

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – četvrtak, 23. lipnja 2022.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Osim konačnog rezultata boduje se i postupak. Kako bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

Zadaci za 4. razred

1. Profesor Baltazar ima stroj koji je programiran na način:
- u stroj se upisuje prirodan broj n (nula nije prirodan broj),
 - ako je broj n paran, stroj ga podijeli s 2 i ispiše rezultat, a
 - ako je broj neparan, stroj ga pomnoži s 3, dobivenom broju doda 1 i ispiše rezultat.

Profesor Baltazar je u stroj upisao jedan broj, potom je ispisani rezultat ponovno upisao u taj stroj pa je taj postupak ponovio više puta. Nakon šestog upisivanja, stroj je ispisao broj 4. Odredi sve moguće početne vrijednosti koje je profesor Baltazar mogao upisati u stroj.

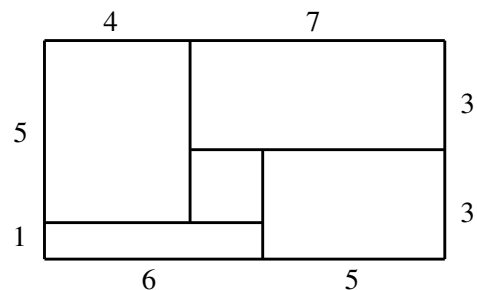
2. Marta je izmislila novu računsku operaciju *smješkanje* za koju će koristiti znak ☺. Smješkanje je definirano pomoću poznatih operacija zbrajanja i množenja izrazom

$$a \text{ ☺ } b = a \cdot b + 3 \cdot a + b.$$

Koliki je x ako je $(x \text{ ☺ } 5) \text{ ☺ } 6 = 72\,123$?

3. Roza ima vrt koji je podijeljen na pravokutne dijelove kao na slici (označene su dimenzije u metrima). U svaki dio vrta planira posaditi različitu vrstu cvijeća. Posadit će begonije, ljiljane, dalije, ruže i irise i to po jednu biljku na svaki kvadratni metar vrta.

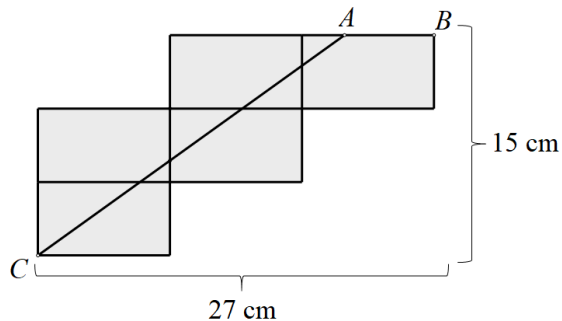
O cijenama se raspitala kod susjede Mirte. Lukovice irisa prodaju se samo u paketima po 5 komada, a sadnice ostalog cvijeća prodaju se po komadu. Mirta je tri sadnice begonija platila 39 kn, četiri sadnice ljiljana 73 kn, dvije sadnice dalija 75 kn, dvije sadnice ruža 83 kn, a paket od pet lukovica irisa 104 kn. Koliki je najmanji iznos koji Roza treba potrošiti za kupnju cvijeća, a da pritom u svom vrtu posadi sve kupljene sadnice i lukovice?

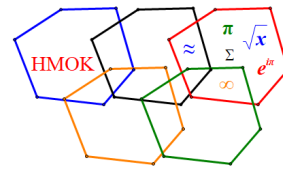
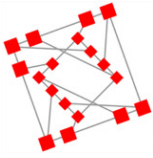


Okreni list !

4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno tri jednake znamenke?

5. Pet jednakih pravokutnika raspoređeno je tako da tvore lik duljine 27 cm i širine 15 cm, kao što je prikazano na slici. Unutar dobivenog lika nacrtana je dužina \overline{AC} koja taj lik dijeli na dva dijela jednakih površina. Odredi duljinu dužine \overline{AB} .





HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – četvrtak, 23. lipnja 2022.

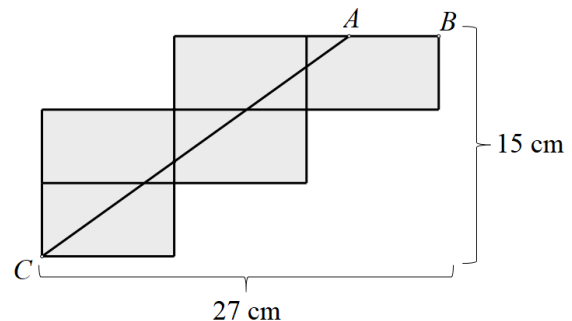
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Osim konačnog rezultata boduje se i postupak. Kako bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

Zadatci za 5. razred

1. U punoj šalici nalazi se 3 dl bijele kave. Omjer količina mlijeka i kave u toj smjesi je 3 : 2. Marko je popio šestinu bijele kave te je šalicu do vrha dopunio mlijekom. Nakon toga je popio petinu bijele kave te je šalicu ponovo dopunio do vrha tako da je ulio pet puta više mlijeka nego kave. Nakon što je treći puta popio dio bijele kave, šalica je do svoje trećine napunjena bijelom kavom. Koliko će mlijeka biti u šalici nakon što Marko opet do vrha šalice ulije mlijeko?

2. Pet međusobno sukladnih pravokutnika raspoređeno je tako da tvore lik duljine 27 cm i širine 15 cm, kao što je prikazano na slici. Unutar dobivenog lika nacrtana je dužina \overline{AC} koja taj lik dijeli na dva dijela jednakih površina. Odredi duljinu dužine \overline{AB} .



3. Na sportskom natjecanju višečlano povjerenstvo ocjenjuje nastupe triju učenica: Ane, Eme i Sare. Svaki član povjerenstva će rangirati učenice od prvog do trećeg mjesta te za prvo mjesto dodijeliti a bodova, za drugo mjesto b bodova, a za treće mjesto c bodova. Pritom su a , b i c unaprijed određeni prirodni brojevi takvi da je $a > b > c$. Nakon toga bodovi svih članova povjerenstva su zbrojeni te je Ana osvojila 17 bodova, Sara 10 bodova, a Ema 8 bodova. Odredi kako su pojedini članovi povjerenstva rangirali učenice.

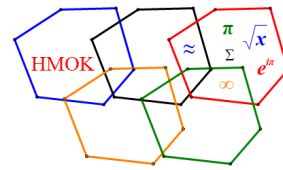
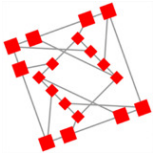
Okreni list !

4. Odredi, ako postoje, sve četveroznamenkaste prirodne brojeve koji su djeljivi brojem zapisanim istim znamenkama u obrnutom poretku i pri tom dijeljenju količnik iznosi:

- a) tri,
- b) četiri.

(Moguće je da broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku počinje nulom ili nulama, tako bi se npr. od broja 3210 dobio broj 0123 tj. 123.)

5. Na stranici \overline{AB} pravokutnika $ABCD$ odabrano je nekoliko točaka, na stranicama \overline{BC} i \overline{DA} po četiri točke, a na stranici \overline{CD} pet točaka. Nijedna od odabranih točaka nije vrh danog pravokutnika. Koristeći odabrane točke kao vrhove može se nacrtati točno 4040 četverokuta kojima najviše jedan vrh pripada dužini \overline{AB} . Koliko je točaka odabrano na stranici \overline{AB} ?



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – četvrtak, 23. lipnja 2022.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Osim konačnog rezultata boduje se i postupak. Kako bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

Zadatci za 6. razred

1. Na sportskom natjecanju višečlano povjerenstvo ocjenjuje nastupe triju učenica: Ane, Eme i Sare. Svaki član povjerenstva će rangirati učenice od prvog do trećeg mjesta te za prvo mjesto dodijeliti a bodova, za drugo mjesto b bodova, a za treće mjesto c bodova. Pritom su a , b i c unaprijed određeni prirodni brojevi takvi da je $a > b > c$. Nakon toga bodovi svih članova povjerenstva su zbrojeni te je Ana osvojila 17 bodova, Sara 10 bodova, a Ema 8 bodova. Odredi kako su pojedini članovi povjerenstva rangirali učenice.

2. Zbroj 16 uzastopnih prirodnih brojeva među kojima je i broj n , petnaest je puta veći od broja n . Odredi sve brojeve n za koje je to moguće.

3. U trokutu ABC vrijedi

$$|\angle BAC| = 40^\circ, \quad |\angle CBA| = 20^\circ \quad \text{i} \quad |AB| - |BC| = 10.$$

Simetrala kuta $\angle ACB$ siječe dužinu \overline{AB} u točki M . Odredi duljinu dužine \overline{CM} .

4. Neka su a, b, c i d prirodni brojevi takvi da je $a > b > c > d$. Označimo

$$S = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d).$$

a) Je li broj S uvijek djeljiv s 3?

b) Je li broj S uvijek djeljiv s 4?

5. Na kraju školske godine ravnatelj Srećko proveo je među učenicima anketu o gubljenju osobnih predmeta. Od 1000 učenika njegove škole svaki je ove školske godine izgubio barem jedan od tri predmeta: bilježnicu, ključeve ili pernicu. Njih 700 je izgubilo bilježnicu, 750 ih je izgubilo ključeve, a 800 pernicu.

Koliko je najmanje učenika ove školske godine izgubilo i bilježnicu i ključeve i pernicu?