Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

1. Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (a, b) takvih da je $a + b = 1000$ i da niti jedan od brojeva a i b ne sadrži znamenku 0 u svojemu dekadskom zapisu?

2. Odredite najveću vrijednost izraza $\left(\dfrac{12x^2 + 27y^2 + 12x + 36y + 29}{4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9}\right)^2$. Za koje se realne brojeve x, y ta vrijednost postiže?

3. Brod je ploveći rijekom prešao 24 km uzvodno i 28 km nizvodno. Za taj mu je put bilo potrebno pola sata manje nego za plovidbu 30 km uzvodno i 21 km nizvodno, odnosno, pola sata više nego za plovidbu 15 km uzvodno i 42 km nizvodno. Odredite brzinu broda na mirnoj vodi i brzinu rijeke (uz pretpostavku da se i brod i rijeka gibaju jednoliko).

4. Za koji $a \in \mathbb{R}$ jednadžba $\Big||x + 2| - |2 - x| + 2\Big| = 2 - a$ ima točno jedno rješenje?

5. Unutar jednakostraničnoga trokuta ABC stranice duljine 12 cm odabrana je točka T tako da vrijedi $|TP| : |TQ| : |TR| = 1 : 2 : 3$, pri čemu su P, Q i R nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta. Kolika je površina trokuta $\triangle PQR$?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

1. Mara je odlučila svoj cvjetnjak pravokutnog oblika preoblikovati u cvjetnjak kvadratnog oblika. Ako za stranicu kvadratnog cvjetnjaka odabere jednu stranicu pravokutnog cvjetnjaka, dvostruka površina dobivenog kvadrata bit će za 12 m^2 veća od površine pravokutnika. Ako za stranicu kvadratnog cvjetnjaka odabere drugu stranicu pravokutnog cvjetnjaka, zbroj površine kvadrata i dvostruke površine pravokutnika bit će 16 m^2. Koje su dimenzije Marinog cvjetnjaka?

2. Riješite jednadžbu: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{12x}}=0.$

3. Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Ako je $\dfrac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3}$ odredite kut α.

4. Duljine stranice trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a najveći kut trokuta je dva puta veći od najmanjeg kuta trokuta. Odredite duljine stranica tog trokuta.

5. Funkcija f zadana je pravilom pridruživanja $f(x)=x^2-\sqrt{b}\cdot x+c$, pri čemu su b i c realni parametri. Kolika je vjerojatnost da će pri slučajnom odabiru parametara b i c iz intervala $[0,10]$ minimalna vrijednost zadane funkcije biti veća ili jednaka 2 i manja ili jednaka 3?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

1. Odredite najveću vrijednost funkcije $f(x) = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$ na intervalu $[1, 64]$.

2. Na plesnom festivalu sudjeluju dvije plesne skupine. U prvom dijelu festivala svaki je plesač otplesao po jedan ples sa svakim plesačem iz svoje skupine. Niti jedan plesač iz jedne skupine nije plesao s plesačem iz druge skupine. Koliko je plesača u svakoj pojedinoj skupini ako one zajedno imaju 42 plesača, a u prvom dijelu festivala se ukupno otplesao 421 ples? Drugi dio festivala formiraju se plesni parovi od po jednog plesača iz svake plesne skupine. Koliki je maksimalan broj takvih parova koji se mogu naći na plesnom podiju? (Napomena: plesače ne razlikujemo po spolu.)

3. Zadani su vektori $\vec{u} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{v} = 7\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{w} = \vec{m} - 4\vec{n}$ i $\vec{z} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$, pri čemu su $\vec{m}, \vec{n} \neq \vec{0}$. Ako su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$, te $\vec{w}$ i $\vec{z}$ okomiti, odredite kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

4. Odredite sve parove prirodnih brojeva a i b takvih da je $a^2 - 4b^2 = a - 2b + 2^{2022}$.

5. Trapez s međusobno okomitim dijagonalama ima osnovice duljina $a = 12$ i $c = 4$, a produžetci krakova trapeza sijeku se pod kutom α. Ako je $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, izračunajte površinu tog trapeza.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

1. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \sin \dfrac{\pi x}{2022} - \sin \dfrac{\pi y}{2022} & = 1 \\ \\ x - y & = 2022 \end{cases}$$

ako je $|x| \leqslant 2022$ i $|y| \leqslant 2022$.

2. Neka je $S_n, n \in \mathbb{N}$ zbroj prvih n članova geometrijskog niza. Ako je $S_{100} = 10$ i $S_{300} = 210$ koliko je S_{400}?

3. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a > 0$ i $f(f(x)) = 4x + 9$, za sve realne brojeve x. Dokažite da je broj $(f(p-1))^n - (2np+1)$ djeljiv s p^2 za bilo koji prost broj p i prirodni broj n.

4. Iz točke A izvan kružnice povučene su tangente na kružnicu k s diralištima u točkama B i C. Pravac paralelan s AC prolazi točkom B i siječe kružnicu k ponovno u točki D. Ako je $|AB| = 49$ i $|CD| = 28$ odredite duljinu $|AD|$.

5. Mare je odabrala 6 različitih znamenki iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Koristeći te znamenke zapisala je na papiru sve moguće šesteroznamenkaste brojeve kojima se znamenke ne ponavljaju. Ako je S zbroj svih zapisanih brojeva, odredite najveći prosti djelitelj broja S.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.