DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

Zadatak B-1.1.

Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (a, b) takvih da je $a + b = 1000$ i da niti jedan od brojeva a i b ne sadrži znamenku 0 u svojemu dekadskom zapisu?

Prvo rješenje.

Uočimo da je odabirom broja a drugi element uređenoga para točno određen, odnosno, vrijedi $b = 1000 - a$. Stoga je dovoljno odrediti sve mogućnosti za broj a.

Jednoznamenkastih brojeva koji nemaju 0 u svom zapisu je 9, dvoznamenkastih $9 \cdot 9$ i troznamenkastih $9 \cdot 9 \cdot 9$. To je ukupno 819 brojeva a koji nemaju u svom dekadskom zapisu 0.

Međutim, među tim se brojevima nalaze i oni brojevi a koji ne sadrže nulu u svom dekadskom zapisu, a brojevi $b = 1000 - a$ sadrže nulu. To su brojevi kojima je znamenka desetica 9, to jest: $91, 92, \ldots, 99, 191, \ldots, 199, 291, \ldots, 299, \ldots 899$.

Takvih brojeva a ima 9 dvoznamenkastih i $8 \cdot 9$ troznamenkastih, što je ukupno 81.

Dakle, uređenih parova prirodnih brojeva (a, b) takvih da je $a + b = 1000$ i koji ne sadrži znamenku 0 u svom dekadskom zapisu ima ukupno $819 - 81 = 738$.

Drugo rješenje.

Traženi ćemo broj dobiti tako da od ukupnoga broja svih uređenih parova (a, b) za koje je $a + b = 1000$ oduzmemo one koji u svojemu dekadskom zapisu imaju barem jednu znamenku 0.

Uočimo da je odabirom broja a drugi element uređenoga para točno određen, odnosno, vrijedi $b = 1000 - a$. Stoga je dovoljno odrediti sve mogućnosti za broj a.

Ukupno je 999 brojeva a za koje je $a + b = 1000$.

Nula se u dekadskom zapisu broja a može pojaviti na mjestu jedinica ili na mjestu desetica.

Dakle, broj a može biti oblika $\overline{x0}$, $\overline{xy0}$, $\overline{x00}$, $\overline{x0y}$, gdje su x i y proizvoljne znamenke iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Uočimo da ako broj a ima zadnju ili zadnje dvije znamenke 0, tada i broj $b = 1000 - a$ ima zadnju ili zadnje dvije znamenke 0.

Brojeva oblika $\overline{x0}$ i $\overline{x00}$ ima ukupno 18.

Brojeva oblika $\overline{xy0}$ ima $9 \cdot 9 = 81$, kao i brojeva oblika $\overline{x0y}$. Ukupno takvih brojeva ima $81 + 81 = 162$.

Još treba prebrojiti koliko brojeva a u svojemu dekadskom zapisu nema znamenku 0, a broj $b = 1000 - a$ ima. To je moguće samo ako je broj b oblika $\overline{x0y}$, odnosno, ako je broj a oblika $\overline{9y}$ ili $\overline{x9y}$, $y \neq 0$, $x \neq 0, 9$. Takvih brojeva a ima ukupno $9 + 8 \cdot 9 = 81$.

Dakle, brojeva a koji u svojemu dekadskom zapisu imaju barem jednu znamenku 0 ili za koje broj $b = 1000 - a$ ima u svojem zapisu znamenku 0 ima ukupno $18 + 162 + 81 = 261$.

Tada je $999 - 261 = 738$ broj svih uređenih parova prirodnih brojeva (a, b) za koje je $a + b = 1000$ i koji u svojemu dekadskom zapisu nemaju znamenku 0.

Zadatak B-1.2.

Odredite najveću vrijednost izraza $\left(\dfrac{12x^2 + 27y^2 + 12x + 36y + 29}{4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9}\right)^2$. Za koje se realne brojeve x, y ta vrijednost postiže?

Prvo rješenje.

Sređivanjem nazivnika dobiva se:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9 &= 4x^2 + 4x + 1 + 9y^2 + 12y + 4 + 4 \\ &= (2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4 \end{aligned}$$

Sređivanjem brojnika dobiva se:

$$\begin{aligned} 12x^2 + 27y^2 + 12x + 36y + 29 &= 12x^2 + 12x + 3 + 27y^2 + 36y + 12 + 14 \\ &= 3(4x^2 + 4x + 1) + 3(9y^2 + 12y + 4) + 14 \\ &= 3(2x+1)^2 + 3(3y+2)^2 + 12 + 2 \\ &= 3\left[(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4\right] + 2 \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{12x^2 + 27y^2 + 12x + 36y + 29}{4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9}\right)^2 &= \left(\frac{3\left[(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4\right] + 2}{(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4}\right)^2 \\ &= \left(3 + \frac{2}{(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4}\right)^2 \end{aligned}$$

Kako je $(2x+1)^2 \geqslant 0$ i $(3y+2)^2 \geqslant 0$, za svaki x i y vrijedi:

$(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4 \geqslant 4$, odnosno, $\dfrac{2}{(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Tada je $3 + \dfrac{2}{(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4} \leqslant 3 + \dfrac{1}{2}$.

Obje su strane nejednakosti pozitivne pa vrijedi:

$$\left(3+\frac{2}{(2x+1)^2+(3y+2)^2+4}\right)^2 \leqslant \left(3+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4}.$$

Najveća moguća vrijednost koju zadani izraz može postići iznosi $\frac{49}{4}$.

Jednakost se postiže za $(2x+1)^2+(3y+2)^2=0$, a u tom su slučaju $x=-\frac{1}{2}$ i $y=-\frac{2}{3}$.

Drugo rješenje.

$$\left(\frac{12x^2+27y^2+12x+36y+29}{4x^2+9y^2+4x+12y+9}\right)^2=\left(\frac{3\left(4x^2+9y^2+4x+12y+9\right)+2}{4x^2+9y^2+4x+12y+9}\right)^2$$

Uvedimo novu nepoznanicu: $t=4x^2+9y^2+4x+12y+9$.

Traženi izraz sada zapisujemo u obliku $\left(\frac{3t+2}{t}\right)^2=\left(3+\frac{2}{t}\right)^2$.

Uočimo da je:

$$\begin{aligned} t &= (4x^2+4x+1)+(9y^2+12y+4)+4 \\ &= (2x+1)^2+(3y+2)^2+4 \end{aligned}$$

Budući da su $(2x+1)^2$ i $(3y+2)^2$ uvijek pozitivni ili jednaki 0, vrijedi:

$t \geqslant 0+0+4$, odnosno, $t \geqslant 4$.

Tada je $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{4}$ i $\frac{2}{t} \leqslant \frac{1}{2}$ pa je $3+\frac{2}{t} \leqslant 3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

Konačno, $\left(3+\frac{2}{t}\right)^2 \leqslant \frac{49}{4}$ pa maksimalna vrijednost danoga izraza iznosi $\frac{49}{4}$.

Postiže se za najmanju vrijednost varijable t, a to je za $2x+1=0$ i $3y+2=0$, odnosno, za $x=-\frac{1}{2}$ i $y=-\frac{2}{3}$.

Zadatak B-1.3.

Brod je ploveći rijekom prešao 24 km uzvodno i 28 km nizvodno. Za taj mu je put bilo potrebno pola sata manje nego za plovidbu 30 km uzvodno i 21 km nizvodno, odnosno, pola sata više nego za plovidbu 15 km uzvodno i 42 km nizvodno. Odredite brzinu broda na mirnoj vodi i brzinu rijeke (uz pretpostavku da se i brod i rijeka gibaju jednoliko).

Rješenje.

Neka je t vrijeme potrebno da brod prijeđe 24 km uzvodno i 28 km nizvodno, v_R brzina rijeke i v_B brzina broda. Dok brod plovi uzvodno, brzina mu je $v_B - v_R$, a dok plovi nizvodno, brzina mu je $v_B + v_R$.

Kako je $t = \dfrac{s}{v}$, iz zadanih podataka dobiva se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} t = \dfrac{24}{v_B - v_R} + \dfrac{28}{v_B + v_R} \\ t + 0.5 = \dfrac{30}{v_B - v_R} + \dfrac{21}{v_B + v_R} \\ t - 0.5 = \dfrac{15}{v_B - v_R} + \dfrac{42}{v_B + v_R} \end{cases}$$

Uvođenjem novih nepoznanica $x = \dfrac{3}{v_B - v_R}$, $y = \dfrac{7}{v_B + v_R}$ sustav prelazi u:

$$\begin{cases} t = 8x + 4y \\ t + 0.5 = 10x + 3y \\ t - 0.5 = 5x + 6y \end{cases}$$

Uvrštavanjem t iz prve jednadžbe u preostale dvije imamo redom:

$$\begin{cases} 8x + 4y + 0.5 = 10x + 3y \\ 8x + 4y - 0.5 = 5x + 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0.5 \\ 3x - 2y = 0.5 \end{cases}$$

Rješenje posljednjega sustava je $(0.5,\ 0.5)$. Tada je:

$\dfrac{3}{v_B - v_R} = 0.5$, odnosno, $v_B - v_R = 6$ i

$\dfrac{7}{v_B + v_R} = 0.5$, odnosno, $v_B + v_R = 14$.

Brzina rijeke je $v_R = 4$ km/h, a brzina broda $v_B = 10$ km/h.

Napomena:

Supstitucijom $x = \dfrac{1}{v_B - v_R}$, $y = \dfrac{1}{v_B + v_R}$ i istim postupkom početni sustav prelazi u sustav

$$\begin{cases} 6x - 7y = 0.5 \\ 9x - 14y = 0.5 \end{cases}$$

Rješenje tog sustava jest $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{14}\right)$.

Zadatak B-1.4.

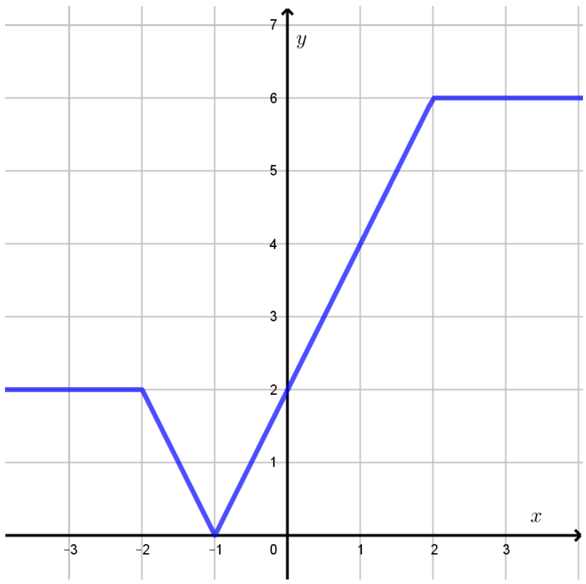
Za koji $a \in \mathbb{R}$ jednadžba $\Big||x+2| - |2-x| + 2\Big| = 2 - a$ ima točno jedno rješenje?

Prvo rješenje.

Skicirajmo graf funkcije $f(x) = \Big||x+2| - |2-x| + 2\Big|$.

Graf se može skicirati po dijelovima koristeći zapis bez znaka apsolutne vrijednosti:

$$\Big||x+2| - |2-x| + 2\Big| = \begin{cases} 2, & x < -2 \\ -2x - 2, & -2 \leqslant x < -1, \\ 2x + 2, & -1 \leqslant x < 2 \\ 6, & 2 \leqslant x \end{cases}.$$



Dana će jednadžba imati točno jedno rješenje ako horizontalni pravci $y = 2 - a$ sijeku nacrtani graf samo u jednoj točki. To će se dogoditi ako je:

1) $y = 2 - a = 0$, za $a = 2$

2) $2 < y < 6$, odnosno, $2 < 2 - a < 6$, a to je za $-4 < a < 0$.

Konačno, za $a \in \langle -4,\ 0\rangle \cup \{2\}$ dana jednadžba ima jedno rješenje.

Drugo rješenje.

Danu jednadžbu rješavamo po intervalima $\langle -\infty,\ -2]$, $\langle -2,\ 2]$ i $\langle 2,\ +\infty\rangle$.

1) Ako je $x \in \langle -\infty,\ -2]$ rješavamo jednadžbu $|-x-2-2+x+2| = 2-a$.

Slijedi $2 = 2-a$.

Tada za $a = 0$ dana jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja, a za $a \neq 0$ nema rješenja.

2) Ako je $x \in \langle -2,\ 2]$ rješavamo jednadžbu $|x+2-2+x+2| = 2-a$, odnosno, $|2x+2| = 2-a$.

Kako bismo riješili ovu jednadžbu, promatrat ćemo dva podintervala: $\langle -2,\ -1]$ i $\langle -1,\ 2]$.

2a) Za $x \in \langle -2,\ -1]$ rješavamo jednadžbu $-2x-2 = 2-a$.

Slijedi $x = -2 + \dfrac{a}{2}$ i to je jedino rješenje dane jednadžbe na intervalu $\langle -2,\ -1]$.

Tada je $-2 < -2 + \dfrac{a}{2} \leqslant -1$, odnosno, $0 < a \leqslant 2$.

2b) Za $x \in \langle -1,\ 2]$ rješavamo jednadžbu $2x+2 = 2-a$.

Slijedi $x = -\dfrac{a}{2}$ i to je jedino rješenje dane jednadžbe na intervalu $\langle -1,\ 2]$.

Tada je $-1 < -\dfrac{a}{2} \leqslant 2$, odnosno, $-4 < a < 2$.

3) Ako je $x \in \langle 2,\ +\infty\rangle$ rješavamo jednadžbu $|x+2+2-x+2| = 2-a$.

Slijedi $6 = 2-a$.

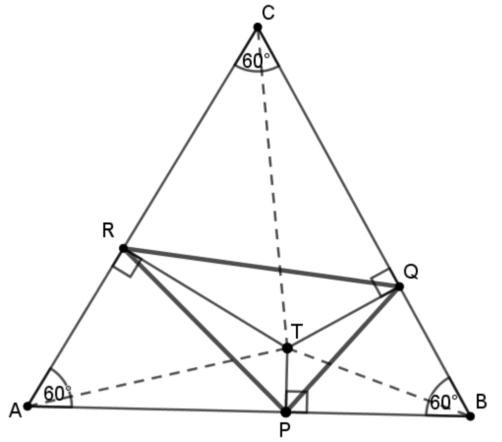
Tada za $a = -4$ dana jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja, a za $a \neq -4$ nema rješenja.

Konačno, za $a \in \langle -4,\ 0\rangle \cup \{2\}$ dana jednadžba ima jedno rješenje.

Zadatak B-1.5.

Unutar jednakostraničnoga trokuta ABC stranice duljine 12 cm odabrana je točka T tako da vrijedi $|TP| : |TQ| : |TR| = 1 : 2 : 3$, pri čemu su P, Q i R nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta. Kolika je površina trokuta $\triangle PQR$?

Rješenje.



Neka je $a = 12$ cm duljina stranice trokuta ABC.

Označimo $|TP| = k,\ |TQ| = 2k,\ |TR| = 3k$.

Uočimo da su $|TP|$, $|TQ|$ i $|TR|$ redom visine trokuta ABT, BCT i CAT.

Tada za površine trokuta vrijedi:

$P_{ABC} = P_{ABT} + P_{BCT} + P_{CAT}$, odnosno,

$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a \cdot k}{2} + \dfrac{a \cdot 2k}{2} + \dfrac{a \cdot 3k}{2}$ iz čega slijedi:

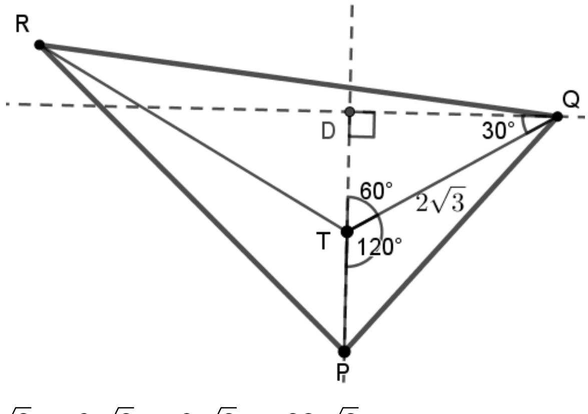
$\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4} = 6k + 12k + 18k$, pa je $k = \sqrt{3}$ cm.

Stoga je $|TP| = \sqrt{3}$ cm, $|TQ| = 2\sqrt{3}$ cm i $|TR| = 3\sqrt{3}$ cm.

Uočimo da četverokuti $APTR$, $PBQT$ i $CRTQ$ imaju po dva prava kuta i jedan kut 60°, a kako je zbroj kutova u četverokutu jednak 360° zaključujemo da je

$\sphericalangle PTQ = \sphericalangle QTR = \sphericalangle RTP = 120°$.

Visina trokuta PQT je $\overline{DQ}$, što je ujedno i kateta pravokutnoga trokuta QDT.



Tada je $\sin 60° = \dfrac{|DQ|}{2\sqrt{3}}$,
odnosno, $|DQ| = 3$ cm.

Prema tome, $P_{PQT} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

Analogno se dobije:
$P_{QRT} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2 i $P_{RPT} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

Tada je $P(ABC) = P_{PQT} + P_{QRT} + P_{RPT} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{4} = \dfrac{33\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

Zadatak B-2.1.

Mara je odlučila svoj cvjetnjak pravokutnog oblika preoblikovati u cvjetnjak kvadratnog oblika. Ako za stranicu kvadratnog cvjetnjaka odabere jednu stranicu pravokutnog cvjetnjaka, dvostruka površina dobivenog kvadrata bit će za 12 m^2 veća od površine pravokutnika. Ako za stranicu kvadratnog cvjetnjaka odabere drugu stranicu pravokutnog cvjetnjaka, zbroj površine kvadrata i dvostruke površine pravokutnika bit će 16 m^2. Koje su dimenzije Marinog cvjetnjaka?

Prvo rješenje.

Neka su x i y duljine stranica pravokutnika. Tada je

$$2x^2 = xy + 12,$$

$$y^2 + 2xy = 16.$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $y = 2x - \dfrac{12}{x}$ i uvrstimo u drugu, dobivamo jednadžbu

$$\left(2x - \frac{12}{x}\right)^2 + 2x\left(2x - \frac{12}{x}\right) = 16,$$

odnosno

$$4x^2 - 48 + \frac{144}{x^2} + 4x^2 - 24 - 16 = 0.$$

Nakon sređivanja dobivamo bikvadratnu jednadžbu

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0.$$

Tada je $x_1^2 = 9$, $x_2^2 = 2$.

Ako je $x = \sqrt{2}$ tada je $y = -4\sqrt{2}$, što je nemoguće. Stoga je $x = 3$, pa je $y = 2$.

Cvjetnjak ima jednu stranicu duljine 3 m, a drugu 2 m.

Drugo rješenje.

Neka su x i y duljine stranica pravokutnika. Tada je

$$2x^2 = xy + 12,$$

$$y^2 + 2xy = 16.$$

Podijelimo li ove jednadžbe slijedi

$$\frac{2x^2 - xy}{y^2 + 2xy} = \frac{3}{4},$$

odnosno

$$8x^2 - 4xy = 3y^2 + 6xy,$$

a zatim

$$8x^2 - 10xy - 3y^2 = 0.$$

Očito je $x \neq 0, y \neq 0$, pa podijelimo dobivenu jednadžbu s y^2. Tada je

$$8\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0$$

kvadratna jednadžba čija su rješenja $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ i $\frac{x}{y} = -\frac{1}{4}$.

Rješenje mora biti pozitivno pa je $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. Tada je $x = \frac{3}{2}y$ pa iz prve jednadžbe početnog sustava slijedi

$$2 \cdot \frac{9}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^2 = 12,$$

odnosno $y^2 = 4$, pa je $y = 2$, a $x = 3$.

Cvjetnjak ima jednu stranicu duljine 3 m, a drugu 2 m.

Zadatak B-2.2.

Riješite jednadžbu: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-1}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{12x}} = 0.$

Rješenje.

Uvjeti da jednadžba ima rješenje su sljedeći: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-1} \neq 0$ i $12x \neq 0$, odnosno $x \neq 0$.

Iz prvog uvjeta je $\sqrt[3]{x+1} \neq -\sqrt[3]{2x-1}$, odakle kubiranjem slijedi $x + 1 \neq -2x + 1$ te $x \neq 0$.

Ako danu jednadžbu pomnožimo sa zajedničkim nazivnikom $\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-1}\right) \cdot \sqrt[3]{12x}$, dobivamo

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{12x}. \tag{$*$}$$

Kubiranjem slijedi

$$x + 1 + 3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot \sqrt[3]{2x-1} + 3 \cdot \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{(2x-1)^2} + 2x - 1 = 12x,$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} \cdot \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-1}\right) = 9x,$$

$$\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} \cdot \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-1}\right) = 3x.$$

Uočimo da je izraz u zagradi jednak lijevoj strani jednadžbe $(*)$ pa možemo pisati

$$\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{12x} = 3x.$$

Nakon kubiranja slijedi

$$(x+1)(2x-1)12x = 27x^3,$$

a budući da je $x \neq 0$ podijelimo jednadžbu s $3x$. Tada je

$$4(x+1)(2x-1) = 9x^2.$$

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 4x + 4 = 0$, koja ima rješenje $x = 2$, što je ujedno i rješenje početne jednadžbe.

Zadatak B-2.3.

Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Ako je $\dfrac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3}$ odredite kut α.

Rješenje.

Neka je a duljina stranice nasuprot kuta α, b duljina stranice nasuprot kuta β i c duljina stranice nasuprot kuta γ danog trokuta.

Primjenom poučka o sinusu imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\alpha}&=2R\Longrightarrow\sin\alpha=\frac{a}{2R},\\
\frac{b}{\sin\beta}&=2R\Longrightarrow\sin\beta=\frac{b}{2R},\\
\frac{c}{\sin\gamma}&=2R\Longrightarrow\sin\gamma=\frac{c}{2R}.
\end{aligned}$$

Uvrstimo li izraze za sinuse u zadanu jednakost slijedi

$$\frac{\dfrac{c^2}{4R^2}+\dfrac{b^2}{4R^2}-\dfrac{a^2}{4R^2}}{\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c}{2R}}=\sqrt{3},$$

odnosno

$$\frac{c^2+b^2-a^2}{bc}=\sqrt{3}$$

ili $c^2+b^2-a^2=\sqrt{3}bc$.

Prema poučku o kosinusu je $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, pa je

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

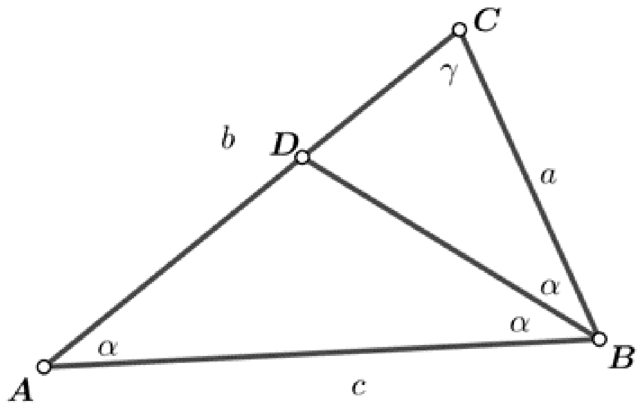
Tada je traženi kut $\alpha=30^\circ$.

Zadatak B-2.4.

Duljine stranice trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a najveći kut trokuta je dva puta veći od najmanjeg kuta trokuta. Odredite duljine stranica tog trokuta.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da je u trokutu ABC $\beta = 2\alpha$. Neka je $\overline{BD}$ dio simetrale kuta β unutar tog trokuta.



Tada je uz oznake kao na slici prema poučku o simetrali unutarnjeg kuta u trokutu $\dfrac{|AD|}{|DC|} = \dfrac{c}{a}$, odnosno $|DC| = \dfrac{a}{c}\,(b - |DC|)$. Odatle je $|DC| = \dfrac{ab}{a+c}$.

Trokut BDC sličan je trokutu ABC prema poučku KK pa vrijedi $\dfrac{|DC|}{|BC|} = \dfrac{|BC|}{|AC|}$. Tada je

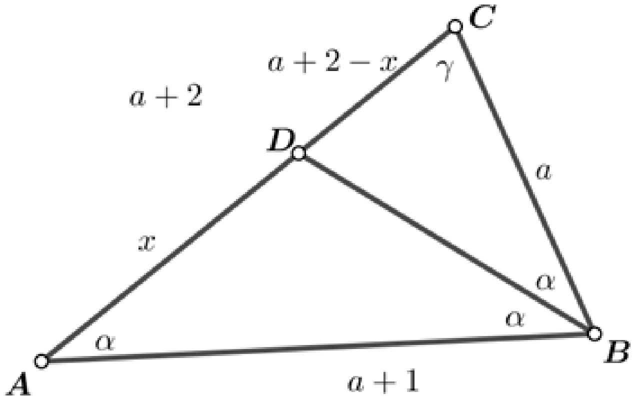
$$\frac{\frac{ab}{a+c}}{a} = \frac{a}{b},$$

odnosno $a(a+c) = b^2$.

Budući da su duljine stranica danog trokuta uzastopni prirodni brojevi i $\alpha < \gamma < \beta$ onda je $a < c < b$ i vrijedi $c = a+1$, $b = a+2$. Tada iz prethodne jednakosti slijedi $a(a+a+1) = (a+2)^2$ odnosno $a^2 - 3a - 4 = 0$. Pozitivno rješenje ove jednadžbe je $a = 4$.

Duljine stranica zadanog trokuta su $a = 4$, $c = 5$, $b = 6$.

Drugo rješenje.



Kao i u prvom rješenju, neka je u trokutu ABC $\beta = 2\alpha$, a $\overline{BD}$ dio simetrale kuta β unutar tog trokuta.

Najmanja stranica trokuta je nasuprot najmanjeg kuta, najveća nasuprot najvećeg kuta, a kako su duljine stranica trokuta uzastopni prirodni brojevi, vrijedi $|BC| = a$, $|AC| = a + 2$, $|AB| = a + 1$.

Označimo $|AD| = x$. Tada je $|DC| = a + 2 - x$ i $|BD| = x$ (trokut ABD je jednakokračan).

Trokut BDC sličan je trokutu ABC prema poučku KK pa vrijedi

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AC|} \text{ i } \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Tada je

$$\frac{x}{a+1} = \frac{a}{a+2}$$

i

$$\frac{a+2-x}{a} = \frac{a}{a+2}$$

odakle je

$$x = \frac{a(a+1)}{a+2}$$

i

$$x = a + 2 - \frac{a^2}{a+2},$$

odnosno $a^2 - 3a - 4 = 0$. Pozitivno rješenje ove jednadžbe je $a = 4$.

Duljine stranica zadanog trokuta su $a = 4$, $c = 5$, $b = 6$.

Zadatak B-2.5.

Funkcija f zadana je pravilom pridruživanja $f(x) = x^2 - \sqrt{b} \cdot x + c$, pri čemu su b i c realni parametri. Kolika je vjerojatnost da će pri slučajnom odabiru parametara b i c iz intervala $[0, 10]$ minimalna vrijednost zadane funkcije biti veća ili jednaka 2 i manja ili jednaka 3?

Rješenje.

Prostor svih elementarnih događaja je skup

$$\Omega = \left\{(b, c) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant b \leqslant 10, 0 \leqslant c \leqslant 10\right\}.$$

Očito je $m(\Omega) = 100$, pri čemu m mjeri površinu skupa Ω. U koordinatnoj ravnini u kojoj je parametar b iz intervala $[0, 10]$ na osi x, a parametar c iz intervala $[0, 10]$ na osi y, to je kvadrat sa stranicom duljine 10, odnosno površine 100 kv. jedinica.

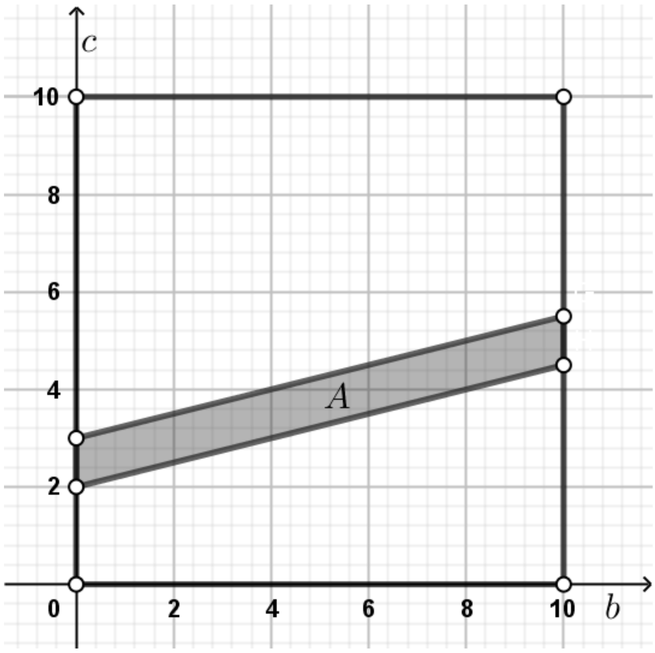
Neka je događaj $A \subseteq \Omega$ skup svih uređenih parova (b, c) koji zadovoljavaju uvjet zadataka. Odredimo skup A.

Minimalna vrijednost funkcije $f(x)$ jednaka je $\dfrac{4c - b}{4}$.

Prema uvjetu zadataka mora vrijediti $2 \leqslant \dfrac{4c - b}{4} \leqslant 3$, odnosno $4c - b \leqslant 12$, $4c - b \leqslant 8$, pa je

$$A = \{(b, c) \in \Omega | 4c - b \leqslant 12,\ 4c - b \geqslant 8\}.$$

U koordinatnoj ravnini skup A je prikazan s pomoću paralelograma kao na slici:



Odredimo sada površinu skupa A. Uočimo da se radi o paralelogramu čija je duljina stranice 1, a visina 10, pa je $m(A) = 10$.

Konačno se dobiva

$$p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{10}{100} = 0.1.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

Zadatak B-3.1.

Odredite najveću vrijednost funkcije $f(x)=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2\frac{8}{x}$ na intervalu $[1,64]$.

Rješenje.

Korištenjem svojstava logaritama funkciju $f(x)=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2\frac{8}{x}$ možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2\frac{8}{x}\\
&= \log_2^4 x+12\log_2^2 x\left(\log_2 8-\log_2 x\right)\\
&= \log_2^4 x+36\log_2^2 x-12\log_2^3 x\\
&= \left(\log_2^2 x-6\log_2 x\right)^2.
\end{aligned}$$

Iz $x\in[1,64]$ i $\log_2 x$ je rastuća funkcija, slijedi da je $\log_2 x\in[\log_2 1,\log_2 64]=[0,6]$. Stoga je dovoljno promatrati funkciju $g(t)=t^2-6t$ na intervalu $[0,6]$.

Funkcija g je kvadratna funkcija koja postiže minimalnu vrijednost -9 za $t=3$.

Uočimo da su 0 i 6 nultočke funkcije g. Prema tome na intervalu $[0,6]$ funkcija g poprima sve vrijednosti iz intervala $[-9,0]$. Za te vrijednosti od g funkcija g^2 poprima sve vrijednosti iz intervala $[0,81]$ i najveća joj je vrijednost 81 koju postiže za $g(t)=-9$, odnosno za $t=3$.

Zaključujemo da funkcija $f=g^2$ na intervalu $[1,64]$ ima najveću vrijednost 81 koju postiže za x takav da je $\log_2 x=3$, odnosno za $x=8$.

Zadatak B-3.2.

Na plesnom festivalu sudjeluju dvije plesne skupine. U prvom dijelu festivala svaki je plesač otplesao po jedan ples sa svakim plesačem iz svoje skupine. Niti jedan plesač iz jedne skupine nije plesao s plesačem iz druge skupine. Koliko je plesača u svakoj pojedinoj skupini ako one zajedno imaju 42 plesača, a u prvom dijelu festivala se ukupno otplesao 421 ples? Drugi dio festivala formiraju se plesni parovi od po jednog plesača iz svake plesne skupine. Koliki je maksimalan broj takvih parova koji se mogu naći na plesnom podiju? (Napomena: plesače ne razlikujemo po spolu.)

Rješenje.

Prema uvjetu iz zadatka vrijedi $a + b = 42$, gdje je a broj plesača u prvoj, a b broj plesača u drugoj skupini.

Ukupan broj plesova u paru formiranih od svih a plesača iz prve skupine je $\frac{a(a-1)}{2}$, a ukupan broj plesova u paru od svih b plesača iz druge skupine je $\frac{b(b-1)}{2}$. Tada je

$$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} = 421,$$

odnosno $a^2 + b^2 - (a + b) = 842$. Ako uvrstimo $b = 42 - a$ dobivamo $a^2 + (42 - a)^2 - 42 = 842$, a nakon sređivanja kvadratnu jednadžbu $a^2 - 42a + 440 = 0$ čija su rješenja 20 i 22.

Dakle, u jednoj plesnoj skupini ima 20 članova, u drugoj 22 ili obratno.

Odatle je očito da mješovitih plesnih parova ima maksimalno 20, a možemo ih odabrati tako da prvo odaberemo 20 od 22 plesača druge skupine na $\binom{22}{20} = \binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{2} = 231$ način, a zatim ih rasporedimo na 20 plesača iz prve skupine i to na 20! načina.

Dakle, ukupno je mogućnosti $\binom{22}{20} \cdot 20! = 231 \cdot 20!$ načina.

Zadatak B-3.3.

Zadani su vektori $\vec{u} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{v} = 7\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{w} = \vec{m} - 4\vec{n}$ i $\vec{z} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$, pri čemu su $\vec{m}, \vec{n} \neq \vec{0}$. Ako su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$, te $\vec{w}$ i $\vec{z}$ okomiti, odredite kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

Rješenje.

Kako je skalarni produkt okomitih vektora jednak nuli, prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (7\vec{m} - 5\vec{n}),$$

$$0 = \vec{w} \cdot \vec{z} = (\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot (7\vec{m} - 2\vec{n}).$$

Primjenom svojstava skalarnog množenja dobivamo:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (7\vec{m} - 5\vec{n}) = 7|\vec{m}|^2 + 16\vec{m} \cdot \vec{n} - 15|\vec{n}|^2, \tag{$*$}$$

$$0 = \vec{w} \cdot \vec{z} = (\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot (7\vec{m} - 2\vec{n}) = 7|\vec{m}|^2 - 30\vec{m} \cdot \vec{n} + 8|\vec{n}|^2. \tag{$**$}$$

Iz jednakosti $(*)$ slijedi da je

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{15|\vec{n}|^2 - 7|\vec{m}|^2}{16},$$

a iz jednakosti $(**)$ dobivamo

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{8|\vec{n}|^2 + 7|\vec{m}|^2}{30}.$$

Izjednačavanjem prethodnih dviju jednakosti i sređivanjem dobivenog izraza slijedi

$$30\left(15|\vec{n}|^2 - 7|\vec{m}|^2\right) = 16\left(8|\vec{n}|^2 + 7|\vec{m}|^2\right),$$

pa zaključujemo da je $|\vec{m}| = |\vec{n}|$.

Uvrštavanjem $|\vec{m}| = |\vec{n}|$ u jednu od jednakosti $(*)$ ili $(**)$ dobivamo $2\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}|^2$, odakle primjenom definicije skalarnog produkta slijedi da je $\cos \sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{1}{2}$.

Iz $\cos \sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{1}{2}$ zaključujemo da je $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{3}$, odnosno $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$.

Zadatak B-3.4.

Odredite sve parove prirodnih brojeva a i b takvih da je $a^2 - 4b^2 = a - 2b + 2^{2022}$.

Rješenje.

Danu jednadžbu možemo zapisati u obliku $(a - 2b)(a + 2b - 1) = 2^{2022}$, odakle slijedi da je $a + 2b - 1 = 2^x$ i $a - 2b = 2^y$, pri čemu su x i y nenegativni cijeli brojevi.

Nadalje, kako su a i b prirodni brojevi, očito je $a + 2b - 1 > a - 2b$, tj. $x > y \geqslant 0$.

Nadalje, kako je $2^x + 2^y = a + 2b - 1 + a - 2b = 2a - 1$ neparan broj mora vrijediti $y = 0$, tj. $a - 2b = 1$.

Iz $y = 0$ slijedi da je $x = 2022$.

Dakle, dobivamo sustav

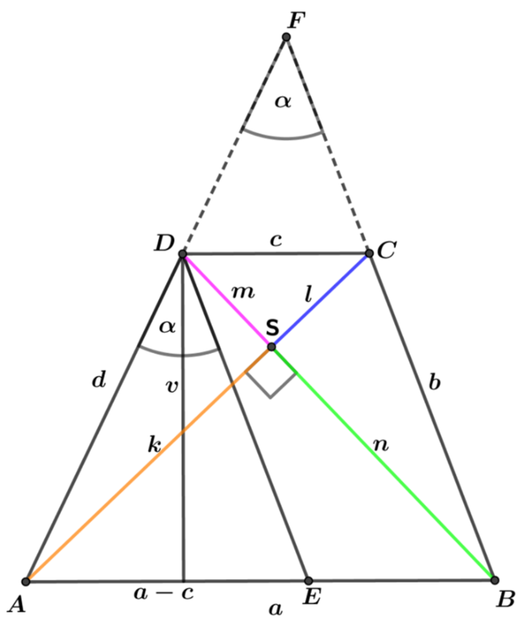
$$\begin{cases} a + 2b - 1 = 2^{2022}, \\ a - 2b = 1. \end{cases}$$

Rješavanjem dobivenog sustava nalazimo $a = 2^{2021} + 1$ i $b = 2^{2020}$.

Zadatak B-3.5.

Trapez s međusobno okomitim dijagonalama ima osnovice duljina $a = 12$ i $c = 4$, a produžetci krakova trapeza sijeku se pod kutom α. Ako je $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, izračunajte površinu tog trapeza.

Rješenje.



Povucimo paralelu s krakom BC kroz vrh D (ili s krakom AD kroz vrh C). Presjek te paralele i veće osnovice označimo s E. Tada je

$$|DE| = b, \quad |AE| = a - c = 8, \quad \sphericalangle ADE = \alpha.$$

Iz trokuta AED prema poučku o kosinusu dobivamo vezu između duljina krakova trapeza b i d:

$$(a-c)^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\alpha,$$

$$64 = b^2 + d^2 - 2bd \cdot \frac{4}{5}. \qquad (*)$$

Ako sjecište dijagonala, točka S, dijeli dijagonale na dijelove duljina k, l, m, n kao na slici tada prema Pitagorinom poučku vrijedi: $a^2 = k^2 + n^2$ i $c^2 = l^2 + m^2$. Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi

$$a^2 + c^2 = k^2 + l^2 + m^2 + n^2.$$

Analogno iz $b^2 = l^2 + n^2$ i $d^2 = k^2 + m^2$ dobivamo

$$b^2 + d^2 = k^2 + l^2 + m^2 + n^2.$$

Tada je $b^2 + d^2 = a^2 + c^2 = 160$ pa iz jednakosti $(*)$ dobivamo

$$bd = \frac{160 - 64}{\frac{8}{5}} = 60.$$

Iz izraza za površinu trokuta AED, $P = \dfrac{(a-c)v}{2} = \dfrac{bd\sin\alpha}{2}$ i

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

dobivamo

$$v = \frac{bd\sin\alpha}{a-c} = \frac{60 \cdot \frac{3}{5}}{8} = \frac{9}{2}.$$

Konačno, površina trapeza je $P = \dfrac{a+c}{2}v = \dfrac{16}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 36.$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2022.

Zadatak B-4.1.

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2022} - \sin \frac{\pi y}{2022} & = 1 \\ \\ x - y & = 2022 \end{cases}$$

ako je $|x| \leqslant 2022$ i $|y| \leqslant 2022$.

Rješenje.

Ako iz druge jednadžbe izrazimo $x = 2022 + y$ te uvrstimo u prvu jednadžbu, dobivamo

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi y}{2022}\right) - \sin \frac{\pi y}{2022} = 1.$$

Kako je $\sin\left(\pi + \frac{\pi y}{2022}\right) = -\sin \frac{\pi y}{2022}$,

dana se jednadžba svodi na osnovnu jednadžbu $\sin \frac{\pi y}{2022} = -\frac{1}{2}$.

Odatle je $\frac{\pi y_1}{2022} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $\frac{\pi y_2}{2022} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nakon sređivanja je

$y_1 = -337 + 4044k$ i $y_2 = 2359 + 4044k, k \in \mathbb{Z}$, a tada je

$x_1 = 2022 + y_1 = 1685 + 4044k$ i $x_2 = 2022 + y_2 = 4381 + 4044k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Stoga će rješenja danog sustava biti

$(1685 + 4044k, -337 + 4044k)$ i $(4381 + 4044k, 2359 + 4044k)$, $k \in \mathbb{Z}$, ali preostaje primijeniti uvjete

$|x| \leqslant 2022, |y| \leqslant 2022$, odnosno $-2022 \leqslant x \leqslant 2022, -2022 \leqslant y \leqslant 2022$.

Uvrštavanjem $k = 0$ u prvo rješenje $(1685 + 4044k, -337 + 4044k)$ slijedi rješenje $(1685, -337)$.

Uvrštavanjem $k = -1$ u drugo rješenje $(4381 + 4044k, 2359 + 4044k)$ slijedi rješenje $(337, -1685)$.

Konačno, tražena rješenja su $(1685, -337)$ i $(337, -1685)$.

Zadatak B-4.2.

Neka je $S_n, n \in \mathbb{N}$ zbroj prvih n članova geometrijskog niza. Ako je $S_{100} = 10$ i $S_{300} = 210$ koliko je S_{400}?

Rješenje.

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza računamo po formuli $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$. Iz zadanih zbrojeva u zadatku vidimo da niz nije konstantan, odnosno da je $q \neq 1$.

Tada je $a_1 \dfrac{q^{100} - 1}{q - 1} = 10$ i $a_1 \dfrac{q^{300} - 1}{q - 1} = 210$.

Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom dobivamo $\dfrac{q^{300} - 1}{q^{100} - 1} = 21$.

Brojnik ovog razlomka možemo faktorizirati kao razliku kubova i tada redom slijedi:

$$\frac{\left(q^{100}\right)^3 - 1}{q^{100} - 1} = 21,$$

$$\frac{\left(q^{100} - 1\right)\left(q^{200} + q^{100} + 1\right)}{q^{100} - 1} = 21,$$

$$q^{200} + q^{100} - 20 = 0.$$

Stavimo li $x = q^{100}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 + x - 20 = 0$ kojoj su rješenja $x = -5$ i $x = 4$.

Dakle, $q^{100} = -5$ i $q^{100} = 4$. Parna potencija realnog broja ne može biti negativna, pa je jedino rješenje $q^{100} = 4$.

Preostaje još odrediti prvi član niza. Izrazimo prvi član a_1 iz $a_1 \dfrac{q^{100} - 1}{q - 1} = 10$.

$a_1 = \dfrac{10\,(q - 1)}{q^{100} - 1} = \dfrac{10\left(4^{\frac{1}{100}} - 1\right)}{4 - 1} = \dfrac{10}{3}\left(4^{\frac{1}{100}} - 1\right)$.

Tada je traženi zbroj jednak

$$S_{400} = a_1 \frac{\left(q^{100}\right)^4 - 1}{q - 1} = \frac{10}{3}\left(4^{\frac{1}{100}} - 1\right) \frac{4^4 - 1}{\left(4^{\frac{1}{100}} - 1\right)} = 850.$$

Napomena.

Ako se ne koristi faktorizacija razlike kubova u rješavanju dobivenog sustava jednadžbi, tada se sustav svodi na jednadžbu $x^3 - 21x + 20 = 0$, $x = q^{100}$. Jednadžba se može rješavati faktorizacijom ili promatranjem djelitelja slobodnog člana. Faktorizacija:

$$\begin{aligned} x^3 - 21x + 20 &= x^3 - x^2 + x^2 - 20x - x + 20 = \\ &= x^2(x - 1) + x(x - 1) - 20(x + 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 20) = \\ &= (x - 1)(x - 4)(x + 5). \end{aligned}$$

Budući da je $q \neq 1$, jedino pozitivno rješenje je 4. Dalje je postupak kao što je navedeno u rješenju.

Zadatak B-4.3.

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a > 0$ i $f(f(x)) = 4x + 9$, za sve realne brojeve x. Dokažite da je broj $(f(p-1))^n - (2np+1)$ djeljiv s p^2 za bilo koji prost broj p i prirodni broj n.

Rješenje.

Iz $f(f(x)) = 4x+9$ i $f(x) = ax+b$, $a > 0$ slijedi $f(ax+b) = 4x+9$, odnosno $a(ax+b)+b = 4x+9$ te $a^2x + ab + b = 4x + 9$.

Polinomi su jednaki ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki, pa je $a^2 = 4$, $ab + b = 9$. Budući da je $a > 0$, slijedi $a = 2$, $b = 3$.

Tada je $f(p-1) = 2(p-1) + 3 = 2p + 1$ pa prema binomnoj formuli redom slijedi:

$$(f(p-1))^n = (2p+1)^n =$$

$$= (2p)^n + \binom{n}{1}(2p)^{n-1} + \binom{n}{2}(2p)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}(2p)^2 + \binom{n}{n-1}(2p)^1 + \binom{n}{n}(2p)^0$$

$$= (2p)^n + \binom{n}{1}(2p)^{n-1} + \binom{n}{2}(2p)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}(2p)^2 + 2np + 1.$$

Tada je dani izraz jednak

$$(f(p-1))^n - (2np+1) =$$

$$= (2p)^n + \binom{n}{1}(2p)^{n-1} + \binom{n}{2}(2p)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}(2p)^2 + 2np + 1 - (2np+1) =$$

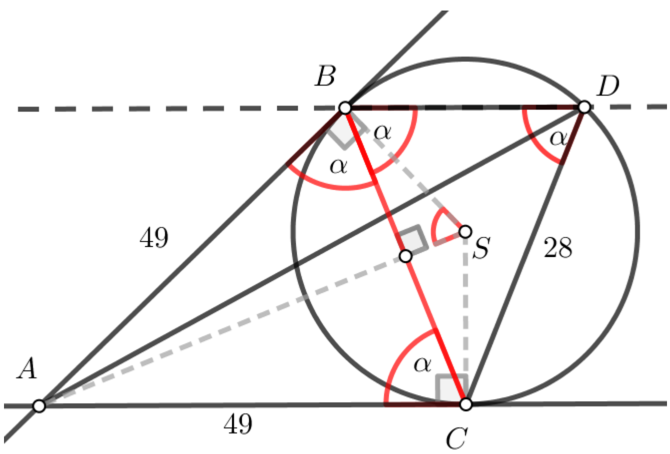
$$p^2\left(2^n p^{n-2} + \binom{n}{1}2^{n-1}p^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}2^2\right),$$

što je djeljivo s p^2.

Zadatak B-4.4.

Iz točke A izvan kružnice povučene su tangente na kružnicu k s diralištima u točkama B i C. Pravac paralelan s AC prolazi točkom B i siječe kružnicu k ponovno u točki D. Ako je $|AB| = 49$ i $|CD| = 28$ odredite duljinu $|AD|$.

Rješenje.



Ako su povučene tangente iz točke A izvan kružnice, tada vrijedi

$|AC| = |AB| = 49$ i $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CBA$. Označimo taj kuta s α.

Tada je $\sphericalangle BSA = 90^\circ - \sphericalangle SAB = \alpha$.

Zbog paralelnosti pravaca AC i BD je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BCA = \alpha$.

Kut BDC je manji obodni kut nad tetivom $\overline{BC}$ pa je jednak polovini pripadnog središnjeg kuta, odnosno $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BSA = \alpha$.

Do istog se zaključka može doći i primjenom poučka o kutu između tangente i tetive.

Iz svega navedenog proizlazi da je trokut DBC jednakokračan, odnosno da je $|BC| = |DC| = 28$.

Tada je iz polovice trokuta BCA

$\cos\alpha = \dfrac{14}{49} = \dfrac{2}{7}$, a zatim iz polovice trokuta BCD je

$\dfrac{|BD|}{2} = 28 \cdot \cos\alpha$, odnosno $|BD| = 56 \cdot \dfrac{2}{7} = 16$.

Primijenimo li poučak o kosinusu na trokut ADB imamo redom:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2\,|AB|\,|BD| \cos(2\alpha)$$

$$|AD|^2 = 49^2 + 16^2 - 2 \cdot 49 \cdot 16 \cdot \left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 2401 + 256 - 2 \cdot 16 \cdot 49 \left(-\frac{41}{49}\right) = 3969$$

Konačno, tražena udaljenost je $|AD| = \sqrt{3969} = 63$.

Zadatak B-4.5.

Mare je odabrala 6 različitih znamenki iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Koristeći te znamenke zapisala je na papiru sve moguće šesteroznamenkaste brojeve kojima se znamenke ne ponavljaju. Ako je S zbroj svih zapisanih brojeva, odredite najveći prosti djelitelj broja S.

Rješenje.

Za neki odabir 6 različitih znamenki Mare je mogla ispisati ukupno $6! = 720$ brojeva.

Označimo s a, b, c, d, e i f šest odabranih znamenki iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. U ispisu brojeva svaka se od tih znamenki pojavila na mjestu znamenke stotisućica, desettisućica, tisućica, stotica, desetica i jedinica, točno $720/6 = 120$ puta. Primjerice, ako je broj a na mjestu jedinica, preostale znamenke možemo rasporediti na $5! = 120$ načina.

Tada je zbroj svih zapisanih brojeva jednak

$$\begin{aligned} S = {} & 120(a+b+c+d+e+f) \cdot 100000 + 120(a+b+c+d+e+f) \cdot 10000 + \\ & + 120(a+b+c+d+e+f) \cdot 1000 + 120(a+b+c+d+e+f) \cdot 100 + \\ & + 120(a+b+c+d+e+f) \cdot 10 + 120(a+b+c+d+e+f) = \\ = {} & 120(a+b+c+d+e+f) \cdot 111111 \end{aligned}$$

Rastavimo li broj 120 i broj 111111 na proste faktore slijedi

$S = 2^3 \cdot 3 \cdot 5\,(a+b+c+d+e+f) \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

Zbroj znamenki $a+b+c+d+e+f$ je broj koji mora biti manji ili jednak broju $3+4+5+6+7+8 = 33$, pa je najveći prosti faktor koji bi taj izraz mogao generirati jednak 31.

Zaključujemo da je 37 najveći prosti djelitelj zbroja S.