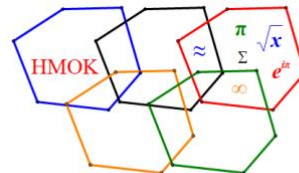


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 11. lipnja 2022.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Aljmez

Na planetu Aljmez dan se naziva NAD, sat se naziva TAS, minuta NIM, a sekunda KES. Jedan NAD traje deset TASA, jedan TAS traje deset NIMA, a jedan NIM osam KESa. Koliko zemaljskih sekundi traje 1 aljmeški KES, ako 1 NAD traje isto kao i 1 dan?

Rezultat: **108**

Rješenje.

$$1 \text{ NAD} = 10 \text{ TASA} = 100 \text{ NIMA} = 800 \text{ KESa}$$

$$1 \text{ dan} = 24 \text{ sata} = 1440 \text{ minuta} = 86400 \text{ sekunda}$$

Kako 1 NAD i 1 dan traju jednako, onda je $800 \text{ KESa} = 86400 \text{ sekunda}$ pa vrijedi:

$$1 \text{ KES} = 86400 : 800 = 864 : 8 = 108 \text{ sekundi}$$

2. Semafor

Semafor radi na sljedeći način: zeleno svjetlo svijetli 17 sekundi, žuto 4 sekunde, crveno 11 sekundi, žuto 4 sekunde, zatim ponovno zeleno 17 sekundi, žuto 4 sekunde, crveno 11 sekundi, žuto 4 sekunde i tako cijeli dan. Koliko će minuta tijekom jednog cijelog dana svijetliti zeleno?

Rezultat: **680**

Rješenje.

Jedan ciklus zeleno – žuto – crveno – žuto traje $17 + 4 + 11 + 4 = 36$ sekundi.

Kako 1 sat ima 3600 sekundi, u jednom se satu ciklus ponovi $3600 : 36 = 100$ puta.

Kako jedan dan ima 24 sata, onda u jednom danu ima 2400 ciklusa.

U svakom ciklusu zeleno svjetlo svijetli 17 sekundi pa u jednom danu svijetli $2400 \cdot 17 = 40800$ sekundi što je $40800 : 60 = 4080 : 6 = 680$ minuta.

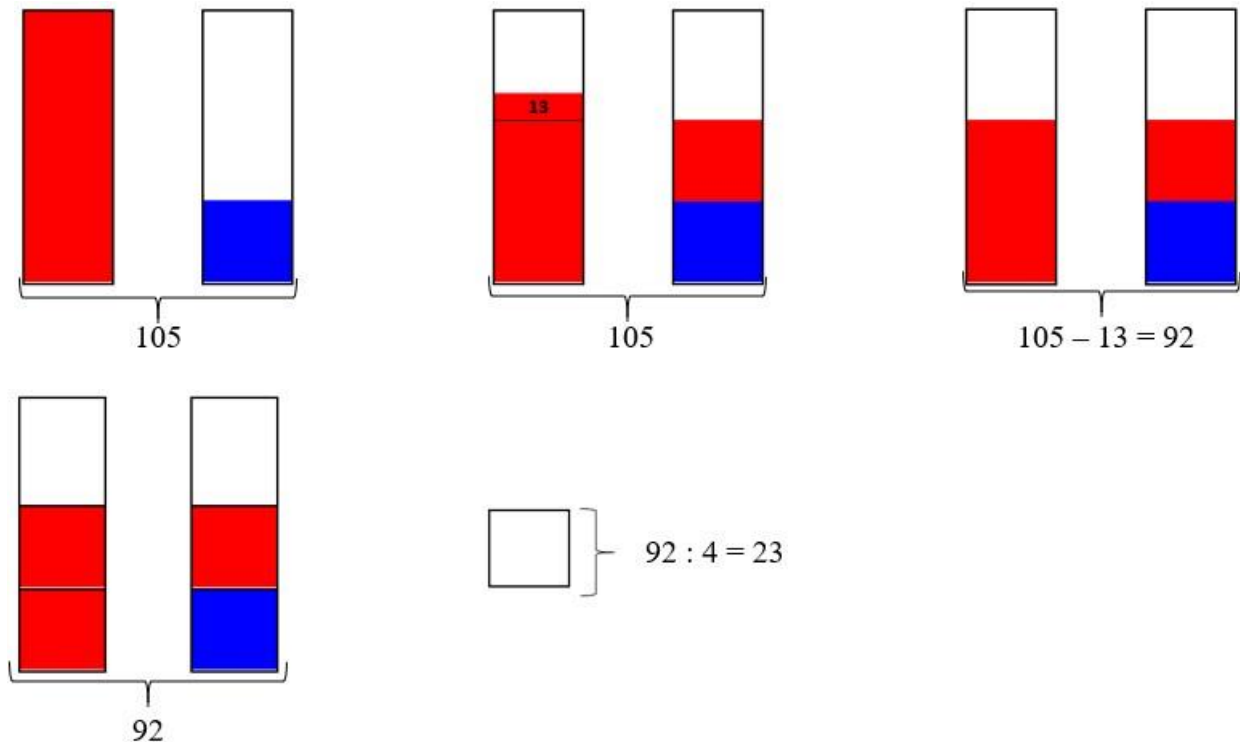
3. Kuglice

U crvenoj i plavoj kutiji nalazi se ukupno 105 kuglica. Nakon što je iz crvene kutije u plavu prebačeno onoliko kuglica koliko ih je u plavoj kutiji bilo na početku, u crvenoj je kutiji bilo 13 kuglica više nego u plavoj. Odredi peterostruku razliku početnog broja kuglica u crvenoj i plavoj kutiji.

Rezultat: 295

Rješenje:

Prikažimo dane uvjete grafički.



U plavoj kutiji nalaze se 23 kuglice, a u crvenoj $105 - 23 = 82$ kuglice. Peterostruka razlika je $5 \cdot (82 - 23) = 5 \cdot 59 = 295$.

4. Rezanje užeta

Uže duljine 60 m razrežemo na jednake dijelove duljine 3 m. Od tako dobivenih užeta šest ih prerežemo na dijelove duljine 10 cm, šest na dijelove duljine 5 cm, a preostale na dijelove duljine 6 cm. Na koliko je mjesta prerezano uže?

Rezultat: 939

Rješenje.

Ako su dijelovi duljine 3 m, onda ima $60 : 3 = 20$ dijelova, znači da je uže rezano na 19 mjesta, odnosno za taj dio je rezano 19 puta.

Šest dijelova duljine 3 m izrezano je na dijelove duljine 10 cm, što znači da je od svakog dijela duljine 3 m odnosno 300 cm dobiveno $300 : 10 = 30$ dijelova, što znači da je svaki takav dio rezan na 29 mjesta. Ukupno je rezano $6 \cdot 29 = 174$ puta.

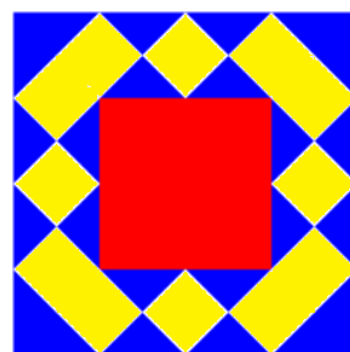
Šest dijelova duljine 3 m izrezano je na dijelove duljine 5 cm, što znači da je od svakog dijela duljine 3 m odnosno 300 cm dobiveno $300 : 5 = 60$ dijelova, što znači da je svaki takav dio rezan na 59 mjesta. Ukupno je rezano $6 \cdot 59 = 354$ puta.

Ostatak, odnosno $20 - 6 - 6 = 8$ dijelova duljine 3 m izrezano je na dijelove duljine 6 cm, što znači da je od svakog dijela duljine 3 m odnosno 300 cm dobiveno $300 : 6 = 50$ dijelova, što znači da je svaki takav dio rezan na 49 mjesta. Ukupno je rezano $8 \cdot 49 = 392$ puta.

Ukupan broj rezanja je $19 + 174 + 354 + 392 = 939$.

5. Žuti sprej

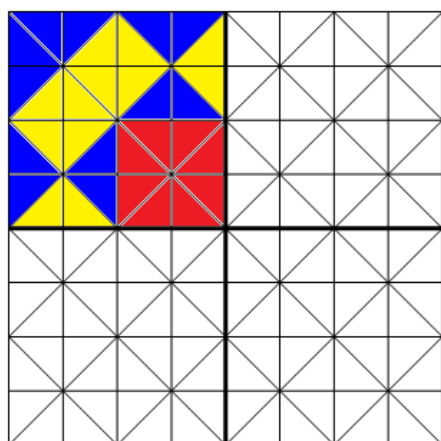
Mara je u veliki kvadrat ucrtala pravokutnike kao na slici. Površina crvenog kvadrata je 350 dm^2 . Žuta boja u spreju prodaje se u limenkama čija je cijena 40 kn. Svakom limenkom može se prekriti površina od 70 dm^2 . Koliko je kuna Mara platila žutu boju?



Rezultat: **320**

Rješenje.

Kako je kvadrat simetričan, u ovom je slučaju dovoljno promatrati njegovu četvrtinu.



Ako smjestimo dani kvadrat u trokutnu mrežu, vidimo da je površina koju čine plavi i žuti dijelovi zajedno tri puta veća od površine crvenog dijela. Također, površina žutog dijela jednaka je površini plavog dijela.

To znači da je površina plavog i žutog dijela $3 \cdot 350 = 1050 \text{ m}^2$ pa je površina žutog dijela $1050 : 2 = 525 \text{ dm}^2$.

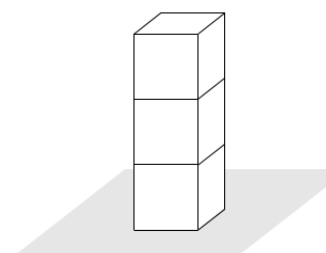
Jedna je limenka dovoljna za 70 dm^2 , a kako je $525 : 70 = 7$ i ostatak 35 potrebno je kupiti 8 limenki.

To znači da je Mara žutu boju platila $8 \cdot 40 = 320$ kn.

6. Tri kocke

45	56		
	92	108	
		68	75

Tri jednake kocke imaju mrežu kakva je prikazana na slici. Kocke su postavljene na stol, jedna na drugu. Koliki je najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama tako postavljenih kocki na stolu?



Rezultat: **890**

Rješenje.

Kada se takve tri kocke slože na stol, jedna na drugu, 5 strana nije vidljivo, a preostalih 13 je vidljivo. Kako bismo odredili najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocaka, odredimo najveći mogući zbroj brojeva na 5 strana koje nisu vidljive.

Kada se iz prikazane mreže napravi kocka, na njenim su nasuprotnim stranama parovi brojeva 45 i 108, 92 i 75, 56 i 68. Najveći mogući zbroj takvog para je $92 + 75 = 167$. Donje dvije kocke imaju nevidljive strane s brojevima 92 i 75, a gornja kocka na nevidljivoj strani ima broj 108.

Zbroj svih skrivenih brojeva je $167 + 167 + 108 = 442$.

Zbroj brojeva na svakoj kocki je $45 + 56 + 92 + 108 + 68 + 75 = 444$ pa je zbroj na tri kocke $3 \cdot 444 = 1332$.

Od zbroja svih brojeva oduzmimo zbroj skrivenih brojeva, $1332 - 442 = 890$.

Najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocki je 890.

7. Stonoga

Stonoga Milica ima točno stotinu nogu, 50 lijevih i 50 desnih. Svako jutro ona obuva 50 pari cipela i to tako da najprije obuče sve lijeve, a potom sve desne. Za obuvanje svake lijeve cipele treba joj jedna sekunda. No onda se umori pa joj za desne cipele treba više vremena. Za prvu treba dvije sekunde, za drugu četiri, za treću šest i tako do posljednje desne cipele, svaki puta dvije sekunde više nego za prethodnu. No navečer, kad izuva cipele, ukupno joj treba 10 puta manje vremena nego za obuvanje.

Koliko sekundi stonogi Milici treba za izuvanje svih cipela?

Rezultat: **260**

Rješenje.

Kako ima 50 lijevih cipela, treba joj 50 sekundi za obuti sve lijeve.

Za 1. desnu treba 2 sekunde,
za 2. desnu treba 4 sekunde,
za 3. desnu treba 6 sekundi,
za 4. desnu treba 8 sekundi,

...

za 50. desnu treba $2 \cdot 50 = 100$ sekundi.

Za sve desne cipele treba ukupno $2 + 4 + 6 + \dots + 100 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$ sekundi.

Za obuvanje joj treba $50 + 2550 = 2600$ sekundi, a za izuvanje $2600 : 10 = 260$ sekundi.

8. Vreća jabuka

Na pitanje koliko jabuka ima u vreći, prodavač je odgovorio: „Ako ih brojim po dvije, ili po tri, ili po četiri, ili po pet, ili po šest, uvijek jedna ostane. Ako ih brojim po sedam ne ostane mi niti jedna.“ Odredi najmanji broj jabuka koji se može nalaziti u vreći.

Rezultat: **301**

Rješenje.

Broj jabuka u vreći može se bez ostatka podijeliti sa 7, a pri dijeljenju s 2, 3, 4, 5 i 6 ostatak je 1.

To znači da se broj jabuka umanjen za 1 može podijeliti (bez ostatka) s 2, 3, 4, 5 i 6.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 4, može se i s 2.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 4 i 3 znači da se može podijeliti i sa 12.

Ako se može bez ostatka podijeliti s 12, može i sa 6.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 12 i 5 znači da se može podijeliti i sa 60.

To mogu biti brojevi 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, ...

Traženi broj je za 1 veći i mora se moći bez ostatka podijeliti sa 7.

$61 : 7 = 8$ i ostatak 5.

$121 : 7 = 17$ i ostatak 2

$181 : 7 = 25$ i ostatak 6

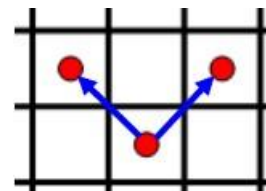
$241 : 7 = 34$ i ostatak 3

$301 : 7 = 43$

Najmanji broj jabuka koji se može nalaziti u vreći je 301.

9. Figurica

Figurica se nalazi na srednjem polju donjeg retka ploče 9×9 . U svakom potezu figurica se pomiče dijagonalno za jedno polje, tj. gore-lijevo ili gore-desno, kao što je prikazano na slici. Na koliko različitih načina možemo figuricu nizom od osam poteza premjestiti u gornji redak ploče?



Rezultat: **220**

Rješenje.

Na svako polje ćemo zapisati broj načina da figurica dođe do tog polja.

Promotrimo žuto označeno polje. Ako je figurica u nekom trenutku na tom polju, u prethodnom potezu je morala biti na jednom od dva zeleno označena polja u retku ispod nje. Zato ćemo u žuto polje upisati zbroj brojeva u zelenim poljima.

Početna pozicija figurice je označena znakom ●. S tog polja figurica može doći na dva polja u drugom retku, na svako od njih na samo jedan način, pa u ta polja upisujemo broj 1.

20	55	70	55	20
20	35	35	20	
5	15	20	15	5
5	10	10	5	
1	4	6	4	1
1	3	3	1	
	1	2	1	
		1		
		●		


Tablicu dalje popunjavamo po retcima, prema gore. Kada popunimo tablicu treba još samo zbrojiti sve brojeve u gornjem retku: $20 + 55 + 70 + 55 + 20 = 220$

10. Blagajnica

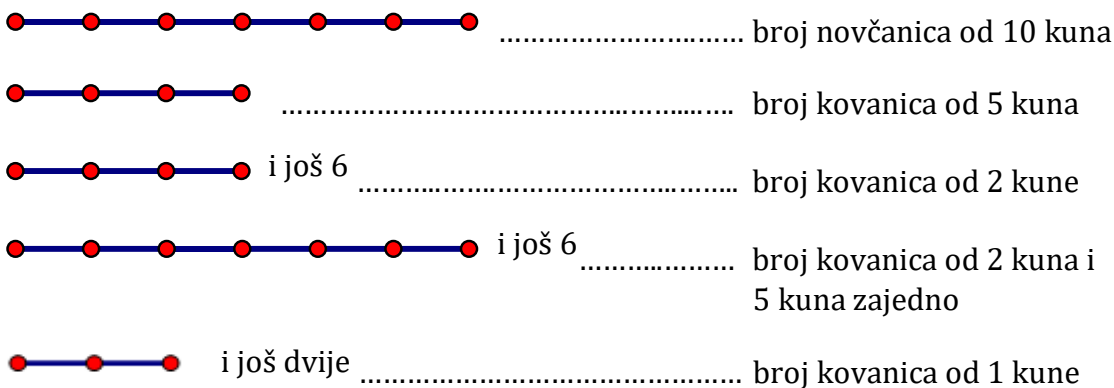
U blagajni blagajnice Đurđe nalaze se novčanice od 100 kuna i 10 kuna te kovanice od 5 kuna, 2 kune i 1 kune. Ukupna vrijednost novca u blagajni je 1844 kune. Broj novčanica od 100 kuna šestina je broja novčanica od 10 kuna, a broj kovanica od 5 kuna polovina je broja novčanica od 10 kuna. Broj kovanica od 1 kune trećina je broja kovanica od 2 kune i 5 kuna zajedno, a broj kovanica od 2 kune je za šest veći od broja kovanica od 5 kuna. Koliko je ukupno novčanica i kovanica u blagajni?

Rezultat: **158**












Rješenje.



Označimo broj novčanica od 100 kuna ovako: 

Iz uvjeta zadatka redom dobivamo:



Ukupnu vrijednost novca u blagajni možemo prikazati ovako:

oznaka	vrijednost	ukupno
	100	100 
	10	60 
	5	15 
 i još 6	2	6  i još 12 kn
 i još 2	1	2  i još 2 kn
UKUPNO		183  i još 14 kn

Kako 183  i još 14 kuna vrijedi ukupno 1844 kune, onda 183  vrijedi $1844 - 14 = 1830$ kn.

To znači da  vrijedi $1830 : 183 = 10$ kn.

U blagajni je bilo 10 novčanica od 100 kn, 60 novčanica od 10 kn, 30 kovanica od 5 kuna, 36 kovanica od 2 kune i 22 kovanice od 1 kune.

Ukupno je bilo $10 + 60 + 30 + 36 + 22 = 158$ novčanica i kovanica.