Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 11. lipnja 2022.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. Stonoga

Stonoga Milica ima točno stotinu nogu, 50 lijevih i 50 desnih. Svako jutro ona obuva 50 pari cipela i to tako da najprije obuje sve lijeve, a potom sve desne. Za obuvanje svake lijeve cipele treba joj jedna sekunda. No onda se umori pa joj za desne cipele treba više vremena. Za prvu treba jednu sekundu, za drugu tri, za treću pet i tako do posljednje desne cipele, svaki puta dvije sekunde više nego za prethodnu. No navečer, kad izuva cipele, ukupno joj treba triput manje vremena nego za obuvanje. Koliko sekundi stonogi Milici treba za izuvanje svih cipela?

Rezultat: **850**

Rješenje.

Stonogi za obuvanje svih lijevih cipela treba $(50 \cdot 1)$ s $= 50$ s.

Za obuvanje svih desnih cipela treba joj $(1 + 3 + \cdots + 99)$ s $= (25 \cdot 100)$ s $= 2500$ s.

Stoga joj za obuvanje svih lijevih i svih desnih cipela treba, ukupno, $(50 + 2500)$ s $= 2550$ s.

Za izuvanje cipela treba joj $(2550 : 3)$ s $= 850$ s.

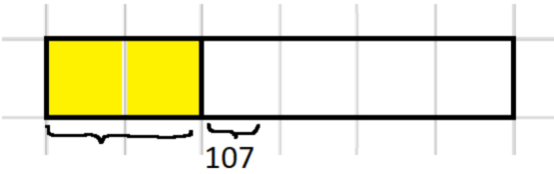
2. Ante i Borna

Ante je krenuo iz mjesta A u mjesto B, a Borna istim putem iz mjesta B u mjesto A. Nakon što je Ante prešao trećinu ukupne duljine puta i još 107 km, a Borna šestinu ukupne duljine puta i još 161 km, njihova je međusobna udaljenost 113 km. Kolika je, u kilometrima, udaljenost mjesta A i B ako se Ante i Borna još nisu mimoišli?

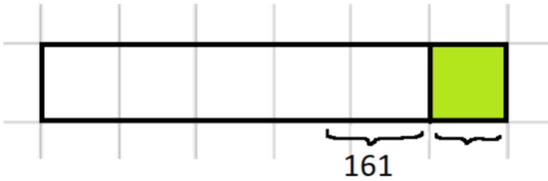
Rezultat: **762**

Rješenje.

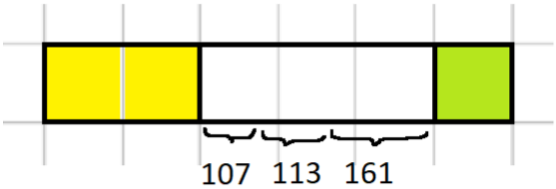
Ante je prešao



Borna je prešao



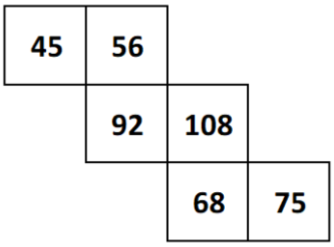
Nakon toga je njihova međusobna udaljenost 113 km



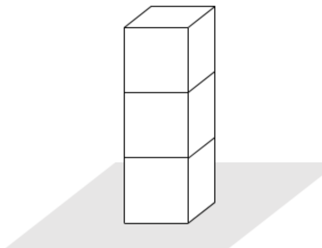
pa je zbroj udaljenosti $107 + 113 + 161 = 381$ km jednak polovini ukupne duljine puta.

Zato je udaljenost mjesta A i B jednaka $2 \cdot 381 = 762$ km.

3. Tri kocke



Tri jednake kocke imaju mrežu kakva je prikazana na slici. Kocke su postavljene na stol, jedna na drugu. Koliki je najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama tako postavljenih kocki na stolu?



Rezultat: **890**

Rješenje.

Kada se takve tri kocke slože na stol, jedna na drugu, 5 strana nije vidljivo, a preostalih 13 je vidljivo. Kako bismo odredili najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocaka, odredimo najveći mogući zbroj brojeva na 5 strana koje nisu vidljive.

Kada se iz prikazane mreže napravi kocka, na njenim su nasuprotnim stranama parovi brojeva 45 i 108, 92 i 75, 56 i 68. Najveći mogući zbroj takvog para je $92 + 75 = 167$. Donje dvije kocke imaju nevidljive strane s brojevima 92 i 75, a gornja kocka na nevidljivoj strani ima broj 108.

Zbroj svih skrivenih brojeva je $167 + 167 + 108 = 442$.

Zbroj brojeva na svakoj kocki je $45 + 56 + 92 + 108 + 68 + 75 = 444$ pa je zbroj na tri kocke $3 \cdot 444 = 1332$.

Od zbroja svih brojeva oduzmimo zbroj skrivenih brojeva, $1332 - 442 = 890$.

Najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocki je 890.

4. Kut među kazaljkama

Izračunaj veličinu manjega kuta između satne i minutne kazaljke ure u 13 sati 8 minuta i 18 sekundi. Veličinu kuta izrazi u kutnim minutama.

Rezultat: **939**

Rješenje.

Neka je početni položaj kazaljki ure onaj u podne kada se satna i minutna kazaljka poklapaju.

Satna kazaljka ure u jednom satu „prijeđe“ $30°$.

Satna kazaljka ure u jednoj minuti „prijeđe“ $(30 : 60)°$ pa u 8 minuta „prijeđe“ $(8 \cdot 30 : 60)° = 4°$.

Satna kazaljka ure u jednoj sekundi „prijeđe“ $(30 : 60 : 60)° = (30 : 3600)°$ pa u 18 sekundi „prijeđe“ $(18 \cdot 30 : 3600)° = 0.15°$.

Satna kazaljka ure od podneva do 13 sati 8 minuta i 18 sekundi ukupno „prijeđe“

$$(30 + 4 + 0.15)° = 34.15°.$$

Minutna kazaljka ure u jednoj minuti „prijeđe“ $(360 : 60)° = 6°$ pa u 8 minuta „prijeđe“ $(8 \cdot 6)° = 48°$.

Minutna kazaljka ure u jednoj sekundi „prijeđe“ $(360 : 60 : 60)° = (360 : 3600)°$ pa u 18 sekundi „prijeđe“ $(18 \cdot 360 : 3600)° = 1.8°$.

Minutna kazaljka ure od podneva do 13 sati 8 minuta i 18 sekundi ukupno „prijeđe“ $(48 + 1.8)° = 49.8°$.

Manja mjera kuta koji zatvaraju satna i minutna kazaljka ure u 13 sati 8 minuta i 18 sekundi je $(49.8 - 34.15)° = 15.65° = (15.65 \cdot 60)' = 939'$.

5. Vreća jabuka

Na pitanje koliko jabuka ima u vreći, prodavač je odgovorio: „Ako ih brojim po dvije, ili po tri, ili po četiri, ili po pet, ili po šest, uvijek jedna ostane. Ako ih brojim po sedam ne ostane mi niti jedna.“ Odredi najmanji mogući broj jabuka u vreći.

Rezultat: **301**

Rješenje.

Broj jabuka u vreći može se bez ostatka podijeliti sa 7, a pri dijeljenju s 2, 3, 4, 5 i 6 ostatak je 1.
To znači da se broj jabuka umanjen za 1 može podijeliti (bez ostatka) s 2, 3, 4, 5 i 6.
Ako se bez ostatka može podijeliti s 4, može se i s 2.
Ako se bez ostatka može podijeliti s 4 i 3 znači da se može podijeliti i sa 12.
Ako se može bez ostatka podijeliti s 12, može i sa 6.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 12 i 5 znači da se može podijeliti i sa 60.
To mogu biti brojevi 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, …
Traženi broj je za 1 veći i mora se moći bez ostatka podijeliti sa 7.

61 : 7 = 8 i ostatak 5.
121 : 7 = 17 i ostatak 2
181 : 7 = 25 i ostatak 6
241 : 7 = 34 i ostatak 3
301 : 7 = 43
Najmanji broj jabuka koji se može nalaziti u vreći je 301.

6. Parne i neparne

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna? Nula je parna znamenka.

Rezultat: **675**

Prvo rješenje.

Neka je p parna, a n neparna znamenka troznamenkastog broja. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$. Kako barem jedna znamenka mora biti parna i barem jedna znamenka neparna, traženi troznamenkasti brojevi su oblika $\overline{pnn}$, $\overline{npn}$, $\overline{nnp}$, $\overline{ppn}$, $\overline{pnp}$, $\overline{npp}$.

Brojeva oblika $\overline{pnn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npn}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{nnp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{ppn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{pnp}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima $100 + 125 + 125 + 100 + 100 + 125 = 675$.

Drugo rješenje.

Troznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Neka je p parna, a n neparna znamenka. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$.

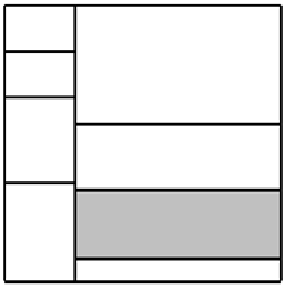
Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke neparne ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke parne ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ jer je znamenka stotica različita od nule.

Ako iz skupa svih troznamenkastih brojeva isključimo one koji imaju sve parne ili sve neparne znamenke, preostat će brojevi koji imaju barem jednu parnu i barem jednu neparnu znamenku.

Njihov broj je $900 - 100 - 125 = 675$. Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima 675.

7. Površina pravokutnika

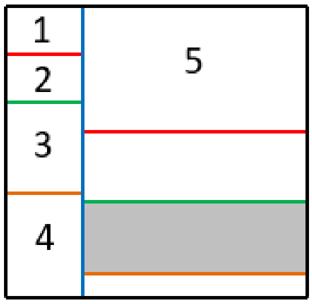
Kvadrat je podijeljen na osam pravokutnika kao na slici. Zbroj opsega tih osam pravokutnika je 288 cm. Odredi površinu istaknutog pravokutnika u kvadratnim centimetrima, ako je njegova dulja stranica triput dulja od kraće, a kraća stranica četiri puta kraća od stranice kvadrata.



Rezultat: **108**

Rješenje.

Na crtežu uočimo pravokutnike označene s 1, 2, 3, 4 i 5. Pravokutnici 1 i 2 imaju jednu zajedničku stranicu. Zbroj duljina desnih stranica pravokutnika 1, 2, 3 i 4 jednak je duljini stranice nacrtanog kvadrata. Stranica pravokutnika 1 dio je stranice pravokutnika 5, a zbroj duljine donjih stranice pravokutnika 1 i pravokutnika 5 jednak je duljini stranice nacrtanog kvadrata. Stranice pravokutnika koje se nalaze unutar kvadrata (na crtežu obojane crvenom, plavom, zelenom i smeđom bojim) u zbroju opsega pravokutnika koristimo dva puta.



Neka je a duljina stranice kvadrata. Tada je opseg svih pravokutnika jednak $4a + 2 \cdot 4a = 12a$, odakle dobivamo $a = 24$ cm. Duljina stranice kvadrata je 24 cm.

Neka je b duljina kraće, a c duljina dulje stranica istaknutog pravokutnika. Tada je

$$b = a : 4 = 24 : 4 = 6 \text{ cm} \quad \text{i} \quad c = b \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}.$$

Duljine stranica istaknutog pravokutnika su 6 cm i 18 cm, a njegova površina iznosi 6 cm · 18 cm = 108 cm^2.

8. Visine

U nekom razredu prosječna visina svih dvadeset i dvoje učenika bila je 163.5 cm. Uskoro je u razred upisan još jedan učenik pa se prosječna visina povećala za 0.3 cm, a već sljedećeg dana jedna se učenica ispisala i prosječna visina se opet povećala, ovaj put za 0.4 cm. Koliko je centimetara visoka učenica koja se ispisala?

Rezultat: **155**

Rješenje.

Označimo s $x_1, x_2, \dots, x_{22}$ visine svakog od 22 učenika. Vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{22}}{22} = 163.5 \text{ cm}$$

pa je zbroj visina svih učenika $x_1 + x_2 + \cdots + x_{22} = 163.5 \cdot 22 = 3597$ cm.

Neka je x_{23} visina učenika koji se naknadno upisao u razred. Vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{22} + x_{23}}{23} = 163.5 + 0.3 = 163.8 \text{ cm.}$$

Uvrstimo li $x_1 + x_2 + \cdots + x_{22} = 3597$ cm u taj izraz dobivamo:

$$\frac{3597 + x_{23}}{23} = 163.8$$

$$x_{23} = 170.4$$

Visina učenika koji se upisao je 170.4 cm.

Sada vrijedi da je zbroj visina svih 23 učenika:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{22} + x_{23} = 3597 + 170.4 = 3767.4 \text{ cm.}$$

Neka se iz razreda ispisala učenica s visinom x_1. Iz razreda se mogao ispisati bilo koji od početnih 22 učenika. Učenik koji se naknadno upisao nije se mogao ispisati iz razreda jer bi se prosječna visina tada smanjila.

Imamo:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{22} + x_{23}) - x_1}{22} = 163.8 + 0.4 = 164.2 \text{ cm.}$$

Uvrstimo li $x_1 + x_2 + \cdots + x_{23} = 3767.4$ cm dobivamo:

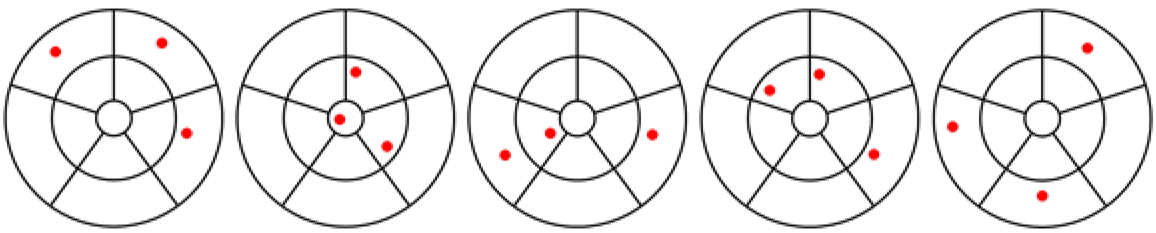
$$\frac{3767.4 - x_1}{22} = 164.2$$

$$x_1 = 155$$

Visina učenice koja se ispisala je 155 cm.

9. Pikado

Meta za pikado podijeljena je na 11 dijelova - 5 vanjskih dijelova, 5 unutarnjih dijelova i središnji krug, kao na slikama. Pogotci u različite vanjske dijelove mete donose različit broj bodova. Pogodak u unutarnji dio mete nosi dvostruko više bodova od pogotka u susjedni vanjski dio mete. Pogodak u središnji krug nosi 36 bodova.



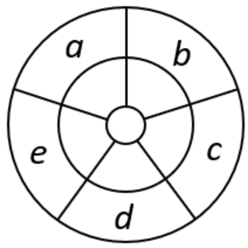
40 bodova   92 boda   56 bodova   72 boda   53 boda

Dino trima strelicama gađa metu. Crteži prikazuju pogotke i broj bodova koje je Dino ostvario u pet različitih pokušaja. Koliki je najveći broj bodova koje Dino može ostvariti ako svakom od tri strelice pogodi različit dio mete?

Rezultat: **110**

Rješenje.

Označimo li broj bodova koji se dobije za pogodak u vanjski dio mete s a, b, c, d i e (vidi sliku) imamo:



1. bacanje $a + b + c = 40$

2. bacanje $2b + 2c + 36 = 92$

3. bacanje $e + 2e + c = 56$

4. bacanje $2a + 2b + c = 72$

5. bacanje $b + d + e = 53.$

Iz jednadžbe $2b + 2c + 36 = 92$ dobivamo $2b + 2c = 92 - 36 = 56$.

Dijeljenjem jednadžbe s 2 dobijemo $b + c = 28$.

Uvrštavanjem tog izraza u jednadžbu $a + b + c = 40$ dobivamo $a + 28 = 40$, $a = 40 - 28 = 12$.

Uvrštavanjem $c = 28 - b$ i $a = 12$ u jednadžbu $2a + 2b + c = 72$ imamo:

$2 \cdot 12 + 2b + 28 - b = 72$, $24 + 2b + 28 - b = 72$, $b + 52 = 72$, $b = 72 - 52 = 20$.

Vrijedi $c = 28 - 20 = 8$.

Iz jednadžbe $e + 2e + c = 56$ dobivamo:

$e + 2e + 8 = 56$, $3e = 56 - 8 = 48$, $e = 48 : 3 = 16$.

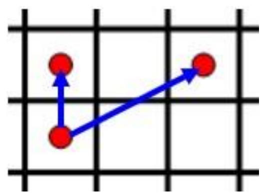
Iz jednadžbe $b + d + e = 53$ dobivamo:

$20 + d + 16 = 53$, $d + 36 = 53$, $d = 53 - 36 = 17$.

Najveći broj bodova koje Dino može ostvariti ako svakom od triju strelica pogodi različit dio mete je $2 \cdot 20 + 2 \cdot 17 + 36 = 110$ bodova.

10. Figurica

Figurica se nalazi na krajnjem lijevom donjem polju ploče 9×9. U svakom potezu figurica se pomiče za jedno polje gore ili za jedno polje gore i dva udesno, kao što je prikazano na slici. Na koliko različitih načina možemo figuricu nizom od osam poteza premjestiti u gornji redak ploče?



Rezultat: **163**

Rješenje.

Na svako polje ćemo zapisati broj načina da figurica dođe do tog polja. Promotrimo žuto označeno polje. Ako je figurica u nekom trenutku na tom polju, u prethodnom potezu je morala biti na jednom od dva zeleno označena polja u retku ispod nje. Zato ćemo u žuto polje upisati zbroj brojeva u zelenim poljima.

Početna pozicija figurice je označena znakom ●. S tog polja figurica može doći na dva polja u drugom retku, na svako od njih na samo jedan način, pa u ta polja upisujemo broj 1.

Tablicu dalje popunjavamo po retcima, prema gore.

1		8		28		56		70
1		7		21		35		35
1		6		15		20		15
1		5		10		10		5
1		4		6		4		1
1		3		3		1		
1		2		1				
1		1						
●								

Kada popunimo tablicu treba još samo zbrojiti sve brojeve u gornjem retku:

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 = 163.$$