k_1 \ldots (x-2)^2+(y-5)^2=41 \text{ i}$$
$$k_1 \ldots (x-10)^2+(y-5)^2=41.$$ — 1 bod

Zadatak B-4.2.

Neka su $z=x+2i$ i $w=3+yi$ kompleksni brojevi, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. Odredite najmanji pozitivni realni broj x za koji je razlomak $\dfrac{z+w}{z-w}$ imaginaran broj.

Rješenje.

Kompleksni broj $\frac{z+w}{z-w}$ je imaginaran ako i samo ako je njegov realni dio jednak nula. 1 bod

Odredimo stoga $\operatorname{Re}\left(\frac{z+w}{z-w}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{z+w}{z-w} &= \frac{x+2i+3+yi}{x+2i-3-yi} = \frac{x+3+(2+y)i}{x-3+(2-y)i} \cdot \frac{x-3-(2-y)i}{x-3-(2-y)i} && \text{1 bod} \\
&= \frac{(x^2-3^2)+(2^2-y^2)+i((x-3)(2+y)-(x+3)(2-y))}{(x-3)^2+(2-y)^2} && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

Tada je

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+w}{z-w}\right) = \frac{x^2-y^2-5}{(x-3)^2+(2-y)^2}. \qquad \text{1 bod}$$

Ovaj je izraz jednak nula ako i samo ako je brojnik jednak nula, odnosno $x^2-y^2-5=0$.

1 bod

Odatle je $x^2=y^2+5$, a najmanji pozitivan x dobijemo za $y=0$ i on iznosi $x=\sqrt{y^2+5}=\sqrt{5}$. 1 bod

Zadatak B-4.3.

Prvi, peti i jedanaesti član rastućeg aritmetičkog niza istovremeno su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Odredite sto dvanaesti član aritmetičkog niza, ako je njegov prvi član jednak 136.

Rješenje.

Prvi, peti i jedanaesti član aritmetičkog niza redom iznose: 136, $136+4d$, $136+10d$. 1 bod

Kako su to ujedno uzastopni članovi geometrijskog niza vrijedi jednakost

$$(136+4d)^2 = 136(136+10d). \qquad \text{2 boda}$$

Rješavanjem ove jednadžbe redom dobivamo:

$$
\begin{aligned}
136^2+1088d+16d^2 &= 136^2+1360d \\
16d^2-272d &= 0 \\
\Longrightarrow\ d_1 = 0,\ d_2 &= 17. && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

Budući da je niz strogo rastući, $d=17$. 1 bod

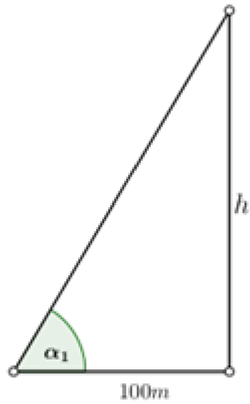
Traženi član aritmetičkog niza iznosi

$$a_{112} = a_1 + 111d = 136 + 111 \cdot 17 = 2023. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.4.

Tri su točke udaljene od podnožja uspravnog tornja redom 100, 200 i 300 metara te zajedno s podnožjem tornja leže u istoj ravnini. Odredite visinu tornja ako je zbroj kutova pod kojim se njegov vrh vidi iz tih točaka jednak 90°.

Prvo rješenje.



Skica

Neka je α_1 kut pod kojim se vrh tornja vidi iz točke horizontalno udaljene od podnožja 100 m. Tada vrijedi $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{100}$. Analogno, ako je α_2 kut pod kojim se vrh tornja vidi iz točke horizontalno udaljene 200 m i α_3 kut pod kojim se vrh tornja vidi iz točke horizontalno udaljene 300 m, onda vrijedi $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h}{200}$ i $\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{h}{300}$. 1 bod

Kako je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90°$, primjenom adicijskih formula dobivamo:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{tg}(90° - (\alpha_1 + \alpha_2)) = \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}. \quad (\star)$$ 2 boda

Ako u ovu jednakost uvrstimo prethodno navedene izraze za tangense, slijedi redom:

$$\frac{h}{300} = \frac{1 - \frac{h}{100} \cdot \frac{h}{200}}{\frac{h}{100} + \frac{h}{200}}$$ 1 bod

$$\frac{h}{300} = \frac{20000 - h^2}{300h}$$

$$h^2 = 10000$$ 1 bod

Dakle, visina tornja iznosi 100 metara. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su oznake kutova kao u prvom rješenju. Ponovno vrijedi formula $(\star)$. 2 boda

Kako je $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{100}$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h}{200}$, $\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{h}{300}$, zaključujemo da vrijedi

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 : \operatorname{tg} \alpha_3 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 6 : 3 : 2.$$ 1 bod

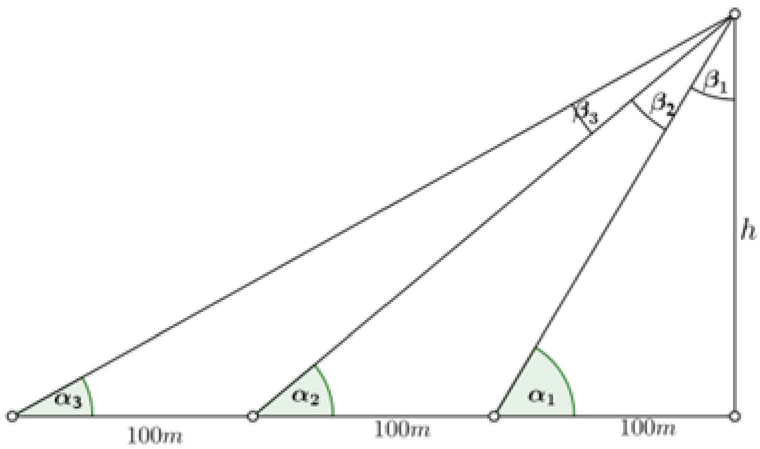
Dakle, vrijedi $\operatorname{tg} \alpha_1 = 6k$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = 3k$ i $\operatorname{tg} \alpha_3 = 2k$, za neki $k \in \mathbb{R}$. 1 bod

Uvrštavanjem ovih izraza u $(\star)$ dobivamo $2k = \frac{1-18k^2}{9k}$, odakle zaključujemo da je $k = \pm\frac{1}{6}$. Budući da su kutovi pod kojim vidimo toranj iz danih točaka šiljasti, tangens je pozitivan, te zaključujemo da je $k = \frac{1}{6}$. 1 bod

Konačno iz $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{100} = 6k = 1$ dobivamo da je visina tornja 100 metara. 1 bod

Treće rješenje.

Rješenje zadatka ne ovisi o položaju točaka horizontalno udaljenih od podnožja tornja iz kojih se promatra njegov vrh, jer se rotacijom uvijek mogu dovesti u položaj kao na slici:



Uz oznake kao na slici vrijedi $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 90^\circ - \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. 1 bod

Sada dobivamo da je $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \dfrac{300}{h}$. 1 bod

Nadalje, primjenom adicijske formule dobivamo:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{300}{h}.$$ 1 bod

Uvrstimo li $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{100}$ i $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{h}{200}$ u prethodnu jednakost dobivamo jednadžbu

$$\frac{\frac{h}{100} + \frac{h}{200}}{1 - \frac{h^2}{20000}} = \frac{300}{h}.$$ 1 bod

Rješavanjem ove jednadžbe slijedi da je $h^2 = 10000$. 1 bod

Dakle, visina tornja je $h = 100$ m. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Ako je $z = -\sin\dfrac{2022\pi}{5} - i\cos\dfrac{2023\pi}{5}$, koliko je z^{10}?

Rješenje.

Primjenom svojstava periodičnosti funkcija sinus i kosinus i formula redukcije imamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
z &= -\sin\frac{2022\pi}{5} - i\cos\frac{2023\pi}{5} \\
z &= -\sin\left(404\pi + \frac{2\pi}{5}\right) - i\cos\left(404\pi + \frac{3\pi}{5}\right) \\
z &= -\sin\frac{2\pi}{5} - i\cos\frac{3\pi}{5} && \text{1 bod} \\
z &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right) \\
z &= -\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{-\pi}{10} && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Nadalje, korištenjem svojstva neparnosti funkcije sinus zaključujemo da je

$$z = -\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}, \qquad \text{1 bod}$$

a kako je $\sin\frac{\pi}{10} = \sin\frac{9\pi}{10}$ i $\cos\frac{\pi}{10} = -\cos\frac{9\pi}{10}$ konačno dobivamo

$$z = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}. \qquad \text{1 bod}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
z^{10} &= \cos 9\pi + i\sin 9\pi && \text{1 bod} \\
&= \cos\pi + i\sin\pi = -1 && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Napomena: Učenik može rješenje ostaviti u trigonometrijskom ili standardnom zapisu.

Zadatak B-4.6.

Za koju vrijednost realnog broja x je zbroj trećeg i petog člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ manji ili jednak 135 ako je zbroj binomnih koeficijenata posljednja tri člana jednak 22?

Rješenje.

Iz činjenice da je zbroj binomnih koeficijenata posljednja tri člana jednak 22 dobivamo jednadžbu

$$\binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 22,$$

odakle primjenom svojstva simetrije binomnih koeficijenata zaključujemo da vrijedi

$$\binom{m}{2} + \binom{m}{1} + \binom{m}{0} = 22. \qquad \text{1 bod}$$

Nadalje, iz definicije binomnih koeficijenata dobivamo jednadžbu $\frac{m(m-1)}{2}+m+1=22$, što se pojednostavljuje do $m^2+m-42=0$. 1 bod

Rješenja ove jednadžbe su $m_1=6$, $m_2=-7$. Iz definicije binomnih koeficijenata slijedi da je $m \geqslant 2$, te stoga zaključujemo da je $m=6$. 1 bod

Iz $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\sqrt{2^x}\right)^{m-k}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^k$ i činjenice da je zbroj trećeg i petog člana manji ili jednak 135 dobivamo sljedeću nejednadžbu

$$\binom{6}{2}\left(\sqrt{2^x}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^2+\binom{6}{4}\left(\sqrt{2^x}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4 \leqslant 135.$$ 1 bod

Rješavanjem ove jednadžbe redom dobivamo:

$$15\cdot 2^{x+1}+\frac{15}{2^{x-2}} \leqslant 135$$ 2 boda

$$2^{x+1}+\frac{1}{2^{x-2}} \leqslant 9$$

$$2\cdot 2^{2x}-9\cdot 2^x+4 \leqslant 0.$$ 1 bod

Uz zamjenu $2^x=t$ dobivamo kvadratnu nejednadžbu $2t^2-9t+4 \leqslant 0$ čije je rješenje $t\in[\frac{1}{2},4]$. 2 boda

Konačno iz $\frac{1}{2} \leqslant 2^x \leqslant 4$ dobivamo $x\in[-1,2]$. 1 bod

Zadatak B-4.7.

Koliko ima neparnih sedmeroznamenkastih brojeva koji se sastoje od znamenki 2, 3 i 0 ako se svaka od tih znamenki u zapisu broja pojavljuje barem jednom?

Prvo rješenje.

Brojevi s opisanim svojstvima su neparni pa je zadnja znamenka 3. 1 bod

Kako na prvom mjestu ne može biti 0, imamo sljedeće dvije mogućnosti.

Prvi slučaj:
Na prvom mjestu je znamenka 2, a na zadnjem 3. Na preostalih 5 mjesta znamenke 0, 2 i 3 možemo rasporediti na ukupno 3^5 načina. 1 bod

Zbog danih uvjeta od toga ćemo broja oduzeti ukupan broj svih brojeva koji ne sadrže znamenku 0, a sadrže 2 ili 3. Takvih je brojeva 2^5. 1 bod

Dakle, imamo $3^5-2^5=211$ različitih brojeva s danim svojstvima i prvom znamenkom 2. 1 bod

Drugi slučaj:
I na prvom i na zadnjem je mjestu znamenka 3. Na preostalih 5 mjesta znamenke 0, 2 i 3 možemo rasporediti na ukupno 3^5 načina. 1 bod

Zbog danih uvjeta, od toga ćemo broja oduzeti ukupan broj svih brojeva koji ne sadrže bar jednu od znamenki 0 i 2.

Brojeva koji ne sadrže 0, a sadrže znamenke 2 ili 3 ima 2^5. 1 bod

Brojeva koji ne sadrže znamenku 2, a sadrže 0 ili 3 ima također 2^5. 1 bod

Ako te brojeve oduzmemo od 3^5, dvaput smo oduzeli broj sa 7 trojki pa ukupnom broju treba dodati broj 1. 1 bod

Dakle, imamo $3^5 - 2 \cdot 2^5 + 1 = 243 - 64 + 1 = 180$ različitih brojeva s danim svojstvima i prvom znamenkom 3. 1 bod

Konačno, ukupan broj brojeva s danim svojstvima je

$$3^5 - 2^5 + 3^5 - 2 \cdot 2^5 + 1 = 2 \cdot 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 1 = 211 + 180 = 391.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Brojevi s opisanim svojstvima su neparni pa je zadnja znamenka 3. 1 bod

Dakle, kako je znamenka 3 upotrjebljena, bez smanjenja općenitosti možemo tražiti koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od znamenki 0, 2 i 3 te koji sadrže barem jednu dvojku i barem jednu nulu. 1 bod

Broj šesteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od znamenki 0, 2 i 3 jednak je $2 \cdot 3^5$. 2 boda

Broj šesteroznamenkastih brojeva koji se sastoje samo od znamenki 2 i 3 jednak je 2^6.

1 bod

Broj šesteroznamenkastih brojeva koji se sastoje samo od znamenki 3 i 0 jednak je 2^5.

2 boda

Oduzmemo li od broja svih šesteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od znamenki 0, 2 i 3 broj svih onih među njima koji sadrže samo znamenke 2 i 3 i broj svih onih koji sadrže samo znamenke 3 i 0 dva puta smo oduzeli šesteroznamenkasti broj koji sadrži sve trojke. 2 boda

Dakle, konačno rješenje je $2 \cdot 3^5 - 2^6 - 2^5 + 1 = 2 \cdot 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 1 = 391$ broj. 1 bod

Treće rješenje.

Kao i u prvom rješenju razdvojimo prebrojavanje na slučaj kada imamo na početku znamenku 2, a na kraju 3 te slučaj kada su i na početku i na kraju znamenka 3.

Ako je na početku znamenka 2, a na kraju znamenka 3, tada za preostalih pet znamenki imamo sljedeće mogućnosti:

- jedna znamenka 0, četiri su znamenke 2 ili 3;
- dvije znamenke 0, tri su znamenke 2 ili 3;
- tri znamenke 0, dvije su znamenke 2 ili 3;
- četiri znamenke 0, jedna je znamenka 2 ili 3;
- pet znamenki 0. 1 bod

Mjesto za jednu nulu možemo odabrati na $\binom{5}{1} = 5$ načina, za dvije nule na $\binom{5}{2} = 10$ načina, za tri nule na $\binom{5}{3} = 10$ načina, za četiri nule na $\binom{5}{4} = 5$ načina i svih pet nula na 1 način. 1 bod

U svakom od navedenih slučajeva za svaku od preostalih znamenki imamo dvije mogućnosti 2 ili 3. Stoga je ukupan broj brojeva s danim svojstvima, a koji na početku imaju znamenku 2, a na kraju 3, jednak

$$5 \cdot 2^4 + \binom{5}{2} \cdot 2^3 + \binom{5}{3} \cdot 2^2 + \binom{5}{4} \cdot 2^1 + 1 = 211$$

Ako je na početku i na kraju znamenka 3, tada za preostalih pet znamenki imamo sljedeće mogućnosti: 1 bod

- jedna znamenka 0, jedna znamenka 2 i tri znamenke 3, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{3!} = 20$;
- jedna znamenka 0, dvije znamenke 2 i dvije znamenke 3, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$;
- jedna znamenka 0, tri znamenke 2 i jedna znamenka 3, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{3!} = 20$;
- jedna znamenka 0 i četiri znamenke 2, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{4!} = 5$;
- dvije znamenke 0, jedna znamenka 2 i dvije znamenke 3, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$;
- dvije znamenke 0, dvije znamenke 2 i jedna znamenka 3, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$;
- dvije znamenke 0 i tri znamenke 2, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$;
- tri znamenke 0, jedna znamenka 2 i jedna znamenka 3, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{3!} = 20$;
- tri znamenke 0 i dvije znamenke 2, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$;
- četiri znamenke 0 i jedna znamenka 2, a broj njihovih razmještaja iznosi $\frac{5!}{4!} = 5$. 3 boda

Stoga je ukupan broj brojeva s danim svojstvima, a koji na početku i na kraju imaju znamenku 3 jednak

$$20 + 30 + 20 + 5 + 30 + 30 + 10 + 20 + 10 + 5 = 180.$$ 1 bod

Konačno, ukupan broj svih brojeva s danim svojstvima jest $211 + 180 = 391$. 1 bod