Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Na sportskom natjecanju višečlano povjerenstvo ocjenjuje nastupe triju učenica: Ane, Eme i Sare. Svaki član povjerenstva će rangirati učenice od prvog do trećeg mjesta te za prvo mjesto dodijeliti a bodova, za drugo mjesto b bodova, a za treće mjesto c bodova. Pritom su a, b i c unaprijed određeni prirodni brojevi takvi da je $a > b > c$. Nakon toga bodovi svih članova povjerenstva su zbrojeni te je Ana osvojila 17 bodova, Sara 10 bodova, a Ema 8 bodova.
Odredi kako su pojedini članovi povjerenstva rangirali učenice.

Rješenje.

Uočimo da je svaki član povjerenstva dodijelio ukupno $a + b + c$ bodova i da taj broj iznosi barem $1 + 2 + 3 = 6$.

Ukupan broj bodova koji su dodijelili svi članovi povjerenstva je 17 + 10 + 8 = 35.

Taj broj jednak je umnošku broja $(a + b + c)$ i broja članova povjerenstva.

Broj 35 rastavimo na proste faktore: $35 = 7 \cdot 5$.

Kako je $a + b + c > 6$, mora biti $a + b + c = 7$, a povjerenstvo se sastoji od 5 članova.

Broj 7 može se u obliku zbroja triju različitih prirodnih brojeva napisati samo na jedan način: 7 = 1 + 2 + 4, dakle $a = 4$, $b = 2$ i $c = 1$.

Članovi povjerenstva su za prvo mjesto dodijelili 4 boda, za drugo mjesto 2 boda, a za treće mjesto 1 bod. Provjerimo kako su učenice mogle ostvariti navedeni ukupni broj bodova.

Ana je dobila 17 bodova. Jedina je mogućnost

$$17 = 4 + 4 + 4 + 4 + 1$$

što znači da je Ana od četiri člana povjerenstva dobila po 4 boda, a od jednog člana 1 bod.
Da joj je manje od četiri člana dalo 4 boda, imala bi najviše $4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 16$ bodova.
Ovaj zaključak ujedno znači da je samo jedna od ostalih učenica dobila 4 boda i to samo od jednog člana povjerenstva.

Sara je 10 bodova mogla ostvariti na dva načina:

$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Ema je 8 bodova mogla ostvariti također na dva načina:

$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Kombiniranjem dobivamo dva načina na koje je pet članova povjerenstva moglo rangirati učenice.
1. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	2	2	2
Ema	1	1	1	1	4

Ovo znači da je četvoro članova povjerenstva ocijenilo da je Ana prva, Sara druga, a Ema treća, dok je jedan član povjerenstva ocijenio da je Ema prva, Sara druga, a Ana treća.

2. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	1	1	4
Ema	1	1	2	2	2

Ovo znači da je dvoje članova rangiralo učenice u poretku 1. Ana – 2. Sara – 3. Ema, dvoje u poretku 1. Ana – 2. Ema – 3. Sara, a jedan u poretku 1. Sara – 2. Ema – 3. Ana.

2. Zbroj 16 uzastopnih prirodnih brojeva među kojima je i broj n, petnaest je puta veći od broja n. Odredi sve brojeve n za koje je to moguće.

Prvo rješenje.
Najmanji od 16 uzastopnih brojeva označimo s x. Tada vrijedi:
$$x + (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (x + 15) = 15(x + k),$$
gdje je $n = x + k$ za neki $k \in \{0, 1, \dots, 15\}$. Kako je $1 + 2 + \cdots + 15 = 120$, sređivanjem dobivamo $16x + 120 = 15x + 15k$ odnosno $x = 15k - 120 = 15(k - 8)$.
Da bi x bio prirodan broj, razlika $k - 8$ treba biti pozitivan cijeli broj, što znači da treba biti $k > 8$.

Ispitajmo sve mogućnosti:
za $k = 9$ vrijedi $x = 15\,(9 - 8) = 15$, $n = x + k = 24$, te je $15 + 16 + \dots + 30 = 15 \cdot 24$
za $k = 10$ vrijedi $x = 15\,(10 - 8) = 30$, $n = x + k = 40$, te je $30 + 31 + \dots + 45 = 15 \cdot 40$
za $k = 11$ vrijedi $x = 15\,(11 - 8) = 45$, $n = x + k = 56$, te je $45 + 46 + \dots + 60 = 15 \cdot 56$
za $k = 12$ vrijedi $x = 15\,(12 - 8) = 60$, $n = x + k = 72$, te je $60 + 61 + \dots + 75 = 15 \cdot 72$
za $k = 13$ vrijedi $x = 15\,(13 - 8) = 75$, $n = x + k = 88$, te je $75 + 76 + \dots + 90 = 15 \cdot 88$
za $k = 14$ vrijedi $x = 15\,(14 - 8) = 90$, $n = x + k = 104$, te je $90 + 91 + \dots + 105 = 15 \cdot 104$
za $k = 15$ vrijedi $x = 15\,(15 - 8) = 105$, $n = x + k = 120$, te je $105 + 106 + \dots + 120 = 15 \cdot 120$

Traženi brojevi su 24, 40, 56, 72, 88, 104 i 120.

Drugo rješenje.
Najmanji od 16 uzastopnih brojeva označimo s x. Tada vrijedi:
$$x + (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (x + 15) = 15\,n,$$
gdje je n neki od brojeva iz skupa $\{x, x + 1, \dots, x + 15\}$.

Sređivanjem dobivamo
$$16x + 120 = 15n.$$

To možemo zapisati u obliku $x + 15x + 120 = 15n$, odakle vidimo da broj x mora biti djeljiv s 15.

Za $x = 15$, na dobivena jednakost postaje $360 = 15n$, pa je $n = 24$. Zaista, zbroj 16 uzastopnih brojeva $15, 16, \dots, 30$ iznosi $16 \cdot (15 + 30) : 2 = 360 = 24 \cdot 15$. Uočavamo da je 24 jedan od tih brojeva.

Za x dalje uzimamo višekratnike broja 15:

$x = 30,$	$600 = 15n,$	$n = 40,$	$30 + 31 + \cdots + 45 = 15 \cdot 40$
$x = 45,$	$840 = 15n,$	$n = 56,$	$45 + 46 + \cdots + 60 = 15 \cdot 56$
$x = 60,$	$1080 = 15n,$	$n = 72,$	$60 + 61 + \cdots + 75 = 15 \cdot 72$
$x = 75,$	$1320 = 15n,$	$n = 88,$	$75 + 76 + \cdots + 90 = 15 \cdot 88$
$x = 90,$	$1560 = 15n,$	$n = 104,$	$90 + 91 + \cdots + 105 = 15 \cdot 104$
$x = 105,$	$1800 = 15n,$	$n = 120,$	$105 + 106 + \cdots + 120 = 15 \cdot 120$

Lako uočavamo da su svi dobiveni brojevi rješenja, dakle n može biti 24, 40, 56, 72, ,88, 104 i 120.
Međutim, za $x = 120$, imamo $2040 = 15n$, $n = 136$, te je $120 + 121 + \cdots + 135 = 15 \cdot 136$.
Kako je 136 veći od svih brojeva u ovom zbroju, taj slučaj ne daje rješenje.
Pokažimo općenito da za $x > 120$ nema rješenja.
Na lijevoj strani jednakosti

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (x + 15) = 15\,n$$

nalazi se zbroj 16 uzastopnih brojeva, a najveći od njih ne smije biti manji od n.
Dakle $x + 15 \geq n$, pa je $x \geq n - 15$, $x + 1 \geq n - 14$,... odnosno

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (x + 15) \geq (n - 15) + (n - 14) + (n - 13) + \cdots + n$$

Zbroj na desnoj strani ove nejednakosti je $16n - 120$. Zato mora vrijediti $15n \geq 16n - 120$, no ovo znači da je $n \leq 120$, a stoga i $x \leq 120$. Nema rješenja za koje je $x > 120$.

Napomena

Zadatak se može riješiti na sličan način ako uočimo da iz $16x + 120 = 15n$ slijedi da je broj n djeljiv s 8, ali nije djeljiv sa 16, pa uvrštavamo redom $n = 8, 24, 40, \dots$. Za $n = 8$ dobiveni x nije prirodan broj, a za $n > 120$ broj n neće biti jedan od promatranih 16 uzastopnih brojeva.

3. U trokutu ABC vrijedi

$$|\angle BAC| = 40^\circ, \ |\angle CBA| = 20^\circ \ \text{ i } \ |AB| - |BC| = 10.$$

Simetrala kuta $\angle ACB$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki M. Odredi duljinu dužine $\overline{CM}$.

Prvo rješenje.

Neka je E točka na dužini $\overline{AB}$ takva da je $|BE| = |BC|$.

Vrijedi $|AB| - |BC| = |AB| - |BE| = |AE|$, pa je $|AE| = 10$ cm.

Poznata su dva kuta u trokutu ABC, pa je treći kut $|\angle ACB| = 120^\circ$.

Kako je CM simetrala tog kuta vrijedi $|\angle ACM| = |\angle MCB| = 60^\circ$.

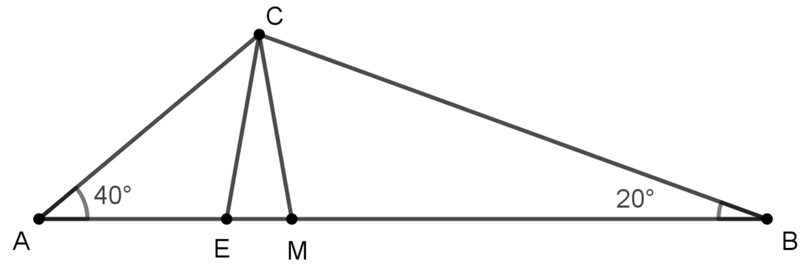
Zbog izbora točke E, trokut EBC je jednakokračan te je $|\angle BEC| = |\angle ECB| = 80^\circ$.

Dalje je

$|\angle ECM| = |\angle ECB| - |\angle MCB| = 20°$.

$|\angle CME| = 80°$

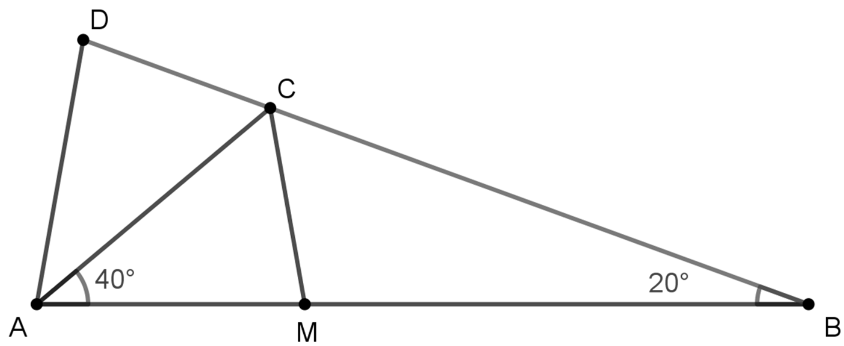
Kako je $|\angle CME| = |\angle MEC|$, trokut EMC jednakokračan te je $|EC| = |MC|$.



Također je $|\angle ACE| = |\angle ACM| - |\angle ECM| = 40°$, to jest $|\angle ACE| = |\angle EAC|$. Zato je i trokut AEC jednakokračan pa vrijedi $|AE| = |EC|$.

Povežemo li dokazane jednakosti dobivamo $|MC| = |EC| = |AE| = 10$ cm.

Drugo rješenje.
Neka je D točka na polupravcu BC takva da je $|DB| = |AB|$.
Vrijedi $|CD| = |BD| - |BC| = |AB| - |BC| = 10$ cm. Trokut ABD je jednakokračan s poznatim kutom u vrhu B, pa dobivamo $\angle BAD = \angle ADB = 80°$.



Kut $\angle DCA$ je vanjski kut trokuta ABC, pa je $|\angle DCA| = 40° + 20°$. Zato je $|\angle ACB| = 120°$. Kako je CM simetrala tog kuta vrijedi $|\angle ACM| = 60°$.

Odredimo kutove trokuta ACD. Već znamo $|\angle ADC| = 80°$ i $|\angle DCA| = 60°$ pa je $|\angle CAD| = 40°$. Primijetimo da je $|\angle CAD| = |\angle MAC|$ i $|\angle DCA| = |\angle ACM|$, pa su trokuti ACD i AMC sa zajedničkom stranicom $\overline{AC}$ sukladni.

Iz toga slijedi $|CM| = |CD| = 10$ cm.

4. Neka su a, b, c i d prirodni brojevi takvi da je $a > b > c > d$. Označimo

$$S = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

a) Je li broj S uvijek djeljiv s 3 ?

b) Je li broj S uvijek djeljiv s 4 ?

Prvo rješenje.
a) Pri dijeljenju prirodnog broja brojem 3, ostatak može biti 0, 1 ili 2. Kako imamo četiri broja a, b, c i d, a tri ostatka, neka dva broja od tih brojeva pri dijeljenju s 3 imaju isti ostatak (Dirichletov princip). Oduzimanjem tih dvaju brojeva dobije se razlika koja je djeljiva s 3.

Pokažimo da je zaista tako.

Pretpostavimo da brojevi a i b daju isti ostatak o pri dijeljenju s 3, pri čemu je $o \in \{0,1,2\}$.
To znači da je $a = 3k + o$ i $b = 3l + o$, za neke $\mathrm{k}, \mathrm{l} \in \mathbb{N}_0$. Tada za njihovu razliku vrijedi
$a - b = (3k + o) - (3l + o) = 3k - 3l = 3(k - l)$, a to je broj djeljiv s tri.

Kako je ta razlika sigurno jedan od faktora broja S, zaključujemo da je broj S uvijek djeljiv s 3.

b) Pri dijeljenju prirodnog broja brojem 4, ostatak može biti 0, 1, 2 ili 3.
Ako među brojevima a, b, c i d postoje dva koji imaju isti ostatak, onda je njihova razlika djeljiva s 4.

Slično kao u a) dijelu, ako je $a = 4k + o$, $b = 4l + o$, gdje je o ostatak, a $k, l \in \mathbb{N}_0$, onda vrijedi
$a - b = (4k + o) - (4l + o) = 4(k - l)$.

Umnožak S djeljiv je razlikom $a - b$, pa je i S djeljiv s 4.
No, ako ne postoje takva dva broja, to znači da brojevi a, b, c i d imaju različite ostatke pri dijeljenju s 4. U tom slučaju, promotrimo najprije brojeve koji imaju parne ostatke (0 i 2). Ta dva broja su parna, pa je njihova razlika paran broj. Također, oba broja koji imaju neparne ostatke (1 i 3) su neparna, a njihova razlika je paran broj. Obje razlike se javljaju među faktorima broja S, pa je S djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.
Time smo pokazali da je broj S uvijek djeljiv brojem 4.

Drugo rješenje b) dijela zadatka***.***

b) Ako među brojevima a, b, c i d postoje najmanje tri parna broja, neka su to npr. brojevi a, b i c. Tada su razlike $a - b$ i $b - c$ parne, a to znači da je umnožak S djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.

Ako među brojevima a, b, c i d postoje najmanje tri neparna broja, neka su to npr. brojevi a, b i c. Tada su razlike $a - b$ i $b - c$ parne, a to znači da je umnožak S djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.

Ako ne postoje niti tri parna, niti tri neparna broja, to znači da su dva broja parna, a dva neparna. Neka su npr. a i d parni brojevi, a b i c neparni brojevi. Tada su razlike $\mathrm{a} - \mathrm{d}$ i $b - c$ parne, a to znači da je umnožak S i u ovom slučaju djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.

5. Na kraju školske godine ravnatelj Srećko proveo je među učenicima anketu o gubljenju osobnih predmeta. Od 1000 učenika njegove škole svaki je ove školske godine izgubio barem jedan od tri predmeta: bilježnicu, ključeve ili pernicu. Njih 700 je izgubilo bilježnicu, 750 ih je izgubilo ključeve, a 800 pernicu.
Koliko je najmanje učenika ove školske godine izgubilo i bilježnicu i ključeve i pernicu?

Komentar prije rješenja.

Odgovor na postavljeno pitanje je 250. Naravno, odgovor treba argumentirati.

U ovom slučaju, ta se argumentacija sastoji od dva dijela. Potrebno je:

- dokazati da nije moguće da sva tri predmeta izgubi manje od 250 učenika te

- primjerom pokazati da je zaista moguće da sva tri predmeta izgubi točno 250 učenika.

Uočite u svakom od sljedećih rješenja ta dva dijela.

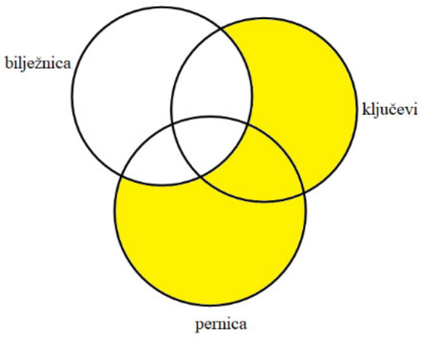
Prvo rješenje.

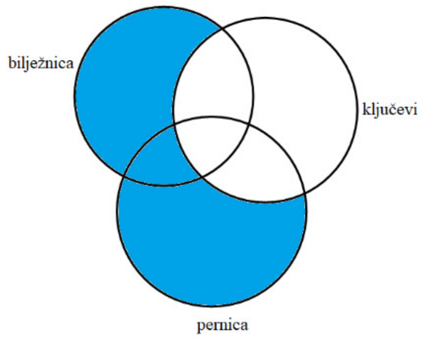
Ako je 700 učenika te škole izgubilo bilježnicu, onda njih 300 nije izgubilo bilježnicu (žuto obojano).

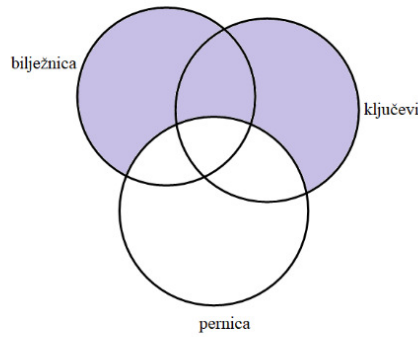
Ako je 750 učenika te škole izgubilo ključeve, onda njih 250 nije izgubilo ključeve (plavo).

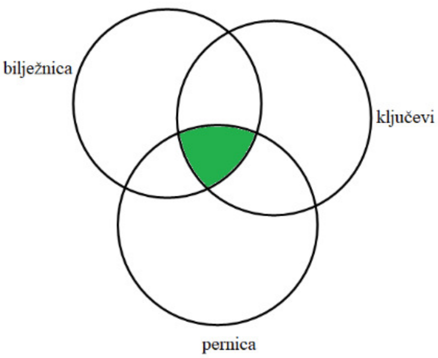
Ako je 800 učenika te škole izgubilo pernicu, onda njih 200 nije izgubilo pernicu (ljubičasto).

Neka je x broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta (zeleno).









Ta četiri skupa (obojana žutom, plavom, ljubičastom i zelenom bojom) zajedno obuhvaćaju sve učenike, jer nema učenika koji nije izgubio ni bilježnicu, ni ključeve, ni pernicu. Zato je zbroj brojeva učenika u ta četiri skupa veći ili jednak ukupnom broju učenika te škole pa vrijedi:

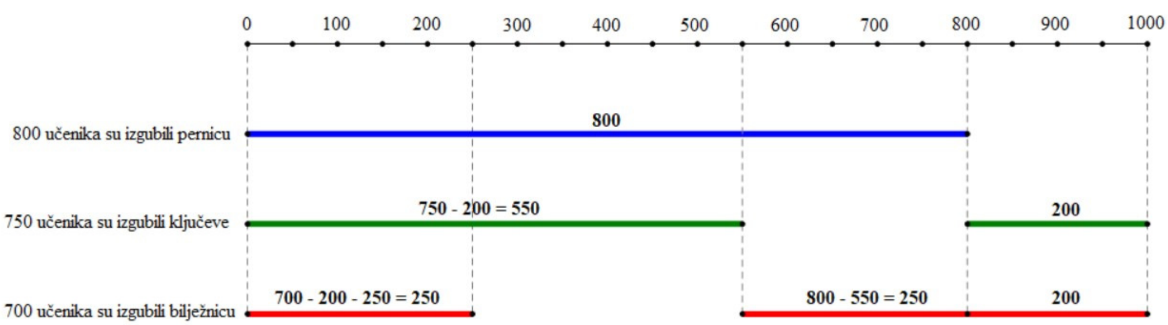
$$300 + 250 + 200 + x \geq 1000$$

$$750 + x \geq 1000$$

$$x \geq 250$$

To znači da je najmanji mogući broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta veći ili jednak 250.

Pokažimo primjerom da je taj broj upravo 250.



Ovdje je shematski prikazano 250 učenika koji su izgubili sva tri predmeta, 300 učenika koji su izgubili pernicu i ključeve, 250 učenika koji su izgubili pernicu i bilježnicu, te 200 učenika koji su izgubili ključeve i bilježnicu.

To znači da je moguća situacija u kojoj je točno 250 učenika izgubilo sva tri predmeta.

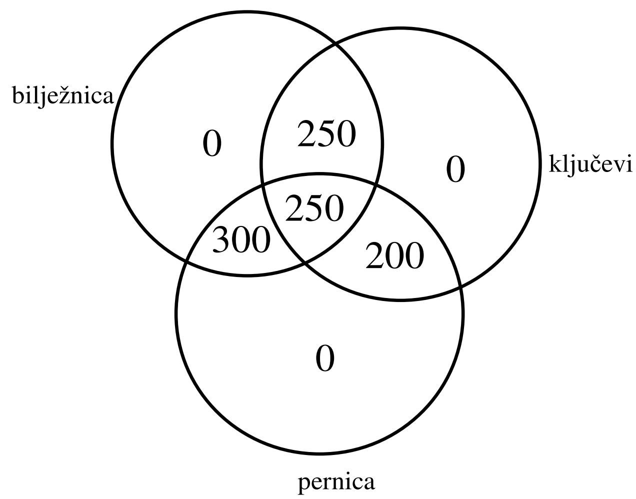
Drugo rješenje.

Dokažimo da u školi ima najmanje 250 učenika koji su izgubili sva tri predmeta.

Pretpostavimo da nije tako. Tada bi bilo najviše 249 učenika koji su izgubili po tri predmeta, a ostali učenici, njih barem 751 izgubili bi po najviše dva predmeta. Tada bi bilo najviše $2 \cdot 751 + 3 \cdot 249 = 2249$ izgubljena predmeta.

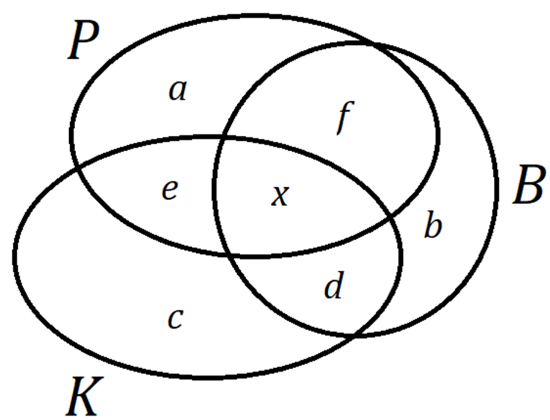
No, izgubljenih predmeta je ukupno $700 + 750 + 800 = 2250$. Kako je $2250 > 2249$, dobili smo kontradikciju, a to znači da je početna pretpostavka bila pogrešna. Zaista je barem 250 učenika izgubilo sva tri predmeta.

Još je potrebno pokazati da je moguće da 250 učenika izgubi sva tri predmeta, a to možemo npr. pomoću Vennovog dijagrama:



Treće rješenje.

Označimo s B skup učenika koji su izgubili bilježnicu, s K skup učenika koji su izgubili ključeve i s P skup učenika koji su izgubili pernicu. Nadalje, označimo s a broj učenika koji su izgubili samo pernicu, s b broj učenika koji su izgubili samo bilježnicu, a s c broj učenika koji su izgubili samo ključeve. Također, neka je d broj učenika koji su izgubili bilježnicu i ključeve, e broj učenika koji su izgubili ključeve i pernicu, f broj učenika koji su izgubili pernicu i bilježnicu, a x broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta.



Tada vrijedi:

$$a + b + c + d + e + f + x = 1000$$
$$b + d + f + x = 700$$
$$c + d + e + x = 750$$
$$a + e + f + x = 800$$

Zbrojimo li posljednje tri jednadžbe, dobivamo:

$$a + b + c + 2(d + e + f) + 3x = 2250.$$

Kako je $a + b + c + d + e + f + x = 1000$, slijedi $d + e + f + 2x = 1250$.

S obzirom da je $d + e + f + x \leq 1000$, znači da x ne može biti manje od 250.

Broj x bi bio 250 u slučaju da je $d + e + f + x = 1000$, tj. u slučaju da je $a = b = c = 0$.

Tada gornje jednadžbe postaju:

$$d + f + x = 700, \ d + e + x = 750, \ e + f + x = 800.$$

Ispitajmo je li moguće da bude $x = 250$.

Tada bi vrijedilo $d + e + f = 1000 - 250 = 750$, te

$$d + f = 700 - 250 = 450,$$
$$d + e = 750 - 250 = 500,$$
$$e + f = 800 - 250 = 550.$$

Zato je

$$d = (d + e + f) - (e + f) = 750 - 550 = 200,$$
$$e = (d + e + f) - (d + f) = 750 - 450 = 300,$$
$$f = (d + e + f) - (d + e) = 750 - 500 = 250.$$

Zaključujemo da je najmanje 250 učenika izgubilo sva tri predmeta.

(Primjećujete li gdje se krije primjer u ovom rješenju?)

Četvrto rješenje.

Označimo s x broj učenika koji su izgubili točno jedan predmet, s y broj učenika koji su izgubili točno dva predmeta, a sa z broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta. Trebamo odrediti najmanju moguću vrijednost broja z.

Vrijedi:

$$x + y + z = 1000$$
$$x + 2y + 3z = 2250$$

Kako je

$$2250 = x + 2y + 3z = (x + y + z) + y + 2z = 1000 + y + 2z,$$

zaključujemo da je $y + 2z = 1250$.

Kako $x + y + z = 1000$, zbroj $y + z$ može biti najviše 1000. Zato iz $1250 = y + 2z = (y + z) + z$ zaključujemo da je $z = 1250 – (y + z)$ najmanje $1250 - 1000 = 250$.

Sada treba provjeriti da je moguće da broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta bude jednak 250.

U tom slučaju mora biti $y + z = 1000$, što znači da nema učenika koji su izgubili samo jedan predmet već je svaki učenik izgubio barem dva predmeta. Da je moguće ispuniti sve uvjete, vidi se iz Vennovog dijagrama.