HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. U punoj šalici nalazi se 3 dl bijele kave. Omjer količina mlijeka i kave u toj smjesi je 3 : 2. Marko je popio šestinu bijele kave te je šalicu do vrha dopunio mlijekom. Nakon toga je popio petinu bijele kave te je šalicu ponovo dopunio do vrha tako da je ulio pet puta više mlijeka nego kave. Nakon što je treći puta popio dio bijele kave, šalica je do svoje trećine napunjena bijelom kavom. Koliko će mlijeka biti u šalici nakon što Marko opet do vrha šalice ulije mlijeko?

Prvo rješenje.

Omjer količina mlijeka i kave u smjesi je je 3 : 2 pa iz toga zaključujemo da je ukupno 3 + 2 = 5 jednakih dijelova. Dakle, u šalici je $\frac{3}{5}$ mlijeka i $\frac{2}{5}$ kave.

$\frac{3}{5}$ od 3 dl je 1.8 dl, 3 dl – 1.8 dl = 1.2 dl.

Na početku je u šalici 1.8 dl mlijeka i 1.2 dl kave.

$\frac{1}{6}$ od 1.8 dl je 0.3 dl, $\frac{1}{6}$ od 1.2 dl je 0.2 dl.

Nakon prvog ispijanja u šalici ima 1.8 dl – 0.3 dl = 1.5 dl mlijeka i 1.2 dl – 0.2 dl = 1 dl kave.

Do pune šalice nedostaje još 3 dl – (1.5 dl + 1 dl) = 0.5 dl tekućine.

Kada se šalica dopuni s 0.5 dl mlijeka u šalici je 2 dl mlijeka i 1 dl kave.

$\frac{1}{5}$ od 2 dl je 0.4 dl, $\frac{1}{5}$ od 1 dl je 0.2 dl.

Nakon drugog ispijanja u šalici ima 2 dl – 0.4 dl = 1.6 dl mlijeka i 1 dl – 0.2 dl = 0.8 dl kave.

Do pune šalice nedostaje još 3 dl – (1.6 dl + 0.8 dl) = 0.6 dl tekućine.

Kako je u šalicu uliveno pet puta više mlijeka nego kave, to znači da je uliveno 0.5 dl mlijeka i 0.1 dl kave. U šalici je, nakon dopunjavanja, 2.1 dl mlijeka i 0.9 dl kave.

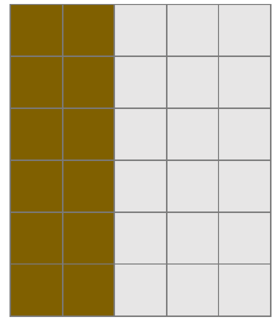
Ako je šalica do svoje trećine napunjena bijelom kavom, to znači da je popijeno $\frac{2}{3}$ bijele kave, dok je u šalici ostala $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ od 2.1 dl je 0.7 dl, $\frac{1}{3}$ od 0.9 dl je 0.3 dl.

Nakon trećeg ispijanja u šalici ima 0.7 dl mlijeka i 0.3 dl kave. Dakle, u šalici je 1 dl bijele kave i treba uliti 2 dl mlijeka da bi šalica bila puna.

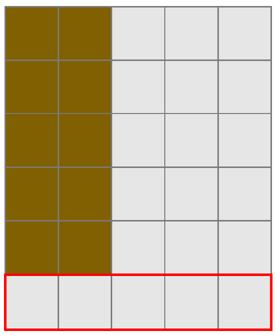
Nakon dolijevanja mlijeka u šalici će biti 0.7 dl + 2 dl = 2.7 dl mlijeka.

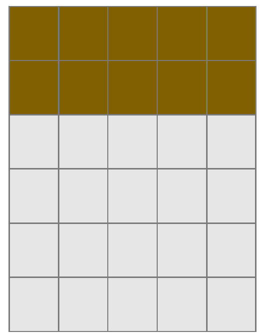
Drugo rješenje.



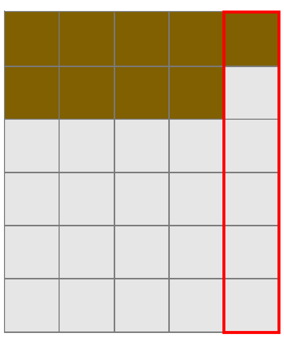
Ukupnu količinu bijele kave treba podijeliti na 5 jednakih dijelova kako bismo označili da su tri dijela mlijeka, te dva dijela kave. Tu količinu kasnije želimo dijeliti na šest dijelova, pa ćemo zato šalicu prikazati kao pravokutnik dimenzija 5×6. Jedan kvadratić prikazuje 3 dl : 30 = 0.1 dl.
Na slici desno je prikazan sadržaj šalice na početku.

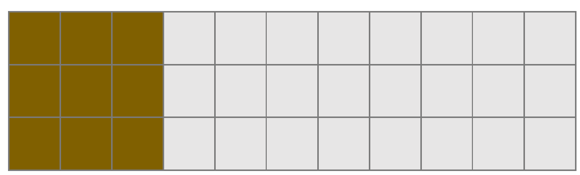
Nakon ispijanja jedne šestine bijele kave, šalica je dopunjena mlijekom.
Jedan redak predstavlja šestinu šalice i njega ćemo cijelog ispuniti mlijekom (slika dolje lijevo). Budući da se kava i mlijeko ravnomjerno raspoređuju u šalici, situaciju možemo prikazati kao na slici dolje desno.



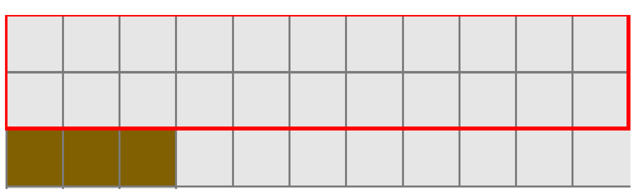


Sada je Marko popio petinu bijele kave, a dopunio ju je s pet puta više mlijeka nego kave. Jedan stupac prikazuje jednu petinu šalice, a prilikom dopunjavanja njega trebamo ispuniti tako da pet kvadratića zauzima mlijeko, a jedan kvadratić kava (slika dolje lijevo). Istu situaciju možemo prikazati pomoću pravokutnika dimenzija 3×10 (slika dolje desno) jer će tako kava i mlijeko biti ravnomjerno raspoređeni i moći ćemo odvojiti jednu trećinu.

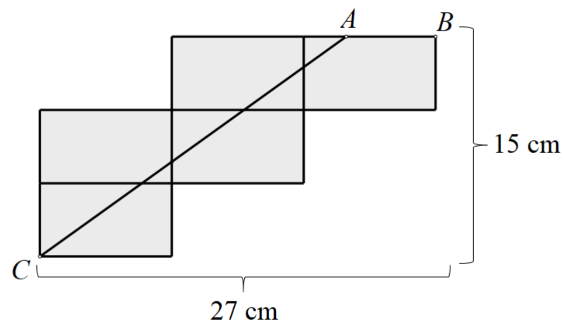




Treći put Marko je u šalici ostavio jednu trećinu bijele kave i dopunio do vrha mlijekom. Jedan redak prikazuje trećinu šalice, pa dva cijela retka zamijenimo mlijekom i tako dobivamo konačnu situaciju. Prebrajanjem kvadratića zaključujemo da je u šalici 2.7 dl mlijeka i 0.3 dl kave.



2. Pet međusobno sukladnih pravokutnika raspoređeno je tako da tvore lik duljine 27 cm i širine 15 cm, kao što je prikazano na slici. Unutar dobivenog lika nacrtana je dužina $\overline{AC}$ koja taj lik dijeli na dva dijela jednakih površina.
Odredi duljinu dužine $\overline{AB}$.



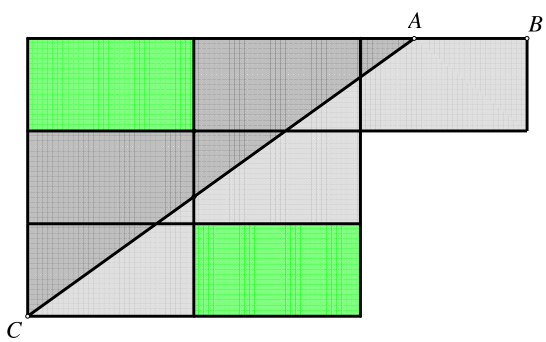
Prvo rješenje.
Duljine stranica pravokutnika su $27 : 3 = 9$ cm i $15 : 3 = 5$ cm. Njegova površina je $9 \cdot 5 = 45\ \text{cm}^2$.
Površina lika koji se sastoji od pet takvih pravokutnika je $5 \cdot 45 = 225\ \text{cm}^2$, a pola te površine iznosi $225 : 2 = 112.5\ \text{cm}^2$.
Neka je $|AB| = x$.
Kada bi se dio lika iznad dužine $\overline{AC}$ nadopunio još jednim takvim pravokutnikom, dobio bi se pravokutan trokut površine $112.5 + 45 = 157.5\ \text{cm}^2$ s katetama duljina 15 i $27 - x$.

Površina tog pravokutnog trokuta jednaka je polovini površine pravokutnika sa stranicama istih duljina pa imamo

$$15 \cdot (27 - x) : 2 = 157.5$$
$$15 \cdot (27 - x) = 315$$
$$27 - x = 21$$
$$x = 6$$

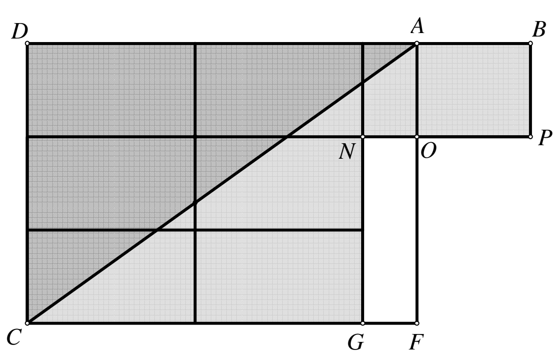
Duljina dužine $\overline{AB}$ je 6 cm.

Drugo rješenje.
Dimenzije svakog od pravokutnika su 27 : 3 = 9 cm i 15 : 3 = 5 cm.
Osjenčanom liku docrtajmo dva pravokutnika na način prikazan na slici.



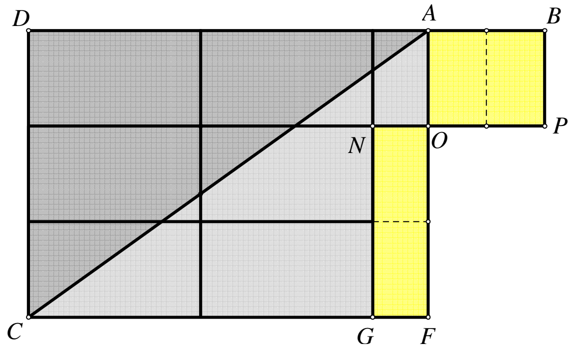
Kako su ti pravokutnici jednakih površina, dužina $\overline{AC}$ dijeli novodobiveni lik na dva dijela jednakih površina.

Nacrtajmo dužinu $\overline{AF}$ tako da $CFAD$ bude pravokutnik. Dužina $\overline{AC}$ dijeli taj pravokutnik na dva dijela jednakih površina.



Kako su površine trokuta CFA i CAD jednake, zaključujemo da je površina trokuta CFA jednaka površini polovine novog lika koja je obojena svijetlosivom bojom.

To znači da je površina svijetlosivog dijela izvan pravokutnika $CFAD$ jednaka je površini bijelog dijela unutar tog pravokutnika. Drugim riječima, površine pravokutnika $GFON$ i $OPBA$ međusobno su jednake.



No, širina pravokutnika $OPBA$ upola je manja od širine pravokutnika $GFON$ ($|FO| = 2|AO|$), pa je njegova visina dvostruko veća ($|OP| = 2|NO|$).

Vrijedi $|NO| + |OP| = |NP| = 9$ cm,

$$|NO| + 2|NO| = 3|NO| = 9 \text{ cm}$$
$$|NO| = 3 \text{ cm}, |OP| = 6 \text{ cm}$$
$$|AB| = |OP| = 6 \text{ cm}.$$

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi 6 cm.

3. Na sportskom natjecanju višečlano povjerenstvo ocjenjuje nastupe triju učenica: Ane, Eme i Sare. Svaki član povjerenstva će rangirati učenice od prvog do trećeg mjesta te za prvo mjesto dodijeliti a bodova, za drugo mjesto b bodova, a za treće mjesto c bodova. Pritom su a, b i c unaprijed određeni prirodni brojevi takvi da je $a > b > c$. Nakon toga bodovi svih članova povjerenstva su zbrojeni te je Ana osvojila 17 bodova, Sara 10 bodova, a Ema 8 bodova.
Odredi kako su pojedini članovi povjerenstva rangirali učenice.

Rješenje.
Uočimo da je svaki član povjerenstva dodijelio ukupno $a + b + c$ bodova i da taj broj iznosi barem $1 + 2 + 3 = 6$. Ukupan broj bodova koji su dodijelili svi članovi povjerenstva je 17 + 10 + 8 = 35.
Taj broj jednak je umnošku broja $(a + b + c)$ i broja članova povjerenstva.
Broj 35 rastavimo na proste faktore $35 = 7 \cdot 5$.
Kako je $a + b + c > 6$, mora biti $a + b + c = 7$, a povjerenstvo se sastoji od 5 članova.
Broj 7 može se u obliku zbroja triju različitih prirodnih brojeva napisati samo na jedan način
7 = 1 + 2 + 4, dakle $a = 4$, $b = 2$ i $c = 1$.
Članovi povjerenstva su za prvo mjesto dodijelili 4 boda, za drugo mjesto 2 boda, a za treće mjesto 1 bod. Provjerimo kako su učenice mogle ostvariti navedeni ukupni broj bodova.

Ana je dobila 17 bodova. Jedina je mogućnost
$$17 = 4 + 4 + 4 + 4 + 1$$
što znači da je Ana od četiri člana povjerenstva dobila po 4 boda, a od jednog člana 1 bod.
Da joj je manje od četiri člana dalo 4 boda, imala bi najviše $4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 16$ bodova.
Ovaj zaključak ujedno znači da je samo jedna od ostalih učenica dobila 4 boda i to samo od jednog člana povjerenstva.
Sara je 10 bodova mogla ostvariti na dva načina:
$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1.$$
Ema je 8 bodova mogla ostvariti također na dva načina:
$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Kombiniranjem dobivamo dva načina na koje je pet članova povjerenstva moglo rangirati učenice.

1. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	2	2	2
Ema	1	1	1	1	4

Ovo znači da je četvoro članova povjerenstva ocijenilo da je Ana prva, Sara druga, a Ema treća, dok je jedan član povjerenstva ocijenio da je Ema prva, Sara druga, a Ana treća.

2. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	1	1	4
Ema	1	1	2	2	2

Ovo znači da je dvoje članova rangiralo učenice u poretku 1. Ana – 2. Sara – 3. Ema, dvoje u poretku 1. Ana – 2. Ema – 3. Sara, a jedan u poretku 1. Sara – 2. Ema – 3. Ana.

4. Odredi, ako postoje, sve četveroznamenkaste prirodne brojeve koji su djeljivi brojem zapisanim istim znamenkama u obrnutom poretku i pri tom dijeljenju količnik iznosi:

a) tri,
b) četiri.

(Moguće je da broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku počinje nulom ili nulama, tako bi se npr. od broja 3210 dobio broj 0123 tj. 123.)

Rješenje.
Neka je $\overline{abcd}$ je četveroznamenkasti broj pa je $a, b, c, d \in \{0,1,2, \ \dots, \ 9\}$, $a \neq 0$.
Tada je $\overline{dcba}$ broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku.

a) Ako je $\overline{abcd} : \overline{dcba} = 3$, tada je $\overline{dcba} \cdot 3 = \overline{abcd}$.

Razmotrimo sve mogućnosti za znamenku a:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3a$	3	6	9	12	15	18	21	24	27
d	3	**6**	**9**	2	**5**	**8**	1	**4**	**7**
		$\boldsymbol{d > 3}$	$\boldsymbol{d > 3}$		$\boldsymbol{d > 3}$	$\boldsymbol{d > 3}$		$\boldsymbol{d > 3}$	$\boldsymbol{d > 3}$
$3d$	**9**			**6**			3		
	$\boldsymbol{3d > a}$			$\boldsymbol{3d > a}$					
							??		

Broj $\overline{dcba}$ ne može biti veći od 3333 jer je $3334 \cdot 3$ peteroznamenkasti broj. Dakle $d \leq 3$ pa otpadaju mogućnosti $a \in \{2,3,5,6,8,9\}$.
Promatrajući znamenke tisućica zaključujemo da mora biti $d \cdot 3 \leq a$ pa otpada i $a = 1$ i $a = 4$.
U preostalom slučaju, $a = 7$, $d = 1$, broj $\overline{abcd} = \overline{7bc1}$ veći je od 7000, dok je broj $\overline{dcba} = \overline{1cb7}$ manji od 2000, pa je umnožak $\overline{dcba} \cdot 3$ manji od 6000. Zato ni u tom slučaju nema rješenja.

Dakle, ne postoji četveroznamenkasti broj koji je djeljiv brojem zapisanim istim znamenkama u obrnutom poretku i pri tom dijeljenju količnik iznosi 3.

b) Ako je $\overline{abcd} : \overline{dcba} = 4$, tada je $\overline{dcba} \cdot 4 = \overline{abcd}$.

Razmotrimo sve mogućnosti za znamenku a:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$4a$	4	8	12	16	20	24	28	32	36
d	**4**	**8**	2	**6**	0	**4**	**8**	2	**6**
	$\boldsymbol{d > 2}$	$\boldsymbol{d > 2}$		$\boldsymbol{d > 2}$		$\boldsymbol{d > 2}$	$\boldsymbol{d > 2}$		$\boldsymbol{d > 2}$
$4d$			**8**		0			8	
			$\boldsymbol{4d > a}$						
					??			??	

Broj $\overline{dcba}$ ne može biti veći od 2499 jer je $2500 \cdot 4$ peteroznamenkasti broj. Dakle $d \leq 2$ pa otpadaju mogućnosti $a \in \{1,2,4,6,7,9\}$.
Promatrajući znamenke tisućica zaključujemo da mora biti $d \cdot 4 \leq a$ pa otpada i $a = 3$.
Preostale su dvije mogućnosti.
Ako je $a = 5$, $d = 0$, broj $\overline{abcd} = \overline{5bc0}$ veći je od 5000, dok je broj $\overline{dcba} = \overline{0cb5} = \overline{cb5}$ manji od 1000, pa je umnožak $\overline{dcba} \cdot 4$ manji od 4000. Zato u ovom slučaju nema rješenja.

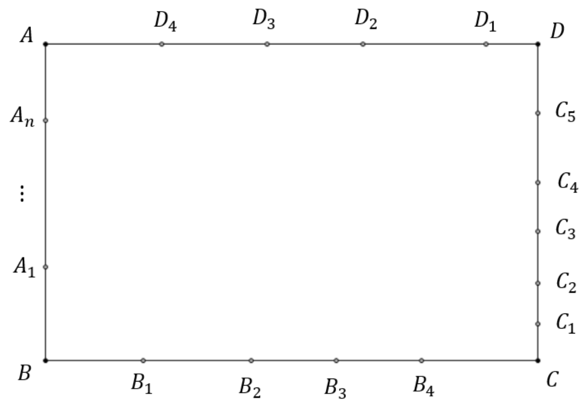
Ako je $a = 8$, $d = 2$, promatrani umnožak je $\overline{2cb8} \cdot 4 = \overline{8bc2}$.
To možemo zapisati i ovako:
$$(2000 + 100c + 10b + 8) \cdot 4 = 8000 + 100b + 10c + 2$$
pa sređivanjem dobivamo
$$8000 + 400c + 40b + 32 = 8000 + 100b + 10c + 2$$
$$390c + 30 = 60b$$
$$13c + 1 = 2b.$$
Kako b ne može biti veći od 9, vrijednost izraza $13c + 1$ mora biti paran broj koji nije veći od 18 pa c može biti samo 0 ili 1. Ako je $c = 0$, onda $13c + 1$ nije paran broj.
Ako je $c = 1$, onda je $2b = 13c + 1 = 14$ pa je $b = 7$.
Dobili smo broj 8712. Provjerimo: $2178 \cdot 4 = 8712$.
Broj 8712 je jedini četveroznamenkasti broj koji je djeljiv brojem zapisanim istim znamenkama u obrnutom poretku i pri tom dijeljenju količnik iznosi 4.

Slučaj $a = 8$, $d = 2$ se može riješiti i ispitivanjem svih mogućnosti za $b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

5. Na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ odabrano je nekoliko točaka, na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ po četiri točke, a na stranici $\overline{CD}$ pet točaka. Nijedna od odabranih točaka nije vrh danog pravokutnika. Koristeći odabrane točke kao vrhove može se nacrtati točno 4040 četverokuta kojima najviše jedan vrh pripada dužini $\overline{AB}$. Koliko je točaka odabrano na stranici $\overline{AB}$?

Rješenje.

Neka je n broj točaka koje su odabrane na stranici $\overline{AB}$.



Kako najviše jedan vrh takvog četverokuta pripada dužini $\overline{AB}$, promotrimo dva slučaja:

a) dužini $\overline{AB}$ ne pripada niti jedan vrh četverokuta.
b) dužini $\overline{AB}$ pripada točno jedan vrh četverokuta.

Uočimo da na jednoj stranici pravokutnika mogu biti najviše dva vrha četverokuta.
Dva vrha na stranici $\overline{BC}$ ili na stranici $\overline{DA}$ možemo odabrati na $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ načina, a dva vrha na stranici $\overline{CD}$ na $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ načina.

a) dužini $\overline{AB}$ ne pripada niti jedan vrh četverokuta.

Vrhovi četverokuta mogu biti raspoređeni:
a1) po dva vrha na dvjema stranicama pravokutnika
- po dva vrha na $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$
  takvih je četverokuta $6 \cdot 10 = 60$
- po dva vrha na $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$
  takvih je četverokuta $6 \cdot 6 = 36$
- po dva vrha na $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$
  takvih je četverokuta $10 \cdot 6 = 60$

a2) dva vrha na jednoj stranici i po jedan vrh na ostalim stranicama
- dva vrha na $\overline{BC}$, po jedan vrh na $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$
  takvih je četverokuta $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- dva vrha na $\overline{CD}$, po jedan vrh na $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$
  takvih je četverokuta $10 \cdot 4 \cdot 4 = 160$
- dva vrha na $\overline{DA}$, po jedan vrh na $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$
  takvih je četverokuta $6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Ako dužini $\overline{AB}$ ne pripada niti jedan vrh četverokuta, četverokut se može nacrtati na

$$60 + 36 + 60 + 120 + 160 + 120 = 556$$

različitih načina.

b) dužini $\overline{AB}$ pripada točno jedan vrh četverokuta

Vrhovi četverokuta mogu biti raspoređeni:

b1) po jedan vrh na svakoj stranici

- na svakoj stranici je po jedan vrh

takvih četverokuta ima $n \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 80\,n$

b2) dva vrha na jednoj stranici, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na jednoj od preostalih stranica

- dva vrha na stranici $\overline{BC}$, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na stranici $\overline{CD}$ ili $\overline{DA}$

takvih četverokuta ima $6 \cdot n \cdot (5 + 4) = 54\,n$

- dva vrha na stranici $\overline{CD}$, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na stranici $\overline{BC}$ ili $\overline{DA}$

takvih četverokuta ima $10 \cdot n \cdot (4 + 4) = 80\,n$

- dva vrha na stranici $\overline{DA}$, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na stranici $\overline{BC}$ ili $\overline{CD}$

takvih četverokuta ima $6 \cdot n \cdot (4 + 5) = 54\,n$

Ako dužini $\overline{AB}$ pripada točno jedan vrh četverokuta, četverokut se može nacrtati na

$$54\,n + 80\,n + 54\,n + 80\,n = 268\,n$$

različitih načina.

Ukupan broj četverokuta koji se mogu nacrtati na opisani način je 4040 pa je

$$556 + 268 \cdot n = 4040.$$

Sređivanjem dobivamo $268 \cdot n = 3484$ te konačno $n = 13$.

Na dužini $\overline{AB}$ odabrano je 13 točaka.