Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 11. lipnja 2022.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Kazaljke

Izračunaj veličinu manjega kuta između satne i minutne kazaljke ure u 13 sati 8 minuta i 18 sekundi. Veličinu kuta izrazi u kutnim minutama.

Rezultat: **939**

Prvo rješenje.

minutna kazaljka	za jedan sat opiše kut od $360°$
	za jednu minutu opiše kut od $6° = 360'$
	za jednu sekundu opiše kut od $6'$
satna kazaljka	za jedan sat opiše kut od $30°$
	za jednu minutu opiše kut od $0.5° = 30'$
	za jednu sekundu opiše kut od $0.5'$

U 13 sati kazaljke zatvaraju kut od 30^o jer je velika na broju 12, a mala na broju 1.

Za 8 minuta i 18 sekundi minutna kazaljka opiše kut od $8 \cdot 360' + 18 \cdot 6' = 2988'$.

Za 8 minuta i 18 sekundi satna kazaljka opiše kut od $8 \cdot 30' + 18 \cdot 0.5' = 249'$.

U 13 sati bila je razlika među kazaljkama $30°$ pa taj kut dodamo na $249'$

$$30° + 249' = 30 \cdot 60' + 249' = 2049'$$

$2988' - 2049' = 939'$

Kazaljke zatvaraju kut od $939'$.

Drugo rješenje.

Minutna kazaljka u minuti prođe $360° : 60 = 6°$, a satna kazaljka u minuti prođe $30° : 60 = 0.5°$. U promatranom trenutku obje su kazaljke između oznaka „1“ i „2“.

Minutna kazaljka je oznaku „1“ prošla pred 3 min i 18 s i za to vrijeme se pomaknula za

$$\left(3 + \frac{18}{60}\right) \cdot 6° = 19.8°.$$

Satna je tu oznaku prošla pred 8 min i 18 s, te se pomaknula za

$$\left(8+\frac{18}{60}\right)\cdot 0.5^\circ = 8.3\cdot 0.5^\circ = 4.15^\circ.$$

Kut između kazaljki je $19.8^\circ - 4.15^\circ = 15.65^\circ = 939'$.

2. Najveći od uzastopnih

Zbroj 1259 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 1259. Koliki je najveći pribrojnik?

Rezultat: **630**

Prvo rješenje.

Neka je najmanji broj označen s x.

Sljedeći broj je $x+1$, pa $x+2$, ..., i tako dalje do 1259. broja koji je $x+1258$

$x+x+1+x+2+\cdots+x+1258 = 1259x+1+2+\cdots+1258$

$= 1259x+\frac{1258\cdot 1259}{2} = 1259x+1259\cdot 629$

Vrijedi:

$1259x+1259\cdot 629 = 1259 \;/:1259$

$x+629=1$

$x=-628$

Najveći pribrojnik je broj $x+1258=-628+1258=630$.

Drugo rješenje.

Neka je srednji broj po veličini označen s x

Prethode mu brojevi $x-1, x-2, \ldots, x-629$, a slijede $x+1, x+2, \ldots, x+629$

$$x-629+x-628+\cdots+x-1+x+x+1+\cdots+x+628+x+629=1259x$$

Vrijedi: $1259x=1259$ pa je $x=1$.

Najveći pribrojnik je broj $x+629=1+629=630$.

Treće rješenje.

Kad bismo svaki broj umanjili za 1, njihov zbroj bi bio 0.

Znajući da ih ima 1259 = 2 · 629 + 1, zaključili bismo da se radi o 629 negativnih brojeva, broju 0 i 629 pozitivnih brojeva, tj. najveći od tih brojeva bio bi 629.

To znači da je najveći promatrani broj za 1 veći, dakle 630.

3. Parne i neparne

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna? Nula je parna znamenka.

Rezultat: **675**

Prvo rješenje.

Troznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Neka je p parna, a n neparna znamenka troznamenkastog broja. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$.

Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke parne ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ jer je znamenka stotica različita od nule. Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke neparne ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Ako iz skupa svih troznamenkastih brojeva isključimo one koji imaju sve parne ili sve neparne znamenke, preostat će brojevi koji imaju barem jednu parnu i barem jednu neparnu znamenku.

Njihov broj je $900 - 100 - 125 = 675$.

Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima 675.

Drugo rješenje.

Neka je p parna, a n neparna znamenka troznamenkastog broja. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$. Kako barem jedna znamenka mora biti parna i barem jedna znamenka neparna, traženi troznamenkasti brojevi su oblika $\overline{pnn}, \overline{npn}, \overline{nnp}, \overline{ppn}, \overline{pnp}, \overline{npp}$.

Brojeva oblika $\overline{pnn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npn}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{nnp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{ppn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{pnp}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima $100 + 125 + 125 + 100 + 100 + 125 = 675$.

4. Zbroj opsega

Koliki je zbroj opsega svih međusobno nesukladnih trokuta kojima je opseg prirodan broj, a duljine dviju stranica im iznose 7 i 12 ?

Rezultat: **403**

Rješenje.

U svakom trokutu vrijedi: zbroj duljina dviju stranica veći je od duljine preostale stranice.

Zadane su stranice duljina 7 i 12. Treća stranica ne može biti duljine 5 niti kraća jer je $7 + 5 = 12$. Također, treća stranica ne može biti 19 niti dulja jer je $7 + 12 = 19$.

Duljina treće stranice je iz skupa $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$.

Postoji ukupno 13 takvih trokuta.

U zbroju opsega svih trokuta po 13 puta imamo stranice duljina 7 i 12 i po jednom svaku duljinu iz skupa $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$$6 + 7 + \cdots + 17 + 18 = 156$$

$$13 \cdot (7 + 12) = 13 \cdot 19 = 247$$

$$247 + 156 = 403$$

Zbroj opsega svih takvih trokuta iznosi 403.

5. Visine

U nekom razredu prosječna visina svih dvadeset i dvoje učenika bila je 163.5 cm. Uskoro je u razred upisan još jedan učenik pa se prosječna visina povećala za 0.3 cm, a već sljedećeg dana jedna se učenica ispisala iz razreda i prosječna visina se opet povećala, ovaj put za 0.4 cm. Koliko je centimetara visoka učenica koja se ispisala?

Rezultat: **155**

Prvo rješenje.

Neka je a zbroj visina dvadeset i dvoje učenika.

Vrijedi: $\frac{a}{22} = 163.5$ pa je $a = 163.5 \cdot 22$ odnosno $a = 3597$.

Neka je y visina upisanog učenika.

Tada je zbroj visina svih dvadeset i troje učenika $y + 3597$, a prosječna visina $163.5 + 0.3 = 163.8$, pa vrijedi: $\frac{y+3597}{23} = 163.8$.

Odatle dobivamo $y + 3597 = 163.8 \cdot 23 = 3767.4$.

Neka je x visina učenice koja se ispisala.

Tada je zbroj visina preostalih dvadeset i dvoje učenika $3767.4 - x$,

a njihova prosječna visina $163.8 + 0.4 = 164.2$.

Zato vrijedi: $\frac{3767.4 - x}{22} = 164.2$, pa slijedi

$3767.4 - x = 164.2 \cdot 22 = 3612.4$, $x = 3767.4 - 3612.4 = 155$

Visina učenice koja se ispisala je 155 cm.

Drugo rješenje.

Zadatak možemo riješiti rješavanjem „unatrag“

Prosječna visina se povećala dva puta pa konačna iznosi $163.5 + 0.3 + 0.4 = 164.2$.

Neka je a zbroj visina dvadeset i dvoje učenika nakon što se ispisala učenica.

Vrijedi: $\frac{a}{22} = 164.2$, pa je $a = 164.2 \cdot 22 = 3612.4$

Neka je x visina učenice koja se ispisala.

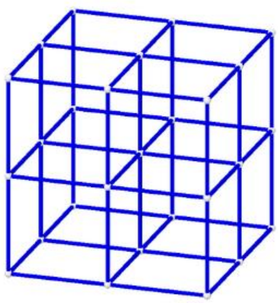
Kada je ta učenica bila u razredu, zbroj visina svih dvadeset i troje učenika bio je $x + 3612.4$, a prosječna visina $163.5 + 0.3 = 163.8$.

Vrijedi: $\frac{x+3612.4}{23} = 163.8$, pa slijedi $x + 3612.4 = 163.8 \cdot 23 = 3767.4$

i konačno $x = 3767.4 - 3612.4 = 155$

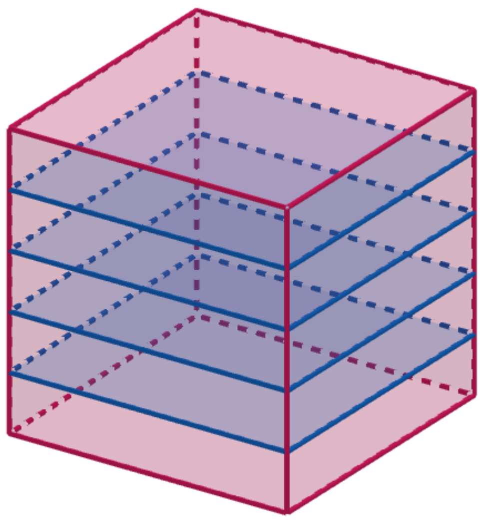
Visina učenice koja se ispisala je 155 cm.

6. Kocka od štapića



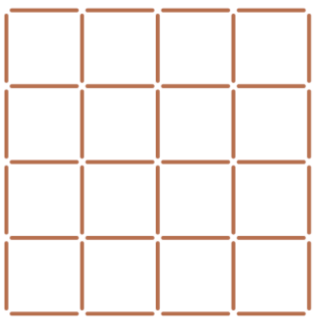
Od štapića se izrađuju kocke. Za kocku 1 × 1 × 1 potrebno je 12 štapića. Da bismo tu kocku dopunili do kocke 2 × 2 × 2 potrebna su dodatna 42 štapića (vidi sliku). Koliko je dodatnih štapića potrebno da bismo kocku 8 × 8 × 8 dopunili do kocke 9 × 9 × 9 ?

Rezultat: **756**



Prvo rješenje.

Promotrimo kocku dimenzija $n \times n \times n$ i odredimo od koliko je ona štapića napravljena. Uočimo da su neki štapići postavljeni vertikalno, a ostali su raspoređeni u horizontalnim ravninama.



Tih ravnina ima $n + 1$. U svakoj od njih štapići formiraju kvadrat $n \times n$. Uočavamo štapiće u dva smjera, u svakom smjeru je $n + 1$ niz od po n štapića. Dakle, svaki od kvadrata $n \times n$ sačinjen je od $2n \cdot (n + 1)$ štapića. Ukupno je u horizontalnim ravninama $2n \cdot (n + 1)^2$ štapića.

Još trebamo prebrojati vertikalne štapiće. Uočimo da se nad svakom točkom kvadrata u donjoj ravnini nalazi vertikala od n štapića. To znači da je vertikalnih štapića ukupno $(n + 1)^2 \cdot n$.

Dakle, kocka $n \times n \times n$ napravljena je od $3n \cdot (n + 1)^2$ štapića.

Kocka $8 \times 8 \times 8$ sastoji se od $3 \cdot 8 \cdot 9^2 = 1944$, a štapića, a kocka $9 \times 9 \times 9$ od $3 \cdot 9 \cdot 10^2 = 2700$.

Za dopunu je potrebno $2700 - 1944 = 756$ štapića.

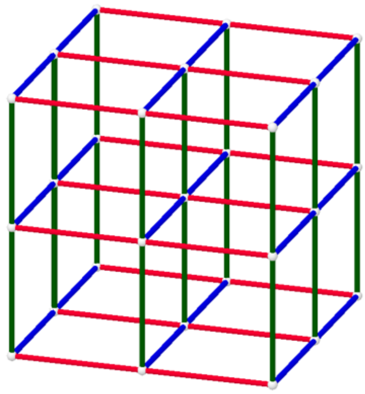
Drugo rješenje.

Kocka ima 12 bridova pa je za kocku dimenzija $1 \times 1 \times 1$ potrebno 12 štapića. Za kocku dimenzija $2 \times 2 \times 2$ potrebno je $12 + 42 = 54$ štapića. Oni su raspoređeni ovako:

- 12 bridova, za svaki brid 2 štapića, ukupno 24 štapića

- 6 strana, na svakoj strani dodatna $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ štapića (bez bridova), ukupno 24 štapića

- štapići unutar kocke koji povezuju nasuprotne strane, 3 para nasuprotnih strana povezanih s $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ štapića, ukupno 6 štapića



Za kocku dimenzija $8 \times 8 \times 8$ potrebno je 1944 štapića:

- 12 bridova, za svaki brid 8 štapića, ukupno 96 štapića

- 6 strana, na svakoj strani dodatna $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ štapića (bez bridova), ukupno 672 štapića

- štapići unutar kocke koji povezuju nasuprotne strane, 3 para nasuprotnih strana povezanih s $8 \cdot 7 \cdot 7 = 392$ štapića, ukupno 1176 štapića

Za kocku dimenzija $9 \times 9 \times 9$ potrebno je 2700 štapića:

- 12 bridova, za svaki brid 9 štapića, ukupno 108 štapića

- 6 strana, na svakoj strani dodatna $2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$ štapića (bez bridova), ukupno 864 štapića

- štapići unutar kocke koji povezuju nasuprotne strane, 3 para nasuprotnih strana povezanih s $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ štapića, ukupno 1728 štapića

Konačno, $2700 - 1944 = 756$, što znači da je za nadopunjavanje kocke potrebno 756 štapića.

7. Prirodni razlomak

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je razlomak

$$\frac{6n + 900}{2n - 3}$$

prirodan broj?

Rezultat: **672**

Rješenje.

Vrijedi

$$\frac{6n + 900}{2n - 3} = \frac{3(2n - 3) + 909}{2n - 3} = 3 + \frac{909}{2n - 3}$$

Dani razlomak $\frac{6n+900}{2n-3}$ je prirodan točno onda kada je prirodan razlomak $\frac{909}{2n-3}$.

Razlomak $\frac{909}{2n-3}$ je prirodan ako je $(2n - 3)$ djelitelj broja 909.

Kako je $909 = 3 \cdot 3 \cdot 101$, djelitelji broja 909 su: $1, 3, 9, 101, 303, 909$.

Zato postoji šest mogućnosti:

$$2n - 3 = 1 \qquad n = 2$$

$$2n - 3 = 3 \qquad n = 3$$

$$2n - 3 = 9 \qquad n = 6$$

$$2n - 3 = 101 \qquad n = 52$$

$$2n - 3 = 303 \qquad n = 153$$

$$2n - 3 = 909 \qquad n = 456$$

$$2 + 3 + 6 + 52 + 153 + 456 = 672$$

Zbroj svih traženih brojeva iznosi 672.

8. Drvene brojke

Mali Marko se igra brojkama izrađenima od drva. On ima dvije brojke 1, sedam brojki 2 i jednu brojku 3. Želi ih nanizati jednu do druge tako da brojke 1 i 3 ne budu susjedne. Koliko različitih deseteroznamenkastih brojeva Marko može dobiti na taj način?

Rezultat: **224**

Prvo rješenje.

Tekst rješenja Ako se brojka 3 nalazi na prvom mjestu, nakon nje treba biti 2. Sljedećih 8 mjesta popunjavaju dvije brojke 1 i ostalih 6 dvojki. Dovoljno je pogledati na koliko načina možemo smjestiti 2 dvojke na 2 od mogućih 8 mjesta. To je moguće na $8 \cdot 7 : 2 = 28$ načina.

Ako se brojka 3 nalazi na drugom mjestu, ispred i iza njega treba biti po jedna dvojka. Preostalih 5 dvojki i dvije jedinice treba razmjestiti na ostalih 7 mjesta. Dovoljno je odrediti na koliko se načina mogu smjestiti 2 jedinice na 2 od mogućih 7 mjesta, a to je na $7 \cdot 6 : 2 = 21$ način.

Ako se brojka 3 nalazi na 3., 4.,…, 9. mjestu, bit će jednako toliko načina.

Ako se brojka 3 nalazi na posljednjem, desetom mjestu, broj načina je jednak kao i kad je na 1. mjestu.

Ukupan broj načina je, dakle, $2 \cdot 28 + 8 \cdot 21 = 56 + 168 = 224$.

Drugo rješenje.

Ako se brojka 3 nalazi na prvom mjestu, nakon nje treba biti 2. Sljedećih 8 mjesta popunjavaju dvije brojke 1 i ostalih 6 dvojki. Dovoljno je pogledati na koliko načina možemo smjestiti 2 dvojke na 2 od mogućih 8 mjesta. To je moguće na $8 \cdot 7 : 2 = 28$ načina.

Jednako je toliko, tj. 28 načina u kojima se brojka 3 nalazi na posljednjem mjestu.

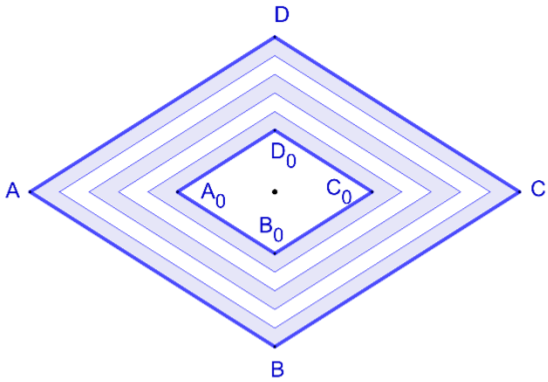
Ako se brojka 3 nalazi na drugom mjestu, ispred i iza njega treba biti po jedna dvojka. U tom slučaju niz 232 promatramo kao jednu cjelinu koja se ne razdvaja. Uz taj niz 232, treba smjestiti još 2 jedinice i preostalih 5 dvojki.

Ako niz 232 smjestimo na početak, ostaje još 2 jedinice i 5 dvojki koje možemo smjestiti na $7 \cdot 6 : 2 = 21$ način (dovoljno je odrediti na koliko načina se mogu smjestiti 2 jedinice na 2 od mogućih 7 mjesta). Za bilo koji od 21 načina smještanja 2 jedinice i 5 dvojki niz 232 možemo pomicati na osam mogućih položaja: na početak, između prve i druge brojke, između druge i treće,…, nakon sedme brojke. Tako se dobiva $8 \cdot 21 = 168$ načina u kojima brojka 3 nije ni na prvom ni na posljednjem mjestu.

Ukupno je to $28 + 28 + 168 = 224$ načina.

9. Rombovi

Romb $A_0B_0C_0D_0$ nalazi se unutar romba $ABCD$ tako da su im stranice usporedne, a središta u istoj točki. Dužine $\overline{AA_0}$, $\overline{BB_0}$, $\overline{CC_0}$ i $\overline{DD_0}$ podijeljene su na pet sukladnih dijelova. Dobivene točke spojene su dužinama usporednim sa stranicama danih rombova i tako su nastala četiri nova romba.



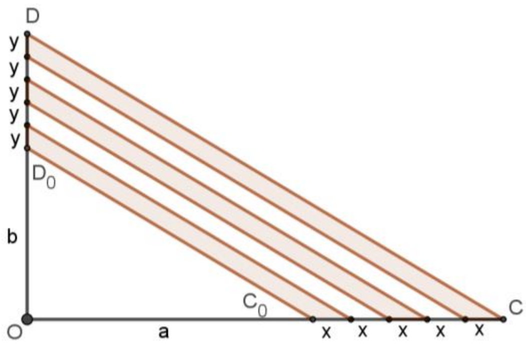
Površina romba $ABCD$ je 2250 cm², a površina romba $A_0B_0C_0D_0$ iznosi 810 cm².
Kolika je ukupna obojena površina na slici?

Rezultat: **864**

Prvo rješenje.

Zbog simetričnosti promatrat ćemo četvrtinu tražene površine, kao što prikazuje slika. Uočavamo 6 pravokutnih trokuta, čije površine označimo, počevši od najmanje, s P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

Uz oznake kao na slici, vrijedi:



$P_0 = \frac{1}{2} a \cdot b$,

$$P_1 = \frac{1}{2}(a + x) \cdot (b + y) = \frac{1}{2}(ab + ay + xb + xy)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(a + 2x) \cdot (b + 2y) = \frac{1}{2}(ab + 2ay + 2xb + 4xy)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(a + 3x) \cdot (b + 3y) = \frac{1}{2}(ab + 3ay + 3xb + 9xy)$$

$$P_4 = \cdots = \frac{1}{2}(ab + 4ay + 4xb + 16xy)$$

$$P_5 = \cdots = \frac{1}{2}(ab + 5ay + 5xb + 25xy)$$

Površina najmanjeg obojenog četverokuta je $P_1 - P_0 = \frac{1}{2}(ay + xb + xy)$

Površina sljedećeg po veličini obojenog četverokuta je $P_3 - P_2 = \frac{1}{2}(ay + xb + 5xy)$

Površina najvećeg obojenog četverokuta je $P_5 - P_4 = \frac{1}{2}(ay + xb + 9xy)$

Zbroj svih triju površina je $\frac{1}{2}(3ay + 3xb + 15xy) = \frac{3}{2}(ay + xb + 5xy)$

Budući da je,

$$P_5 - P_0 = \frac{1}{2}(ab + 5ay + 5xb + 25xy) - \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}(5ay + 5xb + 25xy)$$

$$= \frac{5}{2}(ay + xb + 5xy),$$

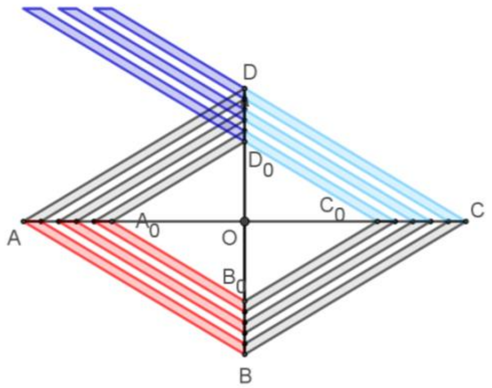
može se uočiti da je zbroj triju obojenih četverokuta zapravo jednak $\frac{3}{5}(P_5 - P_0)$.

Iz zadanih površina najvećeg i najmanjeg romba izračunajmo razliku površina najvećeg i najmanjeg trokuta:

$$P_5 - P_0 = \frac{1}{4}(2250 - 810) = 360 \text{ cm}^2$$

Zato je $\frac{3}{5}(P_5 - P_0) = 216 \text{ cm}^2$. Ukupna obojena površina iznosi $4 \cdot 216 = 864 \text{ cm}^2$.

Drugo rješenje.



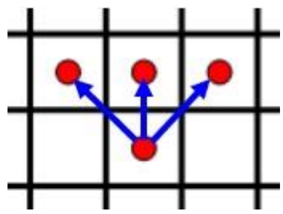
Pomaknemo li trapez ABB_0A_0 s obojanim crvenim „trakama“ na mjesto tamnoplavih traka na slici, te tako nadopunimo svijetloplave trake, dobivamo 3 sukladna paralelograma, sastavljena od svijetloplavog i tamnoplavog dijela, između kojih se nalaze još dva takva bijela paralelograma.

Jasno je da plavi dio čini $\frac{3}{5}$ površine koja čini polovinu razlike površina najvećeg i najmanjeg romba.

Isto tako vrijedi za preostala dva dijela u kojima sivi dio čini $\frac{3}{5}$ preostale površine.

Prema tome, ukupna obojana površina čini $\frac{3}{5}$ razlike površina početnih rombova, a to je $\frac{3}{5} \cdot (2250 - 810) = 864 \text{ cm}^2$.

10. Figurica



Figurica se nalazi na srednjem polju donjeg retka ploče 7×7. U svakom potezu figurica se pomiče za jedno polje prema gore ili gore-lijevo ili gore-desno, kao što je prikazano na slici. Na koliko različitih načina možemo figuricu nizom od šest poteza premjestiti u gornji redak ploče?

Rezultat: **659**

Rješenje.

Na svako polje ćemo zapisati broj načina da figurica dođe do tog polja. Promotrimo žuto označeno polje. Ako je figurica u nekom trenutku na tom polju, u prethodnom potezu je morala biti na jednom od tri plavo označena polja u retku ispod nje. Zato ćemo u žuto polje upisati zbroj brojeva u plavim poljima.

44	89	126	141	126	89	44
14	30	45	51	45	30	14
4	10	16	19	16	10	4
1	3	6	7	6	3	1
	1	2	3	2	1	
		1	1	1		
			1			

Počinjemo sa srednjim poljem donjeg retka, tj. s početnim položajem figurice, gdje upisujemo broj 1. Tablicu dalje popunjavamo po retcima, od donjeg prema gore.

Kada popunimo tablicu treba još samo zbrojiti sve brojeve u gornjem retku:

44 + 89 + 126 + 141 + 126 + 89 + 44 = 659.