DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

Zadatak A-1.1.

Natjecanje se održava u 11 učionica u kojima se nalazi isti broj klupa raspoređenih na isti način: u određenom broju stupaca i određenom broju redova. U svakoj je klupi po jedan učenik. Kada bi u svakoj učionici bio jedan red klupa manje i jedan stupac klupa više, bilo bi dovoljno 10 učionica, a još bi dvije klupe ostale prazne. Koliko ukupno može biti učenika na natjecanju ako je poznato da je njihov broj troznamenkast?

Rješenje.

Neka je N broj učenika na državnom, a r i s brojevi redaka i stupaca klupa u svakoj učionici.

U prvom slučaju imamo $N = 11rs$.

U drugom slučaju imamo $N + 2 = 10(r - 1)(s + 1) = 10rs - 10s + 10r + 10$.

Izjednačavanjem i sređivanjem dobivamo

$$\begin{gathered} 11rs + 2 = 10rs - 10s + 10r - 10 \\ rs + 12 + 10s - 10r = 0 \\ r(s - 10) + 10s - 100 + 100 + 12 = 0 \\ (r + 10)(s - 10) + 112 = 0 \\ (10 - s)(r + 10) = 112. \end{gathered}$$

Promatramo sve moguće faktorizacije broja 112 na dva prirodna faktora, od kojih je prvi manji od 10, a drugi veći od 10. Djelitelji broja 112 su $1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112$, pa u obzir dolaze samo sljedeće faktorizacije:

- $10 - s = 1,\ 10 + r = 112$, odakle je $s = 9, r = 102$, pa je $N = 11 \cdot 9 \cdot 102 = 10098$;
- $10 - s = 2,\ 10 + r = 56$, odakle je $s = 8, r = 46$, pa je $N = 11 \cdot 8 \cdot 46 = 4048$;
- $10 - s = 4,\ 10 + r = 28$, odakle je $s = 6, r = 18$, pa je $N = 11 \cdot 6 \cdot 18 = 1188$;
- $10 - s = 7,\ 10 + r = 16$, odakle je $s = 3, r = 6$, pa je $N = 11 \cdot 3 \cdot 6 = 198$;
- $10 - s = 8,\ 10 + r = 14$, odakle je $s = 2, r = 4$, pa je $N = 11 \cdot 2 \cdot 4 = 88$.

Iz uvjeta zadatka, N je troznamenkast broj, pa je jedino moguće rješenje $N = 198$.

Zadatak A-1.2.

Odredi sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$||x - 2| - x + a| = x + 3$$

ima točno dva realna rješenja.

Prvo rješenje.

Promatramo graf funkcije $f(x) = ||x-2|-x+a|-x-3$ tj. krivulju $y = ||x-2|-x+a|-x-3$ i gledamo u koliko točaka može sijeći x-os.

Za $x \geqslant 2$ ta krivulja ima jednadžbu $y = |a-2|-3-x$, što je pravac s nagibom -1, a u točki $x=2$ ima vrijednost $y = |a-2|-5$.

Za $x < 2$ ta krivulja ima jednadžbu $y = |2+a-2x|-3-x$, što je izlomljena linija ili pravac. Naime, graf funkcije $g(x) = |2+a-2x|-3-x$ se općenito sastoji od dvaju polupravaca koji leže na pravcima s jednadžbama $y = a-1-3x$ i $y = x-5-a$. Potrebno je samo utvrditi je li šiljak u kojem se sijeku polupravci u području za koje vrijedi $x < 2$. Spomenuti pravci se sijeku u točki koja je rješenje sustava, odnosno u kojoj izraz $2+a-2x$ mijenja predznak. To je $x = 1+\frac{a}{2}$. Šiljak je u području $x < 2$ za $1+\frac{a}{2} < 2$, tj. za $a < 2$.

Ako je $a \geqslant 2$, onda je šiljak desno od $x = 2$ i u području $x < 2$ imamo $2+a-2x \geqslant 0$, pa je graf funkcije $g(x)$ na tom području samo pravac $y = a-1-3x$.

Dakle, dolazimo do sljedećih zaključaka o grafu funkcije f u ovisnosti o parametru a.

Za $a \geqslant 2$ imamo dva dijela s nagibima -3 i -1, s prijelomom u $x = 2$. Za takve a funkcija f stalno pada i imamo samo jednu nultočku kakav god bio a.

Za $a < 2$, imamo tri dijela s nagibima -3, 1, -1 i prijelomima u $x = 1+\frac{a}{2}$ i $x = 2$ u kojima su redom vrijednosti $y = 0-3-1-\frac{a}{2} = -4-\frac{a}{2}$ i $y = -a-3$. Uočimo da je $-4-\frac{a}{2} < -a-3$ jer je to ekvivalentno s $a < 2$. Imamo točno dvije nultočke ako je jedna od te dvije vrijednosti jednaka 0, tj ako je $a = -8$ ili $a = -3$.

Drugo rješenje.

Riješimo jednadžbu u ovisnosti o parametru a.

Prvo tražimo rješenja za koja je $x \geqslant 2$. Tada jednadžba postaje

$$\begin{aligned} |(x-2)-x+a| &= x+3 \\ |a-2| &= x+3 \\ x &= |a-2|-3. \end{aligned}$$

U ovom slučaju dobivamo jedinstveno rješenje koje će biti rješenje ako vrijedi $x \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} x = |a-2|-3 &\geqslant 2 \\ |a-2| &\geqslant 5. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje $x = |a-2|-3$ je rješenje ako vrijedi $a \in \langle -\infty, -3] \cup [7, +\infty\rangle$.

Sada nađimo rješenja za koja je $x < 2$. Tada jednadžba postaje

$$\begin{aligned} |(2-x)-x+a| &= x+3 \\ |a+2-2x| &= x+3. \end{aligned}$$

Pogledajmo sada dva slučaja. Prvo nađimo rješenja x za koja vrijedi $a+2-2x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} a+2-2x &= x+3 \\ a-1 &= 3x \\ x &= \frac{a-1}{3}. \end{aligned}$$

To će biti rješenje naše jednadžbe ako vrijedi $x < 2$ i $a + 2 - 2x \geqslant 0$. Iz prve nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{3} &< 2 \\ \frac{a-7}{3} &< 0 \\ a &< 7. \end{aligned}$$

Iz druge nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} a + 2 - 2x &\geqslant 0 \\ a + 2 - 2 \cdot \frac{a-1}{3} &\geqslant 0 \\ \frac{a+8}{3} &\geqslant 0 \\ a &\geqslant -8. \end{aligned}$$

Dakle, broj $x = \dfrac{a-1}{3}$ je rješenje kada je $a \in [-8, 7\rangle$.

Naposljetku, promotrimo slučaj $a + 2 - 2x < 0$:

$$\begin{aligned} 2x - a - 2 &= x + 3 \\ x &= a + 5. \end{aligned}$$

Broj $x = a + 5$ je rješenje u slučajevima kada vrijede nejednakosti $x < 2$ i $a + 2 - 2x < 0$. Prva povlači

$$\begin{aligned} a + 5 &< 2 \\ a &< -3. \end{aligned}$$

Druga povlači

$$\begin{aligned} a + 2 - 2(a+5) &< 0 \\ a &> -8. \end{aligned}$$

Dakle, broj $x = a + 5$ je rješenje u slučaju $a \in \langle -8, -3\rangle$.

Konačno:

- kada je $a \in \langle -\infty, -8\rangle$, jednadžba ima jedno rješenje $x = |a-2| - 3$;
- kada je $a = -8$, jednadžba ima dva rješenja: $x = |a-2| - 3 = 7$ i $x = \dfrac{a-1}{3} = -3$;
- kada je $a \in \langle -8, -3\rangle$, jednadžba ima tri rješenja: $x = |a-2| - 3$, $x = \dfrac{a-1}{3}$ i $x = a + 5$;
- kada je $a = -3$, jednadžba ima dva rješenja: $x = |a-2| - 3 = 2$ i $x = \dfrac{a-1}{3} = -\dfrac{4}{3}$;
- kada je $a \in \langle -3, 7\rangle$, jednadžba ima jedno rješenje: $x = \dfrac{a-1}{3}$;
- kada je $a \in \langle 7, +\infty\rangle$, jednadžba ima jedno rješenje: $x = |a-2| - 3$.

Dakle, jednadžba ima točno dva rješenja kada je $a = -8$ i $a = -3$.

Zadatak A-1.3.

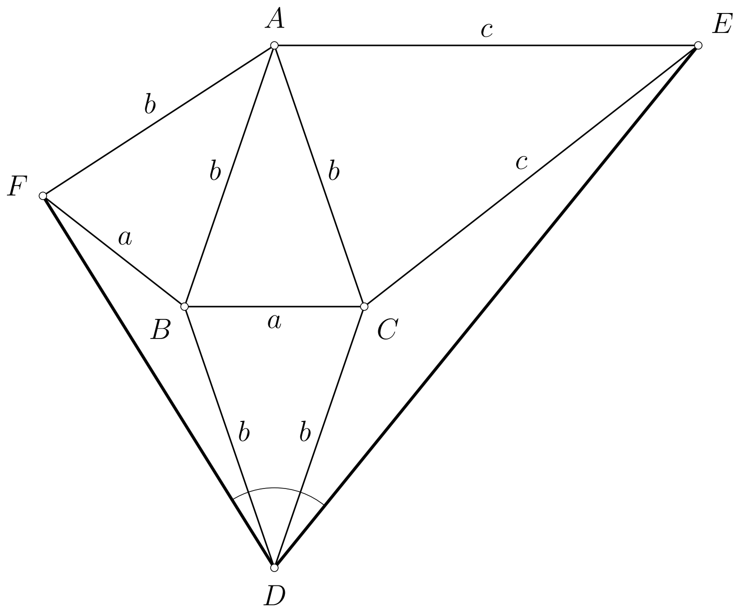
Dan je jednakokračan trokut ABC kojemu je $\overline{BC}$ osnovica. S vanjske strane tog trokuta nacrtani su jednakokračni trokuti CBD, ACE i BAF slični trokutu ABC, kojima su osnovice redom $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{BF}$. Ako je $\sphericalangle CAB = 38°$, odredi $\sphericalangle EDF$.

Rješenje.

U jednakokračnom trokutu kutovi uz osnovicu su jednaki. Označimo mjeru kuta $\sphericalangle CAB$ s α, a mjeru kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ s β. Tada je $2\beta + \alpha = 180°$, odakle je $\beta = 71°$.

Uvedimo sljedeće oznake za duljine dužina: $b = |AB| = |CA|$, $a = |BC|$, $c = |CE|$.

Trokuti ABC i CBD su slični jednakokračni trokuti koji dijele osnovicu, pa su zapravo sukladni. Također, trokuti ABC i BAF su slični jednakokračni trokuti koji dijele jedan krak, pa su također sukladni.



Zato zaključujemo

$$|BD| = |DC| = |AB| = b \qquad \text{i} \qquad |BF| = |BC| = a.$$

Iz sličnosti trokuta ABC i EAC dobivamo

$$\frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|BC|} \implies \frac{c}{b} = \frac{b}{a} \implies c = \frac{b^2}{a}.$$

Promotrimo trokute CDE i BFD. Kut $\sphericalangle ECD$ zajedno s kutovima $\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle DCB$ čini puni kut. Ti kutovi su kutovi u jednakokračnim trokutima uz osnovicu, pa vrijedi

$$\sphericalangle ECD = 360° - \sphericalangle ACE - \sphericalangle BCA - \sphericalangle DCB = 360° - 3\beta.$$

Analogno, kut $\sphericalangle DBF$ zajedno s kutovima $\sphericalangle FBA$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CBD$ (koji su također kutovi uz osnovicu u jednakokračnim trokutima) čini puni kut, pa vrijedi

$$\sphericalangle DBF = 360° - 3\beta = \sphericalangle ECD.$$

Nadalje, za omjere stranica trokuta CDE i BFD vrijedi

$$\frac{|CE|}{|CD|}=\frac{c}{b}=\frac{\frac{b^2}{a}}{b}=\frac{b}{a}=\frac{|BD|}{|BF|},$$

pa prema S–K–S poučku o sličnosti zaključujemo da su trokuti CDE i BFD slični, te je $\sphericalangle CDE=\sphericalangle BFD$. Posebno, vrijedi

$$\sphericalangle FDB+\sphericalangle CDE=\sphericalangle FDB+\sphericalangle BFD=180^\circ-\sphericalangle DBF=180^\circ-(360^\circ-3\beta)=3\beta-180^\circ.$$

Naposljetku, veličina traženog kuta je

$$\sphericalangle EDF=\sphericalangle FDB+\sphericalangle BDC+\sphericalangle CDE=\alpha+3\beta-180^\circ=\beta=71^\circ.$$

Zadatak A-1.4.

Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (k,m) za koje vrijedi

$$3m^3-m+21=3^{3k+1}-2\cdot 3^{2k+2}+3^{k+3}+3^{k+2}.$$

Rješenje.

Svi izrazi na obje strane početne jednakosti osim m djeljivi su s 3, pa je zato i on djeljiv s 3. Zato postoji prirodan broj n takav da je $m=3n$.

Izrazimo sada početnu jednakost pomoću n i k:

$$(3n)^3-n+7=3^{3k}-2\cdot 3^{2k+1}+3^{k+2}+3^{k+1}.$$

Uvedimo susptituciju $a=3^k$. Tada izraz na desnoj strani posljednje jednakosti možemo pisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}3^{3k}-2\cdot 3^{2k+1}+3^{k+2}+3^{k+1}&=a^3-6a^2+9a+3a\\&=a^3-3\cdot 2a^2+3\cdot 4a-8+8\\&=(a-2)^3+8.\end{aligned}$$

Dakle, jednadžbu možemo pisati kao

$$(3n)^3-n-1=(a-2)^3.$$

U slučaju kada je $n=0$, jednadžba postaje $(a-2)^3=-1$, čije je jedino rješenje $a=1$, odakle je $k=0$. Time smo dobili jedno rješenje: $(k,m)=(0,0)$.

Nadalje, pretpostavimo da je $n\geqslant 1$. Izraz

$$(3n)^3-n-1$$

mora biti jednak potpunom kubu, a očito je manji od $(3n)^3$. Zato vrijedi

$$(3n)^3-n-1\leqslant(3n-1)^3,$$

budući da između dva kuba uzastopnih prirodnih brojeva $(3n-1)^3$ i $(3n)^3$ ne postoji niti jedan drugi potpun kub prirodnog broja. Iz dobivene nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}(3n)^3 - n - 1 &\leqslant (3n-1)^3 \\ (3n)^3 - n - 1 &\leqslant (3n)^3 - 27n^2 + 9n - 1 \\ 27n^2 - 10n &\leqslant 0 \\ 27n - 10 &\leqslant 0,\end{aligned}$$

što nije zadovoljeno ni za koji prirodan broj n. Time zaključujemo da jednadžba nema niti jedno drugo rješenje.

Jedino rješenje je $(k, m) = (0, 0)$.

Zadatak A-1.5.

Dan je konveksan mnogokut s 2022 vrha kojem se nikoje tri dijagonale ne sijeku u istoj točki. Potrebno je obojiti neke dijagonale crveno tako da iz svakog vrha izlazi barem jedna crvena dijagonala.

Koliko je najmanji mogući broj sjecišta (u vrhu ili unutrašnjosti) crvenih dijagonala?

Rješenje.

Dokazat ćemo da najmanji broj sjecišta koje Marko može postići iznosi 2.

Označimo s A_1, A_2, ..., A_{2022} redom vrhove danog mnogokuta.

Prvo navedimo primjer povlačenja crvenih dijagonala tako da se postignu točno dva sjecišta. Povucimo dijagonale $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$, koje se sijeku. Nakon toga povlačimo međusobno paralelne dijagonale

$$\overline{A_{2022}A_5}, \overline{A_{2021}A_6}, \ldots, \overline{A_{1011}A_{1016}}.$$

Konačno, povucimo još dijagonale $\overline{A_{1012}A_{1014}}$ i $\overline{A_{1013}A_{1015}}$ koje se međusobno sijeku. Time dobivamo primjer s ukupno 2 sjecišta.

Dokažimo da u uvijek imamo najmanje dva sjecišta. Pretpostavimo suprotno, postoji primjer povlačenja dijagonala u kojem imamo najviše jedno sjecište, te promotrimo taj primjer.

Promotrimo dvije točke A_i, A_j koje nisu susjedne niti suprotne, tj. da ne vrijedi ni $|i-j| = 1$ ni $|i-j| = 1011$. Reći ćemo da se neka točka A_k nalazi između A_i i A_j ako se nalazi u manjem od dva dijela mnogokuta kojeg određuje pravac A_iA_j.

Među svim dijagonalama koje je Marko povukao odaberimo onu koja povezuje vrhove između kojih ima najmanje drugih vrhova - reći ćemo da je to *najkraća* dijagonala. Bez smanjenja općenitosti, ta dijagonala je oblika $\overline{A_1A_k}$, gdje je $k \leqslant 1012$ (u suprotnom možemo rotirati numeraciju točaka i zrcaliti mnogokut preko pravca A_1A_{1012}). Promotrimo točke $A_2, \ldots, A_{k-1}$. One su krajnje točke dijagonala koje povezuju vrhove između kojih ima više od ili jednako mnogo drugih vrhova kao za dijagonalu $\overline{A_1A_k}$, stoga je svaka ta točka krajnja točka neke dijagonale koja siječe dijagonalu $\overline{A_1A_k}$. Kako u mnogokutu imamo najviše jedno sjecište, zaključujemo da je nužno $k = 3$, te dijagonala $\overline{A_1A_k}$ presijeca dijagonalu $\overline{A_2A_m}$, za neki indeks m. Bez smanjenja općenitosti, $m \leqslant 1013$.

Dokažimo da je $m = 4$. Pretpostavimo da je $m \geqslant 5$. Sve dijagonale kojima je jedna krajnja točka u skupu $\{A_4, A_5, \ldots, A_{m-1}\}$ nužno imaju i drugu točku u tom skupu. Inače bi ta dijagonala sjekla dijagonalu $\overline{A_2A_m}$. Među svim takvim dijagonalima odaberimo najkraću: neka je to $\overline{A_kA_l}$. Slično kao ranije, svi vrhovi između A_k i A_l krajevi su dijagonala koje nisu kraće od dijagonale $\overline{A_kA_l}$, pa ju nužno siječe, čime dobivamo dva sjecišta. Dakle, nužno je $m = 4$.

Izaberimo ponovno najkraću dijagonalu u mnogokutu, različitu od $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$: neka je to $\overline{A_kA_l}$. Ako između točaka A_k i A_l postoji neka točka različita od A_1, A_2, A_3 i A_4, moći ćemo ponovno zaključiti da postoji neka dijagonala koja siječe $\overline{A_kA_l}$. Zato zaključujemo da je dijagonala $\overline{A_kA_l}$ upravo $\overline{A_{2022}A_5}$.

Ovaj argument možemo ponoviti: sljedeća najkraća dijagonala u mnogokutu je $\overline{A_{2021}A_6}$, pa $\overline{A_{2020}A_7}, \ldots,$ i redom sve do $\overline{A_{1519}A_{508}}$. Posljednja dijagonala je dijagonala koja spaja suprotne vrhove mnogokuta, stoga je to najduža moguća dijagonala. Kako je iz konstrukcije to do tog trenutka najkraća dijagonala, zaključujemo da su sve preostale dijagonale jednake duljine, tj. da spajaju suprotne vrhove mnogokuta. No, sve takve dijagonale prolaze središtem mnogokuta, čime dobivamo još barem jedno sjecište. To je u suprotnosti s pretpostavkom da Marko može povući dijagonale tako da postoji najviše jedno sjecište dijagonala.

Zaključujemo da je zaista najmanji broj sjecišta dijagonala jednak 2.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

Zadatak A-2.1.

Koeficijenti a, b i c kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ tri su uzastopna prirodna broja (u nekom od šest mogućih poredaka), a njezina su rješenja realni brojevi.

Dokaži da je jedno od rješenja broj -1.

Rješenje.

Kako jednadžba ima barem jedno realno rješenje, vrijedi $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Budući da su a, b i c uzastopni brojevi (u nekom poretku), brojevi a i c iznose barem $b-1$ i $b-2$, pa vrijedi $4ac \geqslant 4(b-1)(b-2)$.

Uvrštavanjem imamo

$$0 \leqslant b^2 - 4ac \leqslant b^2 - 4(b-1)(b-2) = -3b^2 + 12b - 8 = -3(b-1)(b-3) + 1.$$

Za $b > 3$ vrijedi $3(b-1)(b-3) > 9$, odnosno $-3(b-1)(b-3) + 1 < 0$. Zato mora vrijediti $b \leqslant 3$.

S druge strane, b je prirodan, pa je nejednakost $b^2 \geqslant 4ac$ ekvivalentna nejednakosti $b^3 \geqslant 4abc$.

Najmanji mogući umnožak tri uzastopna prirodna broja je $abc = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, pa mora vrijediti $b^3 \geqslant 24$, odakle je $b \geqslant 3$. Zajedno s gornjim zaključkom, dobili smo da je nužno $b = 3$.

Konačno, pretpostavimo da a, b, c nisu brojevi $1, 2, 3$ u nekom poretku. Tada je $abc \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, pa bi moralo vrijediti $27 = b^3 \geqslant 4abc = 96$, što nije istina. Dakle, a i c su brojevi 1 i 2 u nekom poretku.

Dobili smo jednadžbe $x^2 + 3x + 2 = 0$ i $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Objema jednadžbama je diskriminanta $b^2 - 4ac = 1$ pozitivna, a provjerom vidimo da im je broj -1 jedno rješenje.

Zadatak A-2.2.

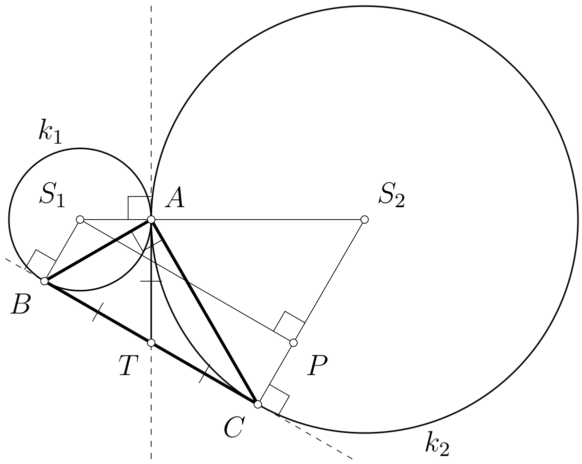
Dvije kružnice polumjera 1 i 3 diraju se izvana u točki A, a njihova vanjska zajednička tangenta ih dira u točkama B i C. Odredi zbroj kvadrata duljina stranica trokuta ABC.

Rješenje.

Označimo s k_1 i k_2 redom manju i veću kružnicu. Neka su S_1 i S_2 redom središta kružnica k_1 i k_2, te neka je T sjecište pravca BC i njihove zajedničke tangente kroz A.

Kako se točke B i C nalaze na kružnicama k_1 i k_2, vrijedi $|S_1B| = 1$ i $|S_2C| = 3$. Također, točka A nalazi se na dužini $\overline{S_1S_2}$, pa vrijedi $|S_1S_2| = |S_1A| + |AS_2| = 1 + 3 = 4$.

Točka T nalazi se na tangentama kružnice k_1 pa je jednako udaljena od dirališta tih tangenti, tj. vrijedi $|TA| = |TB|$. Također, nalazi se na tangentama kružnice k_2, pa vrijedi i $|TA| = |TC|$.



Zaključujemo da je točka T središte kružnice opisane trokutu ABC. Dodatno, točka T nalazi se na dužini $\overline{BC}$, pa zaključujemo da je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.

Prema Pitagorinom poučku vrijedi

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = 2|BC|^2,$$

pa je preostalo odrediti duljinu dužine $\overline{BC}$.

Označimo s P ortogonalnu projekciju iz S_1 na S_2C. Dužine $\overline{S_1B}$ i $\overline{S_2C}$ okomite su na pravac BC jer su B i C dirališta tangente i kružnica. Zato četverokut S_1BCP ima tri prava kuta, pa se radi o pravokutniku. Posebno, vrijedi

$$\begin{gathered} |S_1P| = |BC|, \\ |PC| = |S_1B| = 1, \\ |S_2P| = |S_2C| - |PC| = 3 - 1 = 2. \end{gathered}$$

Konačno, iz pravokutnog trokuta S_1PS_2 imamo

$$|BC|^2 = |S_1P|^2 = |S_1S_2|^2 - |S_2P|^2 = 4^2 - 2^2 = 12,$$

odakle slijedi

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = 2|BC|^2 = 24.$$

Zadatak A-2.3.

Postoje li prirodni brojevi k i m takvi da je $2022^k + 2022^m$ kvadrat prirodnog broja?

Rješenje.

Pretpostavimo prvo da vrijedi $k = m$. Tada je $2022^k + 2022^m = 2 \cdot 2022^k = 2^{k+1} \cdot 3^k \cdot 337^k$. Da bi to bio kvadrat prirodnog broja, brojevi $k+1$ i k moraju biti parni, što je očito nemoguće.

Prema tome, vrijedi $k \neq m$ i bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $k < m$.

Pretpostavimo da vrijedi $2022^k + 2022^m = a^2$ za neki prirodan broj a.

Tada je $a^2 = 2022^k(2022^{m-k} + 1)$. Brojevi 2022^k i $2022^{m-k} + 1$ su relativno prosti, pa svaki od njih zasebno mora biti potpun kvadrat.

Označimo $t = m - k$, te neka je b prirodan broj takav da je $b^2 = 2022^{m-k} + 1$. Tada je

$$2^t \cdot 3^t \cdot 337^t = 2022^t = b^2 - 1 = (b-1)(b+1).$$

Najmanji zajednički djelitelj brojeva $b+1$ i $b-1$ dijeli njihovu razliku koja iznosi 2. Također, to su brojevi iste parnosti, čiji je umožak paran broj. Zaključujemo da je najveći zajednički djelitelj tih brojeva jednak 2. Zato prost broj 337 dijeli točno jedan od brojeva $b-1$ i $b+1$, pa onda i 337^t u potpunosti dijeli taj broj.

Ako vrijedi $337^t \mid b-1$, imamo $b+1 \geqslant b-1 \geqslant 337^t$, iz čega slijedi $2022^t = (b-1)(b+1) \geqslant 337^{2t}$, odakle bi trebalo vrijediti $2022 \geqslant 337^2$, čime dolazimo do kontradikcije.

Ako vrijedi $337^t \mid b+1$, imamo $b+1 \geqslant 337^t$ i $b-1 \geqslant 337^t - 2$, iz čega slijedi $2022^t \geqslant 337^{2t} - 2 \cdot 337^t$, odakle slijedi $6^t \geqslant 337^t - 2$, što ne vrijedi ni za koji prirodan broj t.

U oba slučaja došli smo do kontradikcije, pa ne postoje traženi brojevi k i m.

Zadatak A-2.4.

Štapić je kvadar dimenzija $1 \times 1 \times 2$, a posuda je tijelo dobiveno uklanjanjem kockice $1 \times 1 \times 1$ iz kvadra dimenzija $3 \times 3 \times 2$ na sredini jedne od dviju polovica $3 \times 3 \times 1$.

Ako je dopušteno koristiti koliko god je potrebno štapića i posuda, koliko je najmanje takvih tijela potrebno za sastavljanje kocke dimenzija $303 \times 303 \times 303$ bez rupa i preklapanja? Tijela je dopušteno rotirati.

Rješenje.

Pretpostavimo da smo kocku sastavili a posuda i b štapića. Kako je posuda sastavljena od 17 jediničnih kockica, a štapić od dvije, vrijedi $17a + 2b = 303^3$. Želimo minimizirati izraz $a + b$.

Kako je posuda sastavljena od više jediničnih kockica nego štapić, da bismo kocku sastavili od što manje takvih tijela, potrebno je naći ono sastavljanje koje koristi najviše moguće posuda.

Za neku posudu promotrimo rupu nastalu uklanjanjem kockice $1 \times 1 \times 1$ iz sredine neke od njezinih polovica. Rupa svake posude koja se nalazi u velikoj kocki također se nalazi u toj kocki, pa mora biti popunjena nekim tijelom. Tu rupu moguće je pokriti samo štapićem.

S druge strane, svaki štapić može popuniti tu rupu najviše dvjema posudama. Zato mora vrijediti nejednakost $a \leqslant 2b$.

Uvrštavanjem te nejednakosti u jednakost s početka, dobivamo

$$303^3 = 17a + 2b \geqslant 18a,$$

odakle je

$$a \leqslant \frac{303^3}{18} = \frac{3090903}{2}.$$

Kako je a prirodan broj, zaključujemo dodatno da je

$$a \leqslant \frac{3090902}{2} = 1545451.$$

Dokažimo da je moguće sastaviti kocku koristeći točno 1545451 posuda.

Nazovimo *blok* tijelo dimenzija $3 \times 3 \times 4$ sastavljeno od dvije posude i jednog štapića koji ispunjava njihove dvije rupe. Prvo koristeći $101 \cdot 101 \cdot 75$ takvih blokova popunimo donji dio kocke dimenzija $303 \times 303 \times 300$.

Nakon toga, od preostalog dijela kocke dimenzija $303 \times 303 \times 3$ ispunimo lijevi dio kocke dimenzija $303 \times 300 \times 3$ koristeći $101 \cdot 75$ blokova, a onda od preostalog dijela dimenzija $303 \times 3 \times 3$ iskoristimo 75 blokova kako bismo prekrili još dio kocke dimenzija $300 \times 3 \times 3$.

Preostalo je prekriti kocku dimenzija $3 \times 3 \times 3$. Na njezino dno stavimo posudu s rupom prema gore, a u tu rupu stavimo jedan štapić. U najvišem retku preostalih osam mjesta oko jedne kockice posljednjeg štapića posložimo još četiri štapića.

Ukupno smo iskoristili

$$101 \cdot 101 \cdot 75 + 101 \cdot 75 + 75 = 772725$$

blokova. Za njihovo stvaranje bilo je potrebno 1545450 posuda i 772725 štapića. Nakon toga iskoristili smo još jednu posudu i 5 štapića. Ukupan broj iskorištenih posuda je 1545451, što je prema gornjem dijelu dokaza uistinu najveći broj posuda koje možemo iskoristiti.

Ukupan broj iskorištenih tijela iznosi $1545451 + 772730 = 2318181$, i to je najmanji broj tijela koji nam je potreban da bismo složili cijelu kocku dimenzija $303 \times 303 \times 303$.

Zadatak A-2.5.

Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je $abc = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a + c\sqrt{a}}{a^2b + c + 2} + \frac{b + a\sqrt{b}}{b^2c + a + 2} + \frac{c + b\sqrt{c}}{c^2a + b + 2} \leqslant \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Rješenje.

Promotrimo prvi pribrojnik na lijevoj strani. Dvostrukom primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine na nazivnik dobivamo

$$a^2b + c + 2 = (a^2b + 1) + (c + 1) \geqslant 2(a\sqrt{b} + \sqrt{c}) = 2\left(\frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{c}}\right) = \frac{2}{\sqrt{c}}(\sqrt{a} + c),$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili $\sqrt{abc} = 1$. Sada je

$$\frac{a + c\sqrt{a}}{a^2b + c + 2} \leqslant \frac{\sqrt{c}(\sqrt{a} + c)\sqrt{a}}{2(\sqrt{a} + c)} = \frac{1}{2}\sqrt{ac} \leqslant \frac{1}{4}(a + c),$$

pri čemu smo na kraju ponovno primijenili nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

Za preostala dva pribrojnika na lijevoj strani početne nejednakosti na analogan način dobivamo

$$\frac{b+a\sqrt{b}}{b^2c+a+2} \leqslant \frac{1}{4}(b+a),$$
$$\frac{c+b\sqrt{c}}{c^2a+b+2} \leqslant \frac{1}{4}(c+b).$$

Sumiranjem triju dobivenih nejednakosti dobivamo

$$\frac{a+c\sqrt{a}}{a^2b+c+2}+\frac{b+a\sqrt{b}}{b^2c+a+2}+\frac{c+b\sqrt{c}}{c^2a+b+2} \leqslant \frac{1}{4}(a+c)+\frac{1}{4}(b+a)+\frac{1}{4}(c+b)=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

čime je tvrdnja zadatka dokazana. Jednakost se postiže kada u svim nejednakostima vrijedi jednakost, a to je u slučaju $a=b=c=1$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve realne brojeve a takve da nejednakost

$$\cos(2x) + 2a\cos x + 7 \geqslant 0$$

vrijedi za sve realne brojeve x.

Prvo rješenje.

Izraz na lijevoj strani može se zapisati kao

$$\cos(2x) + 2a\cos x + 7 = 2\cos^2 x - 1 + 2a\cos x + 7 = 2(\cos^2 x + a\cos x + 3).$$

U gornjem izrazu možemo uvesti supstituciju $t = \cos x$. Kako funkcija cos poprima vrijednosti između -1 i 1, zaključujemo da zadatak postaje odrediti sve $a \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$t^2 + at + 3 \geqslant 0, \qquad \text{za sve} \quad t \in [-1, 1].$$

Apscisa tjemena kvadratne funkcije je $t_0 = -\dfrac{a}{2}$.

Promotrimo tri slučaja, u ovisnosti o poziciji tjemena u odnosu na -1 i 1.

U prvom slučaju $t_0 \in [-1, 1]$, odnosno kada je $a \in [-2, 2]$, kvadratna funkcija na intervalu $[-1, 1]$ poprima minimum u tjemenu, pa je nenegativnost kvadratne funkcije na $[-1, 1]$ ekvivalentna nenegativnosti kvadratne funkcije u t_0. Mora vrijediti

$$t_0^2 + at_0 + 3 \geqslant 0 \iff \frac{-a^2}{4} + 3 \geqslant 0 \iff a^2 \leqslant 12,$$

što vrijedi za sve $a \in [-2, 2]$.

U drugom slučaju $t_0 < -1$ (odnosno $a > 2$), kvadratna funkcija na intervalu $[-1, 1]$ je rastuća, pa poprima minimum u lijevom rubu intervala. Zato mora vrijediti

$$0 \leqslant (-1)^2 + a(-1) + 3 = 4 - a,$$

odnosno $a \in \langle 2, 4]$.

U slučaju kada je $t_0 > 1$ (odnosno $a < -2$) analogno zaključujemo da funkcija na intervalu $[-1, 1]$ poprima minimum u desnom rubu intervala, pa mora vrijediti

$$0 \leqslant 1^2 + a \cdot 1 + 3 = 4 + a,$$

odakle je $a \in [-4, -2\rangle$.

Konačno, skup traženih realnih brojeva a je interval

$$[-4, -2\rangle \cup [-2, 2] \cup \langle 2, 4] = [-4, 4].$$

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, zadatak se može svesti na određivanje svih $a \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi

$$t^2 + at + 3 \geqslant 0, \qquad \text{za sve} \quad t \in [-1, 1].$$

Budući da je vodeći koeficijent kvadratnog polinoma u nejednakosti pozitivan, dovoljno je naći sve $a \in \mathbb{R}$ takve da su nultočke jednadžbe

$$t^2 + at + 3 = 0$$

ili obje manje od ili jednake -1, ili obje veće od ili jednake 1, ili da ta jednadžba nema realnih nultočaka.

Promotrimo prvo slučaj kada ova jednadžba nema realnih nultočaka. To je ekvivalentno tome da je njezina diskriminanta $a^2 - 12$ negativna, a to se postiže kada je $a \in \langle -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \rangle$.

Sada promatramo slučaj kada su nultočke gornje jednadžbe realne i obje manje od ili jednake -1. Tada je diskriminanta kvadratne jednadžbe $a^2 - 12$ nenegativna, te je veće rješenje kvadratne jednadžbe

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 12}}{2}$$

manje od ili jednako -1. Diskriminanta će biti nenegativna kada je $a \in \langle -\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty\rangle$. Da bi veće rješenje bilo manje od ili jednako 1, treba vrijediti

$$\begin{aligned} \frac{-a + \sqrt{a^2 - 12}}{2} &\leqslant -1 \\ \iff \sqrt{a^2 - 12} &\leqslant a - 2. \end{aligned}$$

Lijeva strana nejednakosti nikada nije negativna, dok je desna negativna za $a < 2$, i tada nejednakost ne može biti zadovoljena. Zato uzimamo u obzir samo $a \geqslant 2$, te kvadriranjem nejednakosti dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\begin{aligned} \iff a^2 - 12 &\leqslant a^2 - 4a + 4 \\ \iff 4a &\leqslant 16 \\ \iff a &\leqslant 4. \end{aligned}$$

Stoga je veće rješenje manje od ili jednako -1 kada je $a \in [2, 4]$. Dakle, obje nultočke kvadratne jednadžbe su manje od ili jednake -1 kada je $a \in [2\sqrt{3}, 4]$.

Analogno, obje nultočke kvadratne jednadžbe su veće od ili jednake 1 kada je $a \in [-4, -2\sqrt{3}]$.

Konačno, skup traženih realnih brojeva a je unija dobivenih intervala u ova tri slučaja te je jednak intervalu $[-4, 4]$.

Zadatak A-3.2.

Odredi sve prirodne brojeve a i b takve da je

$$a^2 = 4b + 3 \cdot V(a, b),$$

pri čemu $V(m, n)$ označava najmanji zajednički višekratnik brojeva m i n.

Rješenje.

Označimo s d najveći zajednički djelitelj brojeva a i b, te definirajmo

$$p = \frac{a}{d}, \qquad q = \frac{b}{d}.$$

Brojevi p i q su relativno prosti prirodni brojevi, te vrijedi

$$V(a,b) = V(pd,qd) = dV(p,q) = pqd.$$

Uvrstimo li ovaj zapis u gornju jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} p^2d^2 &= 4qd + 3pqd \\ p^2d &= 4q + 3pq, \\ 4q &= p(pd - 3q). \end{aligned}$$

Iz zadnje jednakosti slijedi $p \mid 4q$, a budući da su p i q relativno prosti zaključujemo da nužno vrijedi $p \mid 4$. Odavde imamo tri slučaja: $p = 1$, $p = 2$ ili $p = 4$.

Promotrimo prvi slučaj $p = 1$. Uvrštavanjem dobivamo $d = 7q$. Direktnom provjerom dobivamo da za svaki prirodan broj q, brojevi $a = 7q$ i $b = 7q^2$ zaista zadovoljavaju uvjet zadatka.

Ako je $p = 2$, uvrštavanjem dobivamo $2d = 5q$ odakle je q paran. No, u tom slučaju su p i q parni, što je u kontradikciji s time da su p i q relativno prosti. Stoga zaključujemo da u ovom slučaju ne postoje takvi a i b.

Ako je $p = 4$, dobivamo $16d = 16q$, odnosno $d = q$. Budući da su p i q relativno prosti, q ne smije biti paran broj. Direktnom provjerom dobivamo da za svaki neparan prirodan broj q, brojevi $a = 4q$ i $b = q^2$ zaista zadovoljavaju uvjet zadatka.

Konačno, sva rješenja (a,b) početne jednadžbe su $(7q, 7q^2)$, za proizvoljan prirodan broj q, te $(4q, q^2)$, za proizvoljan neparan prirodan broj q.

Zadatak A-3.3.

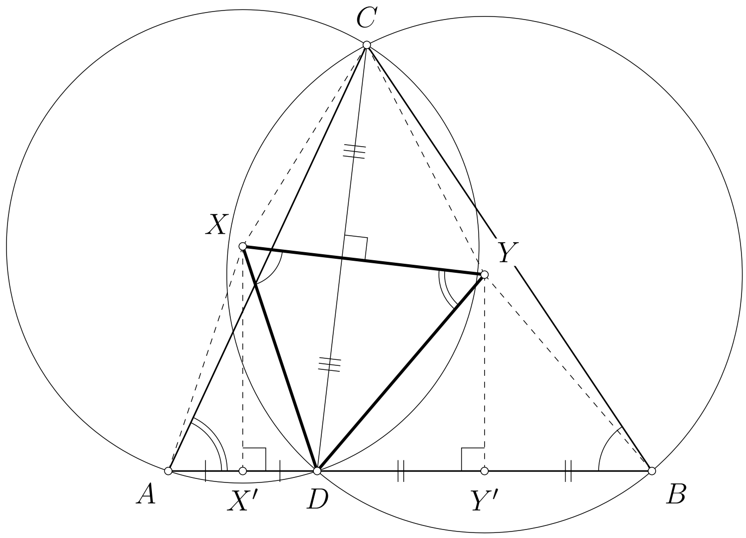
Na stranici $\overline{AB}$ šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka D. Neka su X i Y redom središta kružnica opisanih trokutima ADC i BCD. Dokaži da vrijedi

$$P(XDY) \geqslant \frac{1}{4}P(ABC),$$

gdje je $P(KLM)$ površina trokuta KLM. Kada vrijedi jednakost?

Prvo rješenje.

Označimo s X' i Y' ortogonalne projekcije točaka X i Y na pravac AB.



Duljina dužine $\overline{XY}$ veća je od ili jednaka duljini svoje ortogonalne projekcije, tj. vrijedi

$$|XY| \geqslant |X'Y'|.$$

Točka X, kao središte kružnice opisane trokutu ADC, nalazi se na simetrali dužine $\overline{AD}$. To je pravac okomit na $\overline{AD}$ koji prolazi polovištem stranice $\overline{AD}$. Kako je X' također točka koja se nalazi na pravcu okomitom na $\overline{AD}$ i prolazi točkom X, zaključujemo da je upravo X' polovište stranice $\overline{AD}$. Analogno, točka Y' je polovište stranice $\overline{DB}$.

Zato vrijedi

$$|X'Y'| = |X'D| + |DY'| = \frac{1}{2}|AD| + \frac{1}{2}|DB| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Posebno, vrijedi $|XY| \geqslant \dfrac{1}{2}|AB|$.

Točke X i Y, kao središta odgovarajućih opisanih kružnica, nalaze se i na simetrali dužine $\overline{CD}$. Zato je pravac XY simetrala dužine $\overline{CD}$. Dodatno, to je i simetrala kutova $\sphericalangle DYC$ i $\sphericalangle CXD$.

Iz poučka o središnjem i obodnom kutu za kružnicu opisanu trokutu BCD dobivamo

$$\sphericalangle DYX = \frac{1}{2}\sphericalangle DYC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC.$$

Analogno vrijedi $\sphericalangle YXD = \sphericalangle CAB$, pa prema K–K poučku o sličnosti zaključujemo da su trokuti XYD i ABC slični.

Označimo s k koeficijent sličnosti tih trokuta. Kako je $|XY| \geqslant \dfrac{1}{2}|AB|$, vrijedi $k \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Omjer površina sličnih trokuta jednak je k^2. Zato vrijedi

$$P(XDY) = k^2 P(ABC) \geqslant \frac{1}{4} P(ABC).$$

Jednakost vrijedi kada je $k = \frac{1}{2}$, što vrijedi ako i samo ako je $|XY| = |X'Y'|$. Dužina i njezina ortogonalna projekcija jednake su duljine ako i samo ako su one paralelne. Kako je pravac XY okomit na CD, zaključujemo da jednakost vrijedi ako i samo ako je D nožište visine iz C na dužinu $\overline{AB}$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, zaključujemo da je $|XY| \geqslant \frac{1}{2}|AB|$, te da je pravac XY simetrala dužine $\overline{CD}$.

Označimo s M presjek pravaca XY i CD.

Kako je M nožište visine iz D na stranicu $\overline{XY}$ u trokutu XDY, površinu tog trokuta možemo izraziti kao

$$P(XDY) = \frac{1}{2}|XY| \cdot |DM|.$$

Točka M nalazi se na simetrali dužine $\overline{CD}$, pa je ona polovište te dužine, tj. vrijedi $|DM| = \frac{1}{2}|CD|$.

Označimo s N nožište visine iz C na dužinu $\overline{AB}$. Svaka dužina koja spaja C s nekom točkom na pravcu AB ima duljinu veću od ili jednaku duljini dužine $\overline{CN}$. Zato vrijedi

$$|DM| = \frac{1}{2}|CD| \geqslant \frac{1}{2}|CN|.$$

Zato računamo

$$P(XDY) = \frac{1}{2}|XY| \cdot |DM| \geqslant \frac{1}{8}|AB| \cdot |CN| = \frac{1}{4}P(ABC).$$

Jednakost vrijedi kada je $|XY| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|CD| = |CN|$. Kao u prvom rješenju argumentiramo da prva jednakost vrijedi ako i samo ako je D nožište visine iz C na stranicu $\overline{AB}$, a očito je to nužan i dovoljan uvjet i za drugu jednakost.

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da su trokuti XYD i ABC slični. Zato vrijedi i jednakost odgovarajućih kutova $\sphericalangle XDY = \sphericalangle BCA$.

U trokutu ADC dužina $\overline{DX}$ radijus je tom trokutu opisane kružnice. Zato poučak o sinusima za taj trokut povlači

$$|AC| = 2|DX| \sin \sphericalangle ADC.$$

Analogno, za trokut DBC zaključujemo

$$|BC| = 2|DY| \sin \sphericalangle BDC = 2|DY| \sin \sphericalangle ADC.$$

Sada računamo

$$\begin{aligned}
P(XDY) &= \frac{1}{2}|DX| \cdot |DY| \sin \sphericalangle XDY \\
&= \frac{\sin \sphericalangle XDY}{2} \cdot \frac{|AC|}{2 \sin \sphericalangle ADC} \cdot \frac{|BC|}{2 \sin \sphericalangle ADC} \\
&= \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin \sphericalangle ACB \cdot \frac{1}{4 \sin^2 \sphericalangle ADC} \\
&\geqslant \frac{1}{4} P(ABC).
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sin \sphericalangle ADC = 1$, što je ekvivalentno s time da je kut $\sphericalangle ADC$ pravi, tj. ako i samo ako je D nožište visine iz vrha C.

Zadatak A-3.4.

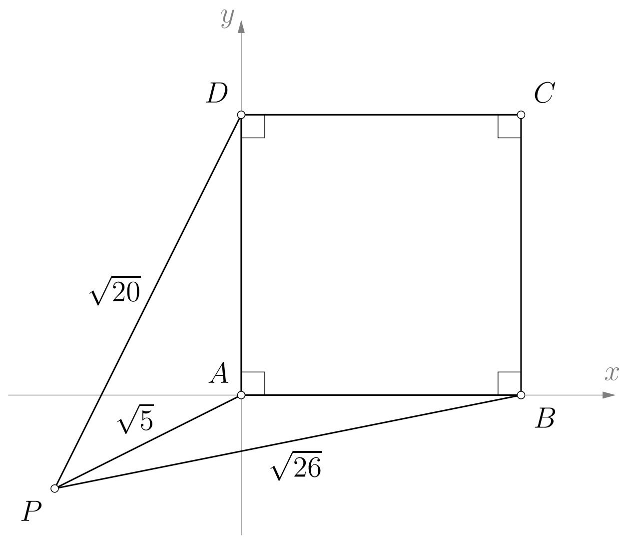
U ravnini kvadrata $ABCD$, ali izvan njega, nalazi se točka P. Ako je

$$|PA| = \sqrt{5}, \qquad |PB| = \sqrt{26} \qquad \text{i} \qquad |PD| = \sqrt{20},$$

odredi duljinu stranice kvadrata.

Rješenje.

Smjestimo kvadrat u koordinatni sustav tako da su mu vrhovi $A(0,0), B(a,0), C(a,a)$ i $D(0,a)$ te neka je $P(-x,-y)$.



Formula za udaljenost proizvoljnih točaka (x_1, y_1) i (x_2, y_2) glasi

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Njezinim korištenjem možemo izraziti uvjete zadatka na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 5, \\
x^2 + (y+a)^2 &= 20, \\
(x+a)^2 + y^2 &= 26.
\end{aligned}$$

Oduzimanjem prve jednakosti od druge i treće dobivamo

$$a^2 + 2ay = 15,$$
$$a^2 + 2ax = 21,$$

a njihovim oduzimanjem $6 + 2ay = 2ax$. Tu jednadžbu skratimo s 2, pa kvadriramo i dobijemo

$$9 + 6ay + a^2y^2 = a^2x^2 = a^2(5 - y^2) = 5a^2 - a^2y^2.$$

U zadnju jednadžbu uvrstimo jednakost $a^2 = 15 - 2ay$, te uz $t = ay$ dobivamo

$$9 + 6t + t^2 = 5(15 - 2t) - t^2 \implies t^2 + 8t - 33 = 0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su $t = 3$ i $t = -11$.

Za $t = ay = -11$ iz $a^2+2ay = 15$ dobivamo $a = \sqrt{37}$. Iz jednadžbi $a^2+2ay = 15$ i $a^2+2ax = 21$ sada slijedi

$$x = -\frac{8}{\sqrt{37}} \qquad \text{i} \qquad y = -\frac{11}{\sqrt{37}}.$$

U ovom slučaju točka P nalazi se unutar kvadrata $ABCD$, što je u kontradikciji s uvjetima zadatka.

U slučaju $t = ay = 3$ analogno dobivamo $a = 3$, te $x = 2$ i $y = 1$. Direktnom provjerom vidimo da ova konfiguracija zadovoljava uvjete zadatka.

Dakle, duljina stranice kvadrata je 3.

Napomena: Sustav iz gornjeg rješenja može se riješiti i na drugi način. Jednadžbe $a^2 - 15 = 2ay$ i $a^2 - 21 = 2ax$ kvadriramo i zbrojimo. Dobijemo

$$2a^4 - 72a^2 + 666 = 4a^2(x^2 + y^2) = 4a^2 \cdot 5 = 20a^2.$$

Odavde slijedi bikvadratna jednadžba

$$a^4 - 46a^2 + 333 = 0,$$

odakle dobivamo $a^2 \in \{9, 37\}$, odnosno zbog pozitivnosti broja a slijedi $a \in \{3, \sqrt{37}\}$. Analizu dovršimo kao u prošlom rješenju.

Zadatak A-3.5.

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje **ne postoje** prirodni brojevi a, b, c takvi da je $n = a^2 + b^3 + c^6$.

Prvo rješenje.

Za prirodan broj m kažemo da je *dobar* ako postoje prirodni brojevi a, b i c takvi da je $m = a^2 + b^3 + c^6$. U suprotnom kažemo da m *loš*. Zadatak je dokazati da postoji beskonačno mnogo loših brojeva.

Za proizvoljan prirodan $N \geqslant 3$ promotrimo skup $S = \{1, 2, \ldots, N^6\}$.

Promotrimo bilo koji dobar broj m iz skupa S, te neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$ takvi da je $m = a^2 + b^3 + c^6$. Za te brojeve a, b, c tada vrijedi:

$$\begin{aligned} N^6 \geqslant m = a^2 + b^3 + c^6 \geqslant a^2 &\implies a \leqslant N^3, \\ N^6 \geqslant m = a^2 + b^3 + c^6 \geqslant b^3 &\implies b \leqslant N^2, \\ N^6 \geqslant m = a^2 + b^3 + c^6 \geqslant c^6 &\implies c \leqslant N. \end{aligned}$$

Označimo s K skup uređenih trojki prirodnih brojeva (a, b, c) takvih da je $1 \leqslant a \leqslant N^3$, $1 \leqslant b \leqslant N^2$, $1 \leqslant c \leqslant N$. Skup K ima $N^3 \cdot N^2 \cdot N = N^6$ elemenata. Primijetimo da za svaki dobar $m \in S$ da postoji $(a, b, c) \in K$ takav da je $m = a^2 + b^3 + c^6$.

Promotrimo brojeve oblika $n^6 + 2$, gdje je $n \in \{2, \ldots, N-1\}$. Svi ti brojevi se nalaze u S jer je $n^6 + 2 \leqslant (N-1)^6 + 2 < N^6$, i takvih brojeva ima $(N-2)$. Također, svi ti brojevi su dobri, i prikazivi su na (barem) tri načina:

$$n^6 + 2 = (n^3)^2 + 1^3 + 1^6 = 1^2 + (n^2)^3 + 1^6 = 1^2 + 1^3 + n^6,$$

odnosno određeni su s (barem) tri međusobno različite trojke iz K:

$$(n^3, 1, 1),\ (1, n^2, 1),\ (1, 1, n), \quad n \in \{2, \ldots, N-1\}.$$

Kako su dobri elementi S prikazivi s najviše N^6 mogućih trojki prirodnih brojeva $(a, b, c) \in K$, a $(N-2)$ brojeva među njima prikazivo je na barem tri načina, zaključujemo da je najviše $N^6 - 2(N-2)$ elemenata skupa S dobro. Budući da skup S ima N^6 elemenata, zaključujemo da postoji barem $2(N-2)$ loših elemenata.

Ovime smo za neki $N \geqslant 3$ dokazali da postoji barem $2(N-2)$ loših brojeva u skupu $\{1, 2, \ldots, N^6\}$. Kako N može biti proizvoljno velik, zaključujemo da je beskonačno mnogo loših brojeva.

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, definirajmo dobre i loše prirodne brojeve, te za proizvoljan $N \geqslant 2$ definirajmo skup $S = \{1, 2, \ldots, N^6\}$.

Za neki dobar m i prirodne brojeve a, b, c takve da je $m = a^2 + b^3 + c^6$ mogu se dobiti i bolje ocjene:

$$\begin{aligned} N^6 \geqslant m = a^2 + b^3 + c^6 \geqslant a^2 + 1 + 1 > a^2 &\implies a < N^3 \implies a \leqslant N^3 - 1, \\ N^6 \geqslant m = a^2 + b^3 + c^6 \geqslant 1 + b^3 + 1 > b^3 &\implies b < N^2 \implies b \leqslant N^2 - 1, \\ N^6 \geqslant m = a^2 + b^3 + c^6 \geqslant 1 + 1 + c^6 > c^6 &\implies c < N \implies c \leqslant N - 1. \end{aligned}$$

Označimo s $\overline{K}$ skup uređenih trojki prirodnih brojeva (a, b, c) takvih da je $1 \leqslant a \leqslant N^3 - 1$, $1 \leqslant b \leqslant N^2 - 1$, $1 \leqslant c \leqslant N - 1$. Skup $\overline{K}$ ima

$$(N^3 - 1) \cdot (N^2 - 1) \cdot (N - 1) = N^6 - N^5 - N^4 + N^2 + N - 1$$

elemenata. Primijetimo da za svaki dobar $m \in S$ da postoji $(a, b, c) \in \overline{K}$ takav da je $m = a^2 + b^3 + c^6$. Kako skup S ima N^6 elemenata, zaključujemo da je barem

$$N^5 + N^4 - N^2 - N + 1 = (N^3 - 1)(N + 1)N + 1 \geqslant 1 \cdot N(N + 1) + 1 = N^2 + N + 1$$

elemenata skupa S loše.

Ovime smo za neki $N \geqslant 2$ dokazali da postoji barem $N^2 + N + 1$ loših brojeva u skupu $\{1, 2, \ldots, N^6\}$. Kako N može biti proizvoljno velik, zaključujemo da je beskonačno mnogo loših brojeva.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 11. svibnja 2022.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve prirodne brojeve m i n takve da je $2^{n!} = m^3 + 37$.

Prvo rješenje.

Za $n = 1$ dobijemo $2 = m^3 + 37$, što očito ne može vrijediti ni za koji prirodan broj m.

Za $n = 2$ dobijemo $4 = m^3 + 37$, što također ne može vrijediti.

Slijedi da je $n \geqslant 3$. Budući da je u tom slučaju $n!$ djeljivo s 3, izraz $2^{n!}$ je kub prirodnog broja, što znači da je i $m^3 + 37$ također kub prirodnog broja.

Kako je $2^{n!} = m^3 + 37 > m^3$, mora vrijediti $2^{n!} \geqslant (m+1)^3$, tj.

$$m^3 + 37 \geqslant (m+1)^3 \implies m^2 + m \leqslant 12.$$

Zadnju nejednakost zadovoljavaju samo prirodni brojevi manji od ili jednaki 3.

Za $m = 1$ je $m^3 + 37 = 38$, što nije kub prirodnog broja.

Za $m = 2$ je $m^3 + 37 = 45$, što također nije kub prirodnog broja.

Za $m = 3$ je $m^3 + 37 = 64 = 2^6$, pa slijedi $n! = 6$, tj. $n = 3$.

Dakle, jedino rješenje je $m = 3, n = 3$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, zaključujemo da je $n \geqslant 3$ i stoga $2^{n!}$ mora biti kub prirodnog broja. Označimo taj kub s N^3.

Ako prebacimo m^3 na lijevu stranu jednadžbe, dobit ćemo razliku kubova, pa će vrijediti

$$(N - m)(N^2 + Nm + m^2) = 37.$$

Budući da je 37 prost broj, a $N^2 + Nm + m^2 \geqslant 3$ (jer su N i m prirodni brojevi), jedina mogućnost je

$$N - m = 1 \qquad \text{i} \qquad N^2 + Nm + m^2 = 37.$$

Iz prve jednadžbe slijedi $N = m + 1$, iz čega uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo

$$(m+1)^2 + m(m+1) + m^2 = 37, \qquad \text{tj.} \quad m^2 + m - 12 = 0.$$

Rješenja gornje kvadratne jednadžbe su 3 i -4, ali budući da je m prirodan broj, uzimamo u obzir samo rješenje $m = 3$. Za $m = 3$ je $m^3 + 37 = 64 = 2^6$, pa slijedi $n! = 6$, tj. $n = 3$.

Dakle, jedino rješenje je $m = 3, n = 3$.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da za sve $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(f(x)+1)\,(f(y)+1) = (x+1)\,(f(y-1)+1) + f(x+1).$$

Rješenje.

Uvrstimo li $x = 0$, $y = 1$, dobijemo

$$(f(0)+1)(f(1)+1) = f(0)+1+f(1),$$

iz čega slijedi $f(0)f(1) = 0$. Stoga zaključujemo da je $f(0) = 0$ ili $f(1) = 0$.

Pretpostavimo prvo da je $f(1) = 0$. Uvrstimo li $x = y = 1$, dobijemo

$$1 = 2(f(0)+1) + f(2) = 2f(0) + 2 + f(2) \geqslant 2,$$

gdje zadnja nejednakost vrijedi zbog toga što funkcija f poprima vrijednosti u nenegativnim cijelim brojevima, tj. $f(0), f(2) \geqslant 0$. Time smo došli do kontradikcije, pa slijedi $f(0) = 0$.

Ako sad uvrstimo $x = 0$, dobijemo da za svaki prirodan y vrijedi

$$f(y) = f(y-1) + f(1).$$

Dokažimo indukcijom da vrijedi $f(n) = nf(1)$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Baza indukcije slijedi iz $f(0) = 0$. Pretpostavimo da tvrdnja $f(n) = nf(1)$ za neki prirodan n. Tada uvrštavanjem $y = n+1$ u gornju jednakost, dobivamo

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1),$$

čime je tvrdnja indukcije dokazana.

Konačno, uvrstimo $x = y = 1$ u početnu jednakost, te dobivamo

$$(f(1)+1)^2 = 2 + 2f(1)$$

iz čega slijedi $f(1)^2 = 1$, pa je $f(1) = 1$ (jer mora biti $f(1) \geqslant 0$).

Dakle, jedini kandidat za rješenje je funkcija $f(x) = x$. Provjerom utvrđujemo da to zaista i jest rješenje.

Zadatak A-4.3.

Dani su kompleksni brojevi a, b i c za koje polinom

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

ima svojstvo da je apsolutna vrijednost svake njegove nultočke jednaka 1.

Dokaži da i polinom

$$Q(x) = x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c|$$

ima isto svojstvo.

Rješenje.

Neka su z_1, z_2 i z_3 nultočke polinoma $P(x)$. Iz uvjeta zadatka slijedi je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Iz Vièteovih formula slijedi $c = -z_1 z_2 z_3$, odakle je

$$|c| = |z_1||z_2||z_3| = 1.$$

Također iz Vièteovih formula slijedi $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$ i $b = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$, pa je

$$\begin{aligned}
-\overline{a} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} \\
&= \frac{|z_1|^2}{z_1} + \frac{|z_2|^2}{z_2} + \frac{|z_3|^2}{z_3} \\
&= \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \\
&= \frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_2 z_3} \\
&= \frac{b}{c}.
\end{aligned}$$

Uspoređujući apsolutne vrijednosti, dobivamo

$$|a| = |-a| = \left|\frac{b}{c}\right| = \frac{|b|}{|c|} = |b|.$$

Sada polinom $Q(x)$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x^3 + |a|x^2 + |a|x + 1 \\
&= (x+1)(x^2 - x + 1) + |a|x(x+1) \\
&= (x+1)(x^2 + (|a|-1)x + 1).
\end{aligned}$$

Očito je -1 jedna nultočka polinoma $Q(x)$ (i njezina apsolutna vrijednost jest 1), a druge dvije su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + tx + 1 = 0$, gdje je $t := |a| - 1$.

Iz nejednakosti trokuta slijedi da je $|a| = |z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| = 3$. Dodatno s $|a| \geqslant 0$, zaključujemo $-1 \leqslant t \leqslant 2$.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2 + tx + 1 = 0$ je $t^2 - 4$, što je nepozitivan broj (zbog $t \in [-1, 2]$). Njezina rješenja stoga iznose

$$\frac{-t \pm i\sqrt{4 - t^2}}{2}.$$

Za njihove apsoilutne vrijednosti računamo

$$\left|\frac{-t \pm i\sqrt{4-t^2}}{2}\right|^2 = \left(\frac{-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)^2 = \frac{t^2 + 4 - t^2}{4} = 1.$$

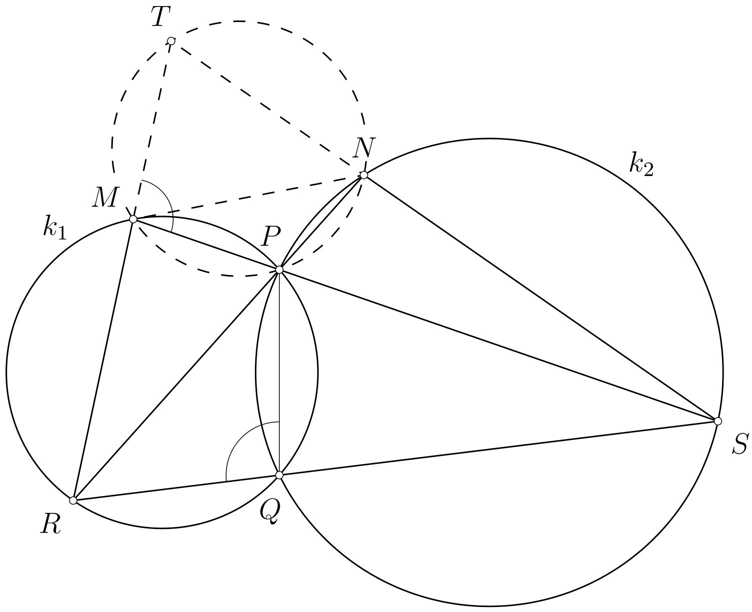
Dobili smo da sve tri nultočke polinoma $Q(x)$ imaju apsolutnu vrijednost jednaku 1, što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-4.4.

Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama P i Q. Pravac koji prolazi točkom Q siječe kružnice k_1 i k_2 još u točkama R i S, redom. Pravac SP siječe kružnicu k_1 još u točki M, a pravac RP siječe kružnicu k_2 još u točki N. Neka je T sjecište pravaca RM i SN.

Dokaži da je trokut TMN jednakostraničan ako i samo ako je pravac MN zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2.

Rješenje.



Iz tetivnosti četverokuta $RMPQ$ i $SQPN$ slijedi

$$\sphericalangle PQR = 180^\circ - \sphericalangle RMP = \sphericalangle PMT,$$
$$\sphericalangle PQS = 180^\circ - \sphericalangle PNS = \sphericalangle TNP.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi

$$\sphericalangle PMT + \sphericalangle TNP = 180^\circ,$$

odakle je četverokut $TMPN$ tetivan.

Dokažimo sljedeću tvrdnju: pravac MN tangenta je na kružnicu k_1 ako i samo ako vrijedi $\sphericalangle MTN = \sphericalangle NMT$.

Uvjet tangencijalnosti pravca MN na kružnicu k_1, prema poučku o kutu između tetive i tangente, ekvivalentan je jednakosti

$$\sphericalangle NRM = \sphericalangle PMN.$$

U trokutima MNP i RMN kut pri vrhu N je zajednički. Zato vrijedi $\sphericalangle NPM + \sphericalangle PMN = \sphericalangle RMN + \sphericalangle NRM$. To je dovoljno da zaključimo da gornja jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\sphericalangle NPM = \sphericalangle RMN.$$

Kutovi $\sphericalangle MTN$ i $\sphericalangle NPM$ su nasuprotni kutovi u tetivnom četverokutu $TMPN$, a kutovi $\sphericalangle NMT$ i $\sphericalangle RMN$ zajedno čine ispružen kut. Zaključujemo da je gornja jednakost ekvivalentna tvrdnji

$$\sphericalangle MTN = \sphericalangle NMT.$$

Nizom ekvivalentnih tvrdnji zaključujemo da je pravac MN tangenta na kružnicu k_1 zaista ako i samo ako vrijedi $\sphericalangle MTN = \sphericalangle NMT$, što smo i htjeli dokazati. Analogno možemo zaključiti da je pravac MN tangenta na kružnicu k_2 ako i samo ako vrijedi $\sphericalangle MTN = \sphericalangle TNM$.

Ti zaključci zajedno daju da je pravac MN zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2 ako i samo ako vrijede jednakosti $\sphericalangle MTN = \sphericalangle NMT$ i $\sphericalangle MTN = \sphericalangle TNM$, što vrijedi ako i samo ako je trokut TMN jednakostraničan, što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-4.5.

Dana je ploča dimenzija 2020×2022. Za dva polja te ploče kažemo da su *susjedna* ako imaju zajedničku stranicu ili se nalaze na početku i kraju istog retka ili stupca. Dakle, svako polje ima točno četiri susjedna polja.

Viktor u svakom koraku bira jedno polje ploče i na ploču postavlja pet žetona: po jedan na odabrano polje i na svako polje susjedno odabranom. Nakon konačnog broja takvih koraka, na svakom polju nalazi se točno d žetona.

Odredi najmanji mogući d.

Rješenje.

Reći ćemo da je na nekom polju izveden *potez* ako je Viktor izabrao to polje ploče, te stavio žeton na to polje i četiri njemu susjedna polja.

Dokazat ćemo da je najmanji mogući d jednak 5. Taj se broj žetona može postići tako što će Viktor izvesti potez na svakom polju točno jednom. Time smo na svako polje ploče jednom stavili žeton kada smo izveli potez na tom polju, te još četiri puta kada smo izveli potez na nekom njegovom susjedu.

Dokažimo sada da je nužno $d \geqslant 5$. Pretpostavimo da nakon konačno mnogo poteza se na svakom polju ploče nalazi točno d žetona.

Obojimo ploču u 5 boja tako da svaki peti redak obojimo u istu boju. Označimo boje prvih pet redaka s $1, 2, 3, 4, 5$, redom. Za indeks $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, označimo x_i ukupan broj poteza izvedenih na svim poljima boje i.

U svakom retku nalazi se 2022 polja, a bojom i obojeno je 404 redaka. Zato je ukupan broj žetona koji se nalaze u svim poljima obojenih bojom i jednak $d \cdot 2022 \cdot 404$. S druge strane, na polja obojena bojom i postavili bismo 3 žetona svakim potezom izvedenim na polju obojenom bojom i, te po jedan žeton svakim potezom izvedenim na polju obojenom bojom $i-1$ i $i+1$.

Zato zaključujemo da za svaki i vrijedi jednakost

$$x_{i-1} + 3x_i + x_{i+1} = d \cdot 2022 \cdot 404,$$

gdje smo poistovjetili $x_0 = x_5$, te $x_6 = x_1$. Prosumirajmo svih 5 dobivenih jednakosti, i podijelimo dobiveno s 5. Dobivamo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = d \cdot 2022 \cdot 404.$$

Sada oduzmimo zadnju jednakost s prethodno 5 dobivenih. Dobivamo sustav 5 jednadžbi s 5 nepoznanica:

$$\begin{aligned}
x_4 - 2x_1 + x_3 &= 0, \\
x_5 - 2x_2 + x_4 &= 0, \\
x_1 - 2x_3 + x_5 &= 0, \\
x_2 - 2x_4 + x_1 &= 0, \\
x_3 - 2x_5 + x_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Dokažimo da je jedino rješenje ovog sustava u nenegativnim cijelim brojevima kada su svi brojevi x_i međusobno jednaki. Bez smanjenja općenitosti, neka je x_1 najveći među njima. Tada iz prve jednakosti sustava dobivamo

$$x_4 + x_3 = 2x_1 \geqslant x_3 + x_4,$$

gdje jednakost vrijedi samo ako je $x_1 = x_3 = x_4$. Sada iz treće jednakosti sustava dobivamo

$$x_5 = 2x_3 - x_1 = x_1,$$

a iz četvrte

$$x_2 = 2x_4 - x_1 = x_1.$$

Time smo dobili da su svi x_i, za $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, međusobno jednaki. Za njihov zbroj vrijedi

$$5x_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = d \cdot 2022 \cdot 404.$$

Kako je lijeva strana jednakosti djeljiva s 5, mora biti i desna. To je moguće tek ako je $5 \mid d$, a kako je d prirodan, posebno vrijedi $d \geqslant 5$.

Dakle, najmanji mogući takav d je jednak 5.