Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Profesor Baltazar ima stroj koji je programiran na način:

- u stroj se upisuje prirodan broj n (nula nije prirodan broj),
- ako je broj n paran, stroj ga podijeli s 2 i ispiše rezultat, a
- ako je broj neparan, stroj ga pomnoži s 3, dobivenom broju doda 1 i ispiše rezultat.

Profesor Baltazar je u stroj upisao jedan broj, potom je ispisani rezultat ponovno upisao u taj stroj pa je taj postupak ponovio više puta. Nakon šestog upisivanja, stroj je ispisao broj 4. Odredi sve moguće početne vrijednosti koje je profesor Baltazar mogao upisati u stroj.

Rješenje.
Način rada stroja može se prikazati ovako:

ulaz	n	
	n je paran broj	n je neparan broj
izlaz	$n:2$	$3\cdot n+1$

Ako je dobiven rezultat m, onda je ulaz mogao biti $2m$ ili $(m-1):3$ ovisno o tome je li upisani broj paran ili neparan.

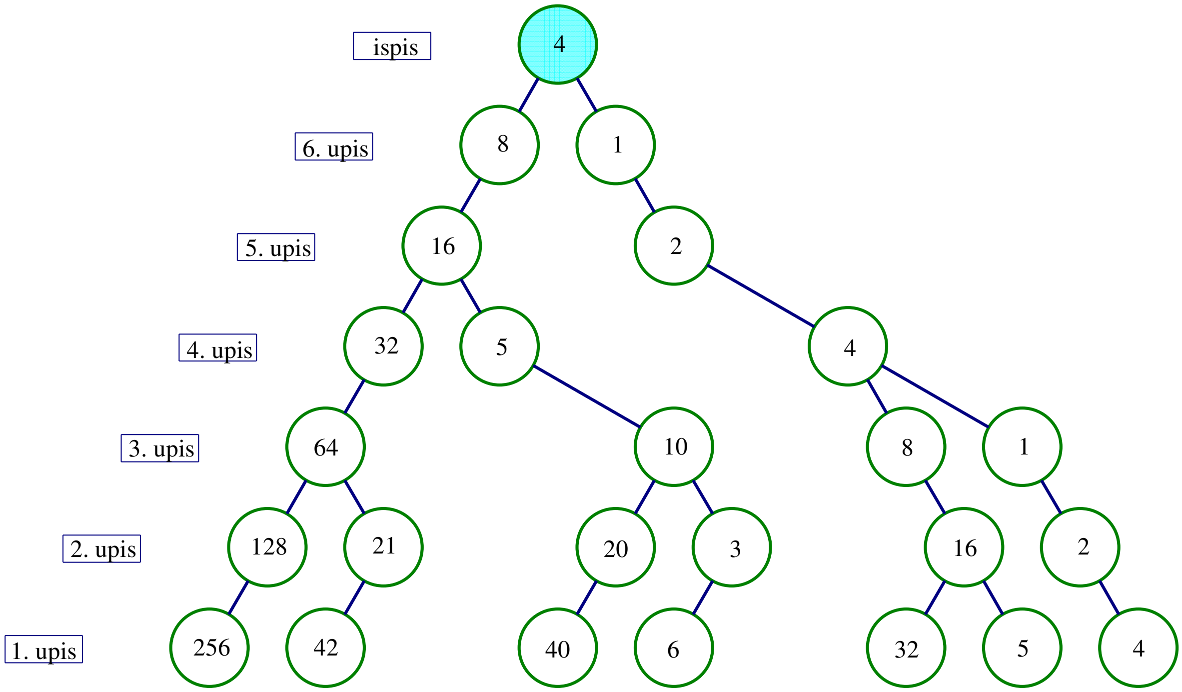
Rezultat 4 može se pojaviti ako je na ulazu bio broj $8=2\cdot 4$ ili broj $1=(4-1):3$.

Rezultat 8 možemo dobiti samo od broja 16, jer broj $8-1=7$ ne možemo podijeliti s 3 bez ostatka. Broj 1 možemo dobiti samo od broja 2, jer na ulazu ne može biti 0.

Rezultat 16 može se dobiti na dva načina, ako je na ulazu 32 ili 5.

Sličnim razmišljanjem dobivamo „stablo“ mogućih međurezultata sve do polaznih brojeva.

Početne vrijednosti koje je profesor Baltazar mogao upisati u stroj su: 4, 5, 6, 32, 40, 42 i 256.



2. Marta je izmislila novu računsku operaciju *smješkanje* za koju će koristiti znak ☺. Smješkanje je definirano pomoću poznatih operacija zbrajanja i množenja izrazom

$$a \text{ ☺ } b = a \cdot b + 3 \cdot a + b.$$

Koliki je x ako je $(x \text{ ☺ } 5) \text{ ☺ } 6 = 72\,123$?

Prvo rješenje.

Najprije ćemo dani izraz zapisati pomoću zbrajanja i množenja:

$x \text{ ☺ } 5 = \mathrm{x} \cdot 5 + 3 \cdot x + 5 = 8x + 5$

$(x \text{ ☺ } 5) \text{ ☺ } 6 = (8\mathrm{x} + 5) \cdot 6 + 3 \cdot (8x + 5) + 6 = (8x + 5) \cdot 9 + 6 = 72x + 51$

Riješimo sada jednadžbu $(x \text{ ☺ } 5) \text{ ☺ } 6 = 72\,123$.

$$72\,x + 51 = 72\,123$$
$$72\,x = 72\,072$$
$$x = 72\,072 : 72$$
$$x = 1001$$

Drugo rješenje.

Prvo ćemo odrediti koji broj treba „smješkati“ sa 6 da se dobije 72 123.

$y \text{ ☺ } 6 = \mathrm{y} \cdot 6 + 3 \cdot y + 6 = 9y + 6$

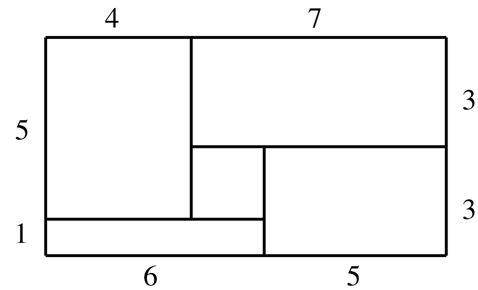
Iz $y \text{ ☺ } 6 = 72\,123$ odnosno $9y + 6 = 72\,123$ slijedi $9y = 72\,117$, $y = 72\,117 : 9 = 8013$.

Sada još treba odrediti broj x tako da vrijedi $x \text{ ☺ } 5 = 8013$.

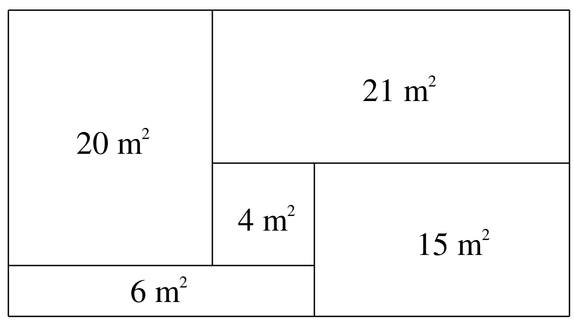
$x \text{ ☺ } 5 = \mathrm{x} \cdot 5 + 3 \cdot x + 5 = 8x + 5$

$8x + 5 = 8013$, $8x = 8008$, odnosno $x = 1001$.

3. Roza ima vrt koji je podijeljen na pravokutne dijelove kao na slici (označene su dimenzije u metrima). U svaki dio vrta planira posaditi različitu vrstu cvijeća. Posadit će begonije, ljiljane, dalije, ruže i irise i to po jednu biljku na svaki kvadratni metar vrta.
O cijenama se raspitala kod susjede Mirte. Lukovice irisa prodaju se samo u paketima po 5 komada, a sadnice ostalog cvijeća prodaju se po komadu. Mirta je tri sadnice begonija platila 39 kn, četiri sadnice ljiljana 73 kn, dvije sadnice dalija 75 kn, dvije sadnice ruža 83 kn, a paket od pet lukovica irisa 104 kn. Koliki je najmanji iznos koji Roza treba potrošiti za kupnju cvijeća, a da pritom u svom vrtu posadi sve kupljene sadnice i lukovice?



Rješenje.
Najprije treba odrediti površine svakog dijela vrta.
Dimenzije neoznačenog pravokutnika su 6 – 4 = 2 m i 3 – 1 = 2 m.
Površine pojedinih dijelova označene su na slici:



Irisi se prodaju u paketima po 5 komada pa ih Roza mora zasaditi na dio površine 15 m² ili 20 m².

Odredimo cijene cvijeća (po komadu) i poredajmo ih od najmanje do najveće.

sadnica begonije	39 kn : 3 = 13 kn
sadnica ljiljana	73 kn : 4 = 18 kn i 25 lp
sadnica dalija	75 kn : 2 = 37 kn i 50 lp
sadnica ruže	83 kn : 2 = 41 kn i 50 lp
lukovica irisa	104 kn : 5 = 20 kn i 80 lp

Poredak vrsta cvijeća po cijenama (po komadu) od najmanje do najveće:
sadnica begonije, sadnica ljiljana, lukovica irisa, sadnica dalija, sadnica ruže.

Ukupni trošak će biti najmanji ako se na veće površine sadi jeftinije cvijeće, a na manje površine skuplje cvijeće. Najbolji bi odabir bio:
begonije na površinu 21 m²
ljiljane na površinu 20 m²
irisi na površinu 15 m²
dalije na površinu 6 m²
ruže na površinu 4 m²

Uočimo da su irisi na površini od 15 m², pa će sve lukovice biti iskorištene.

	površina	Mirta	cijena za Rozin vrt
begonije	21 m^2	3 za 39 kn	$7 \cdot 39 = 273$ kn
ljiljani	20 m^2	4 za 73 kn	$5 \cdot 73 = 365$ kn
irisi	15 m^2	5 za 104 kn	$3 \cdot 104 = 312$ kn
dalije	6 m^2	2 za 75 kn	$3 \cdot 75 = 225$ kn
ruže	4 m^2	2 za 83 kn	$2 \cdot 83 = 166$ kn

ukupno: $273 + 365 + 312 + 225 + 166 = 1341$ kn

Roza će potrošiti najmanje 1341 kn.

4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno tri jednake znamenke?

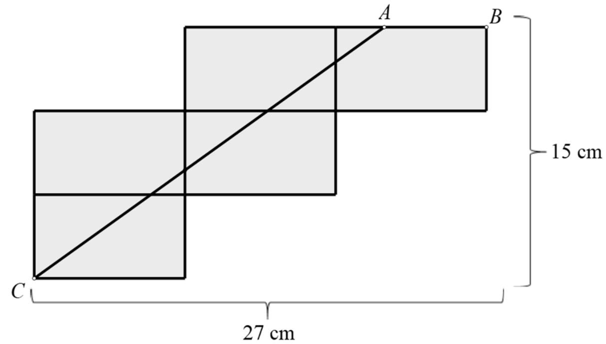
Prvo rješenje.

Takvi brojevi mogu biti troznamenkasti i četveroznamenkasti.
Troznamenkastih ima 9 (to su brojevi 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 i 999).
Četveroznamenkasti brojevi s tri jednake znamenke mogu biti oblika $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$ i $\overline{baaa}$.
Da bismo odredili koliko je brojeva oblika $\overline{aaab}$, uočimo da znamenke a i b moraju biti različite, a a ne može biti 0. To znači da znamenku a možemo odabrati na 9 načina (bilo koja znamenka osim 0), a zatim i znamenku b na 9 načina (bilo koja osim a). Dakle, brojeva oblika $\overline{aaab}$ ima $9 \cdot 9 = 81$.
Na isti način zaključujemo da i brojeva oblika $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$ ima po 81, a isto vrijedi i za brojeve oblika $\overline{baaa}$ samo što sada prvo biramo b (različito od 0), a zatim a (različito od b).
Ukupno postoje $4 \cdot 81 = 324$ četveroznamenkasta broja s tri jednake znamenke.
Ukupno postoje $324 + 9 = 333$ broja manja od 10 000 s tri jednake znamenke.

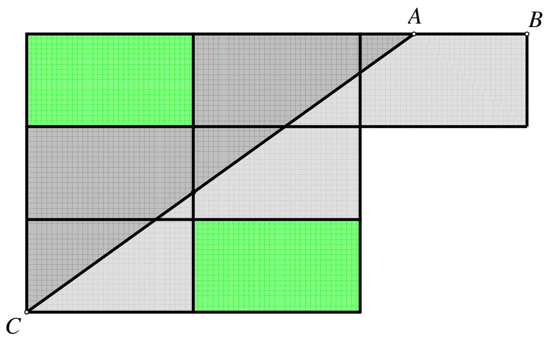
Drugo rješenje.

Takvi brojevi mogu biti troznamenkasti i četveroznamenkasti.
Troznamenkastih ima 9 (to su brojevi 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 i 999).
Ako četveroznamenkasti broj ima tri znamenke 1, onda te znamenke mogu biti raspoređene na četiri načina: $\overline{a111}$, $\overline{1a11}$, $\overline{11a1}$, $\overline{111a}$.
Brojeva oblika $\overline{a111}$ ima 8, jer a mora biti različit od 0 i 1.
Brojeva oblika $\overline{1a11}$ ima 9 jer a može biti bilo koja znamenka različita od 1.
Brojeva oblika $\overline{11a1}$ ima također 9 (a nije 1).
Brojeva oblika $\overline{111a}$ ima također 9 (a nije 1).
Za znamenku 1, takvih je brojeva 8 + 9 + 9 + 9 = 35.
Analogno za svaku od znamenka 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ili 9 možemo zaključiti da takvih brojeva ima 35.
Ako četveroznamenkasti broj ima tri znamenke 0, onda to moraju biti znamenke stotica, desetica i jedinica, dok znamenka tisućica može biti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9. Takvih je brojeva ukupno 9.
Četveroznamenkastih brojeva koji imaju točno tri jednake znamenke ima $9 \cdot 35 + 9 = 324$.
Ukupan broj brojeva manjih od 10 000 s tri jednake znamenke je $9 + 324 = 333$.

5. Pet jednakih pravokutnika raspoređeno je tako da tvore lik duljine 27 cm i širine 15 cm, kao što je prikazano na slici. Unutar dobivenog lika nacrtana je dužina $\overline{AC}$ koja taj lik dijeli na dva dijela jednakih površina.
Odredi duljinu dužine $\overline{AB}$.

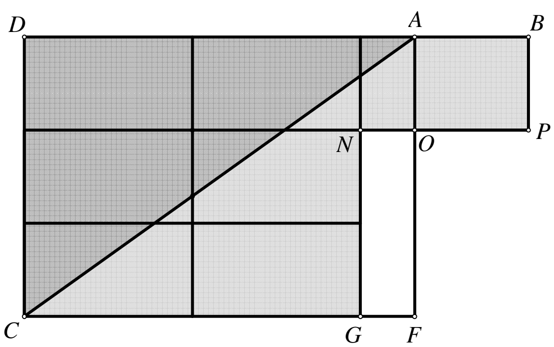


Prvo rješenje.
Dimenzije svakog od pravokutnika su 27 : 3 = 9 cm i 15 : 3 = 5 cm.
Osjenčanom liku docrtajmo dva pravokutnika na način prikazan na slici.



Kako su ti pravokutnici jednakih površina, dužina $\overline{AC}$ dijeli novodobiveni lik na dva dijela jednakih površina.

Nacrtajmo dužinu $\overline{AF}$ tako da $CFAD$ bude pravokutnik. Dužina $\overline{AC}$ dijeli taj pravokutnik na dva dijela jednakih površina.



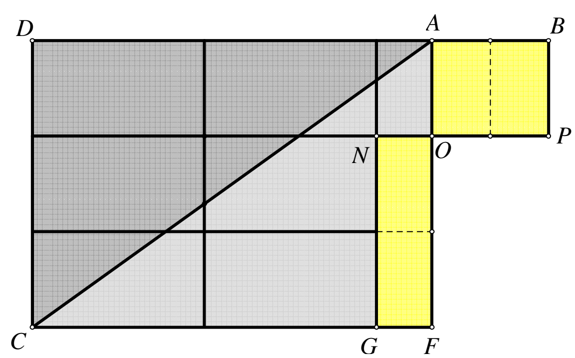
Kako su površine trokuta CFA i CAD jednake, zaključujemo da je površina trokuta CFA jednaka površini polovine novog lika koja je obojena svijetlosivom bojom.

To znači da je površina svijetlosivog dijela izvan pravokutnika $CFAD$ jednaka je površini bijelog dijela unutar tog pravokutnika. Drugim riječima, površine pravokutnika $GFON$ *i* $OPBA$ međusobno su jednake.

No, širina pravokutnika $OPBA$ upola je manja od širine pravokutnika $GFON$ ($|FO| = 2|AO|$), pa je njegova visina dvostruko veća ($|OP| = 2|NO|$).

Vrijedi $|NO| + |OP| = |NP| = 9$ cm,

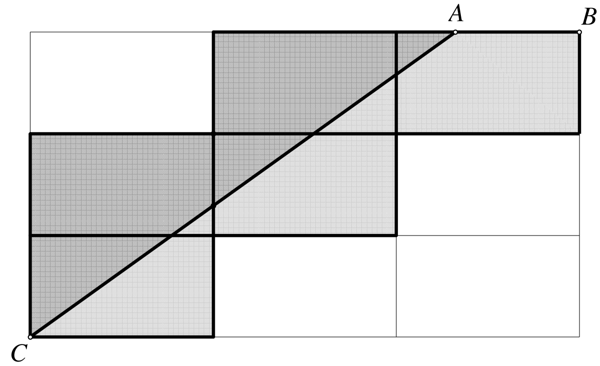
$$|NO| + 2|NO| = 9 \text{ cm}$$
$$3|NO| = 9 \text{ cm}$$
$$|NO| = 3 \text{ cm}$$
$$|OP| = 6 \text{ cm}$$
$$|AB| = 6 \text{ cm}.$$



Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi 6 cm.

Drugo rješenje.

Dimenzije svakog od pravokutnika su 27 : 3 = 9 cm = 90 mm i 15 : 3 = 5 cm = 50 mm, pa je površina svakog 4500 mm².



Smjestimo dobiveni lik u pravokutnu mrežu i osjenčamo dijelove jednakih površina. Odredimo površinu P svakog od tih dijelova.

Vrijedi:

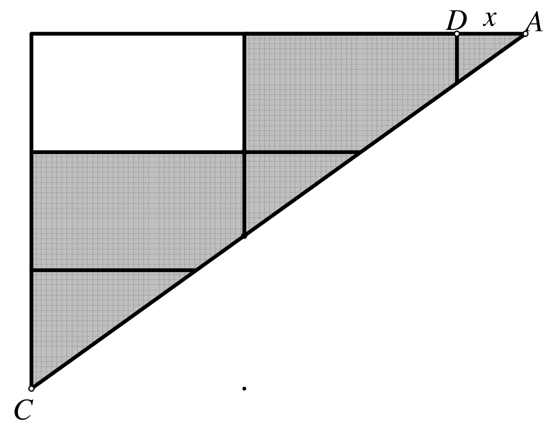
$$2P = 5 \cdot 4500 \text{ mm}^2 = 22500 \text{ mm}^2$$

pa je

$$P = 11250 \text{ mm}^2$$

Uočimo sada pravokutni trokut koji se sastoji od tamnije osjenčanog dijela i jednog dodatnog pravokutnika. Njegova je površina

$$P + 4500 = 11250 + 4500 = 15750 \text{ mm}^2.$$



Označimo s x duljinu dužine $\overline{AD}$, vrijedi:

$150 \cdot (180 + x) : 2 = 15750$
$150 \cdot (180 + x) = 31500$
$15 \cdot (180 + x) = 3150$
$180 + x = 210$
$x = 30 \text{ mm} = 3 \text{ cm}$

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi 9 – 3 = 6 cm.