Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

1. Natjecanje se održava u 11 učionica u kojima se nalazi isti broj klupa raspoređenih na isti način: u određenom broju stupaca i određenom broju redova. U svakoj je klupi po jedan učenik. Kada bi u svakoj učionici bio jedan red klupa manje i jedan stupac klupa više, bilo bi dovoljno 10 učionica, a još bi dvije klupe ostale prazne. Koliko ukupno može biti učenika na natjecanju ako je poznato da je njihov broj troznamenkast?

2. Odredi sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$||x-2|-x+a|=x+3$$

ima točno dva realna rješenja.

3. Dan je jednakokračan trokut ABC kojemu je $\overline{BC}$ osnovica. S vanjske strane tog trokuta nacrtani su jednakokračni trokuti CBD, ACE i BAF slični trokutu ABC, kojima su osnovice redom $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{BF}$. Ako je $\sphericalangle CAB = 38°$, odredi $\sphericalangle EDF$.

4. Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (k, m) za koje vrijedi

$$3m^3 - m + 21 = 3^{3k+1} - 2 \cdot 3^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+2}.$$

5. Dan je konveksan mnogokut s 2022 vrha kojem se nikoje tri dijagonale ne sijeku u istoj točki. Potrebno je obojiti neke dijagonale crveno tako da iz svakog vrha izlazi barem jedna crvena dijagonala.

Koliko je najmanji mogući broj sjecišta (u vrhu ili unutrašnjosti) crvenih dijagonala?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

1. Koeficijenti a, b i c kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ tri su uzastopna prirodna broja (u nekom od šest mogućih poredaka), a njezina su rješenja realni brojevi.

Dokaži da je jedno od rješenja broj -1.

2. Dvije kružnice polumjera 1 i 3 diraju se izvana u točki A, a njihova vanjska zajednička tangenta ih dira u točkama B i C. Odredi zbroj kvadrata duljina stranica trokuta ABC.

3. Postoje li prirodni brojevi k i m takvi da je $2022^k + 2022^m$ kvadrat prirodnog broja?

4. Štapić je kvadar dimenzija $1 \times 1 \times 2$, a posuda je tijelo dobiveno uklanjanjem kockice $1 \times 1 \times 1$ iz kvadra dimenzija $3 \times 3 \times 2$ na sredini jedne od dviju polovica $3 \times 3 \times 1$.

Ako je dopušteno koristiti koliko god je potrebno štapića i posuda, koliko je najmanje takvih tijela potrebno za sastavljanje kocke dimenzija $303 \times 303 \times 303$ bez rupa i preklapanja? Tijela je dopušteno rotirati.

5. Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je $abc = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a + c\sqrt{a}}{a^2b + c + 2} + \frac{b + a\sqrt{b}}{b^2c + a + 2} + \frac{c + b\sqrt{c}}{c^2a + b + 2} \leqslant \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

1. Odredi sve realne brojeve a takve da nejednakost

$$\cos(2x) + 2a\cos x + 7 \geqslant 0$$

vrijedi za sve realne brojeve x.

2. Odredi sve prirodne brojeve a i b takve da je

$$a^2 = 4b + 3 \cdot V(a, b),$$

pri čemu $V(m, n)$ označava najmanji zajednički višekratnik brojeva m i n.

3. Na stranici $\overline{AB}$ šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka D. Neka su X i Y redom središta kružnica opisanih trokutima ADC i BCD. Dokaži da vrijedi

$$P(XDY) \geqslant \frac{1}{4}P(ABC),$$

gdje je $P(KLM)$ površina trokuta KLM. Kada vrijedi jednakost?

4. U ravnini kvadrata $ABCD$, ali izvan njega, nalazi se točka P. Ako je

$$|PA| = \sqrt{5}, \qquad |PB| = \sqrt{26} \qquad \text{i} \qquad |PD| = \sqrt{20},$$

odredi duljinu stranice kvadrata.

5. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje **ne postoje** prirodni brojevi a, b, c takvi da je $n = a^2 + b^3 + c^6$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

1. Odredi sve prirodne brojeve m i n takve da je $2^{n!} = m^3 + 37$.

2. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da za sve $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(f(x) + 1)\,(f(y) + 1) = (x + 1)\,(f(y - 1) + 1) + f(x + 1).$$

3. Dani su kompleksni brojevi a, b i c za koje polinom

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

ima svojstvo da je apsolutna vrijednost svake njegove nultočke jednaka 1.

Dokaži da i polinom
$$Q(x) = x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c|$$
ima isto svojstvo.

4. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama P i Q. Pravac koji prolazi točkom Q siječe kružnice k_1 i k_2 još u točkama R i S, redom. Pravac SP siječe kružnicu k_1 još u točki M, a pravac RP siječe kružnicu k_2 još u točki N. Neka je T sjecište pravaca RM i SN.

Dokaži da je trokut TMN jednakostraničan ako i samo ako je pravac MN zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2.

5. Dana je ploča dimenzija 2020×2022. Za dva polja te ploče kažemo da su *susjedna* ako imaju zajedničku stranicu ili se nalaze na početku i kraju istog retka ili stupca. Dakle, svako polje ima točno četiri susjedna polja.

Viktor u svakom koraku bira jedno polje ploče i na ploču postavlja pet žetona: po jedan na odabrano polje i na svako polje susjedno odabranom. Nakon konačnog broja takvih koraka, na svakom polju nalazi se točno d žetona.

Odredi najmanji mogući d.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.