HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 22. svibnja 2021.

Zadatak 1.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $ab + bc + ca = 1$.

Dokaži da je

$$\frac{4}{a+b+c} \leqslant (a+b)(c\sqrt{3}+1).$$

Prvo rješenje.

Uvedimo oznaku $u = a + b$. Željena nejednakost je ekvivalentna s

$$u(u+c)(1+c\sqrt{3}) \geqslant 4.$$

Fiksiramo li pozitivan u, funkcija $f(x) = u(x+u)(1+x\sqrt{3})$ je kvadratna s pozitivnim vodećim koeficijentom i dvije strogo negativne nultočke, odnosno strogo rastuća na $\mathbb{R}^+$. Zbog toga je dovoljno provjeriti da nejednakost vrijedi za najmanji mogući c (uz fiksan u).

Prema A-G nejednakosti vrijedi

$$1 = ab + cu \leqslant \frac{u^2}{4} + cu = u\left(c + \frac{u}{4}\right),$$

odnosno

$$c \geqslant \frac{1}{u} - \frac{u}{4}.$$

Razlikujemo 2 slučaja. Ako je $u \geqslant 2$ nejednakost očito vrijedi.

U slučaju $u < 2$ dovoljno je provjeriti da nejednakost vrijedi za $c = \frac{1}{u} - \frac{u}{4}$. Zaista, nejednakost

$$0 \leqslant u(c+u)(1+c\sqrt{3}) - 4$$

je ekvivalentna s

$$0 \leqslant \left(u^2 + 1 - \frac{u^2}{4}\right)\left(u + \sqrt{3} - \frac{u^2}{4}\sqrt{3}\right) - 4u = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)\left(\frac{u}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

što vrijedi jer je $0 < u < 2$.

Drugo rješenje.

Poznato je da je $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, stoga je $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca) = 3$, što znači da je $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$. Sada je

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b)(c\sqrt{3}+1) &= (a+b+c)(a+b)c\sqrt{3} + (a+b+c)(a+b)\\ &\geqslant 3c(a+b) + a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc\\ &\geqslant 4(ac+bc+ab) = 4.\end{aligned}$$

Zadatak 2.

Na svakom polju ploče dimenzija $n \times n$ nalazi se po jedna žarulja. Na početku su neke žarulje upaljene, a neke ugašene. U svakom koraku biramo kvadrat 2×2 ili 3×3 te svim žaruljama u tom kvadratu promijenimo stanje (upaljene žarulje ugasimo, a ugašene upalimo).

Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji raspored žarulja koje ne možemo sve ugasiti konačnim nizom takvih koraka.

Rješenje.

Obojimo sva polja tablice crno ili bijelo tako da je svaki treći stupac obojan bijelom bojom, te da je ukupno parno stupaca obojano crnom bojom.

Ukoliko n daje ostatak 0 ili 2 modulo 3 možemo bojati $CCBCCB...$, a ukoliko n daje ostatak 1 modulo 3 bojamo stupce $BCCBCC...B$.

Primijetimo da svakim 2×2 potezom mijenjamo stanje žarulja na 2 ili 4 crnih polja, te da svakim 3×3 potezom mijenjamo stanje žarulja na 6 crnih polja. Zaključujemo da je nakon svakog poteza parnost broja crnih polja na kojima je žarulja upaljena jednaka.

Krenemo li sa samo jednom upaljenom žaruljom na crnom polju, vidimo da nikad ne možemo postići da su sve žarulje ugašene.

Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ konveksni četverokut u kojem je $\sphericalangle B > 90°$, $\sphericalangle D > 90°$ te $\sphericalangle A = \sphericalangle C$. Neka su E i F redom točke osnosimetrične točki A u odnosu na pravce BC i CD. Neka dužine $\overline{AE}$ i $\overline{AF}$ sijeku pravac BD redom u točkama K i L.

Dokaži da se kružnice opisane trokutima BKE i FLD diraju.

Rješenje.

SLIKA!!

Neka je A' osnosimetrična slika točke A s obzirom na pravac BD. Budući da je B na simetrali dužine $\overline{AE}$ imamo $\sphericalangle EAB = \sphericalangle BEA$.

$$\sphericalangle BA'K = \sphericalangle BAK = \sphericalangle BEA.$$

Stoga je A' na kružnici opisanoj trokutu $\triangle BKE$. Analogno, A' je i na kružnici opisanoj trokutu $\triangle FLD$.

Primijetimo da je

$$\sphericalangle AKL + \sphericalangle KLA = 180° - \sphericalangle KAL = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BA'D.$$

Odaberimo točku P na dužini $\overline{BD}$ takvu da je $\sphericalangle BA'P = \sphericalangle AKL = \sphericalangle AKB$. Sada imamo da je $\sphericalangle PA'B = \sphericalangle AKB = \sphericalangle A'KB$, pa po poučku o kutu između tangente i tetive dobivamo da je pravac PA' tangenta na kružnicu opisanu trokutu $\triangle BKE$. Budući da je $\sphericalangle PA'D = \sphericalangle KLA$, analogno slijedi da je pravac PA' tangenta na kružnicu opisanu trokutu $\triangle FLD$. Ovo pokazuje da se ove dvije kružnice diraju u točki A'.

Zadatak 4.

Za svaki prost broj p negdje u svemiru postoji planet $\mathcal{P}_p$ u čijem se oceanu nalazi točno p otoka, $O_1, O_2, \ldots, O_p$. Između otoka O_m i O_n (za $m \neq n$) postoji most ako i samo ako je broj $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$ djeljiv s p. S mosta nije moguće prijeći direktno na drugi most već samo na otok.

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p za koje na planetu $\mathcal{P}_p$ nije moguće sa svakog otoka doći na svaki drugi krećući se samo po otocima i mostovima.

Rješenje.

Na mostu između otoka O_m i O_n ucrtajmo strelicu od O_m prema O_n ako $p \mid m^2 - n + 1$. Primijetimo da za svaki broj $m \in \{1, 2, \ldots, p\}$ postoji jedinstven broj $o_m \in \{1, 2, \ldots, p\}$ takav da $p \mid m^2 - o_m + 1$, to je naprosto ostatak pri dijeljenju broja $m^2 + 1$ brojem p. Ukoliko je $o_m = m$, onda niti jedna strelica nije usmjerena od otoka O_m prema nekom drugom otoku. Dakle, postoji najviše p strelica, što znači da postoji i najviše p mostova.

Za prost broj p ćemo reći da je *dobar* ako postoji neki prirodan broj n takav da $p \mid n^2 - n + 1$. Primijetimo da postoji beskonačno mnogo dobrih prostih brojeva p. Pretpostavimo suprotno, tj. da su samo brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dobri. Neka je $P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, tada broj $P^2 - P + 1$ nije djeljiv ni s jednim od brojeva $p_1, p_2, \ldots, p_k$, pa postoji još barem jedan dobar prost broj p, što je kontradikcija.

Ako je p dobar prost broj, onda postoji $m \in \{1, 2, \ldots, p\}$ takav da $p \mid m^2 - m + 1$, što znači da niti jedna strelica nema početak na otoku O_m. Primijetimo da tada

$$p \mid (p + 1 - m)^2 - (p + 1 - m) + 1 = p(p - 2m + 1) + m^2 - m + 1.$$

Pretpostavimo da je $m = p + 1 - m$, što znači da je $m = \dfrac{p+1}{2}$. Tada

$$p \mid \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \frac{p+1}{2} + 1 = \frac{p^2 + 3}{4},$$

odnosno $p \mid 3$, što znači da je $p = 3$.

Dakle, ako je $p > 3$ dobar prost broj, onda postoje dva različita otoka O_m i O_{p+1-m} na kojima niti jedna strelica nema početak. To znači da postoji najviše $p - 2$ strelica, odnosno, da postoji najviše $p - 2$ mostova.

Ako su svi otoci međusobno povezani nekim nizom otoka, onda mostova mora biti barem $p - 1$.

Dakle, ako je $p > 3$ dobar prost broj, onda postoje neka dva otoka koja nisu povezana nekim nizom mostova. Pokazali smo da dobrih prostih brojeva ima beskonačno mnogo, čime smo gotovi.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 23. svibnja 2021.

Zadatak 1.

Odredi sve polinome P s realnim koeficijentima takve da izraz

$$P(x+3y)+P(3x-y)$$

ima istu vrijednost za sve realne brojeve x, y za koje je $x^2+y^2=1$.

Rješenje.

Primijetimo da je preslikavanje $(x,y)\to(x+3y,3x-y)$ bijekcija među skupovima

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}\leftrightarrow\{(x,y)\in\mathbb{R} : x^2+y^2=10\}$$

Inverzna funkcija je $(a,b)\to\left(\frac{a+3b}{10},\frac{3a-b}{10}\right)$.
Zadatak se sada svodi na traženje svih polinoma takvih da izraz

$$P(x)+P(y)$$

ima istu vrijednost za sve realne brojeve x i y za koje je $x^2+y^2=10$.
Neka je P jedan takav polinom. Označimo s A skup $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=10\}$. Primijetmo da je $(x,y)\in A$ ako i samo ako je $(x,-y)\in A$, te vrijedi

$$P(x)+P(y)=P(x)+P(-y),\forall(x,y)\in A$$

odnosno

$$P(y)-P(-y)=0,\forall y\in[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$$

Budući da je lijeva strana prethodne nejednakost polinom, i da ima beskonačno nultočaka, zaključujemo da je P parna funkcija. Sada znamo da postoji polinom R takav da je $P(x)=R(x^2)$. Neka je $C\in\mathbb{R}$ takav da je $P(x)+P(y)=C,\forall(x,y)\in A$. Tada vrijedi

$$C=P(x)+P(y)=R(x^2)+R(y^2)=R(x^2)+R(10-x^2),\forall(x,y)\in A$$

Slično kao i ranije zaključujemo da je $C=R(x)+R(10-x),\forall x\in\mathbb{R}$, odnosno $C=R(5+x)+R(5-x),\forall x\in\mathbb{R}$. Definirajmo polinom $T(x)=R(5+x)-\frac{C}{2}$. Iz prethodnog identiteta direktno dobivamo da je T neparna funkcija, pa postoji polinom Q takav da je $T(x)=xQ(x^2),\forall x\in\mathbb{R}$. Dobivamo sljedeći nužan uvjet na P:

$$P(x)=R(x^2)=T(x^2-5)+\frac{C}{2}=(x^2-5)Q((x^2-5)^2)+\frac{C}{2}$$

Direktnom provjerom vidimo da svi polinomi ovog oblika zadovoljavaju uvjete zadatka.

Zadatak 2.

Pravilni mnogokut $\mathcal{P}$ ima 100 vrhova od kojih je 41 crne, a preostalih 59 bijele boje.

Dokaži da postoje 24 međusobno disjunktna konveksna četverokuta čiji su vrhovi vrhovi od $\mathcal{P}$ te svaki od njih ima neparan broj crnih vrhova.

Rješenje.

Za četverokut ćemo reći da je *dobar* ako je konveksan i ako ima neparan broj vrhova crne boje.

Tvrdnja. Neka je n prirodan broj. Ako konveksni mnogokut $\mathcal{P}$ ima $4n+1$ vrhova od kojih je svaki obojen crnom ili bijelom bojom i to tako da ih je barem n crnih i barem n bijelih, onda postoji n međusobno disjunktnih dobrih četverokuta čiji vrhovi su vrhovi od $\mathcal{P}$.

Danom pravilnom 100-kutu izbacimo proizvoljna 3 vrha i primijenimo tvrdnju za $n = 24$, čime smo gotovi.

Dokaz tvrdnje. Provodimo ga matematičkom indukcijom po n.

Tvrdnja za $n = 1$ je očita. Naime, ako peterokut ima paran broj crnih vrhova odbacimo jedan i preostali četverokut je dobar. U suprotnom odbacimo jedan bijeli vrh i također smo gotovi.

Pretpostavimo da je $n > 1$. Neka je b broj bijelih vrhova, a c broj crnih. Znamo da je

$$b \geqslant n, \quad c \geqslant n \quad \text{i} \quad b + c = 4n + 1.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $b > c$, tada je

$$2n + 1 \leqslant b \leqslant 3n + 1 \qquad \text{i} \qquad n \leqslant c = 4n + 1 - b \leqslant 2n.$$

Tvrdimo da je moguće pronaći 4 uzastopna vrha od kojih su 3 obojena bijelom bojom, a jedan crnom. Dokažemo li to, tvrdnja je dokazana po principu matematičke indukcije. Naime, tada je četverokut određen s ta 4 vrha dobar, a na preostalih $4(n-1)+1$ vrhova možemo primijeniti tvrdnju za $n - 1$.

Promotrimo sve moguće grupe od 4 uzastopna vrha na $\mathcal{P}$. Kako bijelih vrhova ima više nego crnih, postoji grupa u kojoj je više bijelih nego li crnih vrhova. Ukoliko je u toj grupi točno 3 bijela vrha gotovi smo. Ukoliko je 4, pomičimo našu grupu od 4 uzastopna vrha u smjeru kazaljke na satu sve dok ne dođemo do prvog crnog vrha. U tom trenutku smo pronašli grupu od 4 uzastopna vrha od kojih su 3 bijela i 1 crni. Ovime smo dokaz priveli kraju.

Zadatak 3.

Dan je trokut ABC takav da je $|AC| = |BC|$ i točka D na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|AD| < |BD|$. Točke P i Q su redom nožišta okomica iz točke D na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Simetrala dužine $\overline{PQ}$ siječe $\overline{CP}$ u točki E. Kružnice opisane trokutima ABC i PQC sijeku se u točkama C i F.

Ako su točke E, F i Q kolinearne, dokaži da je $\sphericalangle ACB$ pravi kut.

Rješenje.

SLIKA!!

Nazovimo kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ k_1, a kružnicu upisanu trokutu $\triangle CPQ$ k_2, te s M označimo polovište dužine $\overline{AB}$.

Primijetimo da je

$$\sphericalangle CMD = \sphericalangle CQD = \sphericalangle CPD$$

Iz ovoga zaključujemo da točke M i D leže na k_2, kojoj je $\overline{CD}$ promjer.

Budući da je točka E na simetrali dužine $\overline{PQ}$, imamo da je $\sphericalangle EPQ = \sphericalangle EQP$. Računamo

$$\begin{aligned}
\sphericalangle CPF &= \sphericalangle QPF - \sphericalangle QPC \\
&= (180^\circ - \sphericalangle QCF) - \sphericalangle PQF \\
&= (180^\circ - \sphericalangle BCF) - \sphericalangle PCF \\
&= \sphericalangle BAF - \sphericalangle ACF \\
&= \sphericalangle BAF - \sphericalangle ABF \\
&= (\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAF) - (\sphericalangle ABC - \sphericalangle CBF) \\
&= 2\sphericalangle CAF.
\end{aligned}$$

Iz poučka o obodnom i središnjem kutu zaključujemo da je središte kružnice k_1 na kružnici k_2, no budući da ono također leži i na simetrali dužine $\overline{AB}$, zaključujemo da ono mora bili točka M ili točka C. Točka C to očito nije, iz čega dobivamo da je M središte od k_1. Sada zaključujemo da je trokut $\triangle ABC$ pravokutan, s pravim kutem pri vrhu C.

Zadatak 4.

Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a^5 + a^4 = 7^b - 1.$$

Prvo rješenje.

Danu jednakost zapišimo kao

$$(a^2 + a + 1)(a^3 - a + 1) = 7^b.$$

Ako je $a = 1$, onda je $7^b - 1 = 2$, što je nemoguće. Dakle, sigurno je $a > 1$, što znači da je i $a^3 - a + 1 > 1$, odnosno, postoje prirodni brojevi k i n takvi da je

$$a^2 + a + 1 = 7^k \qquad \text{i} \qquad a^3 - a + 1 = 7^n.$$

Zaključujemo da $7 \mid a^3-a+1$, provjerom svih mogućih ostataka pri dijeljenju sa 7 zaključujemo da $7 \mid a - 2$. Dakle, postoji nenegativni cijeli broj c takav da je $a = 7c + 2$. Uvrstimo li to dobivamo

$$7c^2 + 5c + 1 = 7^{k-1} \qquad \text{i} \qquad 49c^3 + 42c^2 + 11c + 1 = 7^{n-1}.$$

Ako je $k = 1$, onda je $c = 0$, odnosno $a = 2$, čime dobivamo rješenje $(a, b) = (2, 2)$.

Ako je $k > 1$, onda je nužno i $n > 1$. Tada iz prve jednakosti imamo da $7 \mid 5c + 1$, a iz druge da $7 \mid 4c + 1$, što je nemoguće.

Dakle, jedino rješenje je $(a, b) = (2, 2)$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, postoje prirodni brojevi k i n takvi da je

$$a^2 + a + 1 = 7^k \qquad \text{i} \qquad a^3 - a + 1 = 7^n.$$

Neka je $m = \min\{k, n\}$, tada

$$7^m \mid (a^3 - a + 1) - (a^2 + a + 1) = a(a + 1)(a - 2).$$

Brojevi $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$ i $a(a + 1)$ su relativno prosti pa zaključujemo da $7^m \mid a - 2$. Primijetimo da je

$$a^2 + a + 1 = (a - 2)(a + 3) + 7,$$

što znači da $7^m \mid 7$, odnosno da je $m = 1$. To je moguće jedino ako je $k = n = 1$, čime dobivamo jedino rješenje $(a, b) = (2, 2)$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 29. svibnja 2021.

Zadatak 1.

Odredi sve realne brojeve a za koje postoji funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x + f(y)) = f(x) + a\lfloor y \rfloor,$$

za sve realne brojeve x i y.

Napomena: $\lfloor y \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od y. Npr. $\lfloor 1.7 \rfloor = 1$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Rješenje.

Za $a = 0$ vidimo da funkcija $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ zadovoljava uvjet. Nadalje promatrajmo slučaj kada $a \neq 0$. Neka su y i z realni brojevi takvi da je $f(y) = f(z)$. Tada vrijedi

$$f(x) + a\lfloor y \rfloor = f(x + f(y)) = f(x + f(z)) = f(x) + a\lfloor z \rfloor$$

odnosno $\lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor$. Nazovimo ovo svojstvo *kvazi-injektivnost*. Uvrstimo li $(x, y) = (0, 0)$ dobijemo $f(f(0)) = f(0)$. Sada zbog

$$f((n + 1)f(0)) = f(nf(0) + f(0)) = f(nf(0))$$

induktivno slijedi da je $f(nf(0)) = f(0)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kvazi-injektivnost nam daje

$$\lfloor nf(0) \rfloor = \lfloor f(0) \rfloor$$

za svaki prirodan broj n pa slijedi $f(0) = 0$.

Sada primijetimo da je $f(f(1)) = a$.

Nadalje, uvrštavanjem $(x, y) = (-f(1), 1)$ imamo

$$0 = f(-f(1) + f(1)) = f(-f(1)) + a,$$

iz čega slijedi $f(-f(1)) = -a$. Uvrštavanjem $(x, y) = (a, -f(1))$ dobivamo

$$0 = f(a - a) = f(a + f(-f(1))) = f(a) + a\lfloor -f(1) \rfloor.$$

Dakle, $f(a) = -a\lfloor -f(1) \rfloor$. S druge strane, uvrštavanjem $(0, f(1))$ dobivamo

$$f(a) = f(f(f(1))) = a\lfloor f(1) \rfloor.$$

Sada zbog $-\lfloor f(1) \rfloor = \lfloor -f(1) \rfloor$ zaključujemo da je $f(1) \in \mathbb{Z}$, odnosno $f(a) = af(1)$.

Za prirodan broj n, uvrstimo $(na, f(1))$ i dobivamo

$$f((n + 1)a) = f(na + f(f(1))) = f(na) + af(1).$$

Indukcijom dobivamo $f(na) = naf(1)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Također, $f(f(n)) = an$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

U nastavku rješenja n će uvijek biti bilo koji prirodan broj.

Uvrštavanjem $(-na, f(n))$ dobivamo

$$0 = f(-na + f(f(n))) = f(-na) + a\lfloor f(n) \rfloor,$$

pa je $f(-na) = -a\lfloor f(n) \rfloor$.

Uvrštavanjem $(-f(n), n)$ dobivamo

$$0 = f(-f(n) + f(n)) = f(-f(n)) + an,$$

pa je $f(-f(n)) = -na$.

Uvrštavanjem $(na, -f(n))$ dobivamo

$$0 = f(na - na) = f(na + f(-f(n))) = f(na) + a\lfloor -f(n) \rfloor$$

Slično kao i za $f(1)$, zaključujemo da je $f(n) \in \mathbb{Z}$. Onda je $anf(1) = f(na) = af(n)$, pa je $f(n) = nf(1)$.

Sada razlikujemo dva slučaja u ovisnosti o predznaku od $f(1)$.

1. slučaj $f(1) > 0$:

Tada je $f(1) \in \mathbb{N}$ pa imamo $a = f(f(1)) = f(1)^2$

2. slučaj $f(1) < 0$:

Tada je $-f(1) \in \mathbb{N}$ pa imamo $-a = f(-f(1)) = -f(1)^2$.

U svakom slučaju je $a = f(1)^2$, odnosno a je kvadrat cijelog broja. Pokažimo da funkcija koja zadovoljava uvjet zadatka postoji kad god je a kvadrat cijelog broja.

Za $a = m^2$, gdje je m cijeli broj, lako vidimo da funkcija f definirana s $f(x) = m\lfloor x \rfloor$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ zadovoljava uvjet zadatka.

Zadatak 2.

Neka je N prirodan broj i neka je $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Neka su $a_{i,j}$ međusobno različiti realni brojevi takvi da za sve $i, j \in S$ vrijedi: ako je $i < j$, onda je

$$a_{i,k} < a_{j,k} \quad \text{i} \quad a_{k,i} < a_{k,j}, \qquad \text{za sve} \quad k \in S.$$

Neka je n prirodan broj takav da je $2(n-1)^2 < N$. Dokaži da postoje n-člani podskupovi $I, J \subset S$ takvi da vrijedi jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

- za sve $i, k \in I$ vrijedi: ako je $i < k$, onda je $a_{i,j} < a_{k,l}$, za sve $j, l \in J$,
- za sve $j, l \in J$ vrijedi: ako je $j < l$, onda je $a_{i,j} < a_{k,l}$, za sve $i, k \in I$.

Rješenje.

Zadatak 3.

Dan je konveksan četverokut $ABCD$ čije se dijagonale sijeku u točki P. Neka su X i Y točke odabrane tako da četverokuti $ABPX$, $CDXP$, $BCPY$ i $DAYP$ budu tetivni. Pravci AB i CD sijeku se u točki Q, pravci BC i DA u točki R, a pravci XR i YQ u točki Z. Dokaži da točke X, Y, Z i P pripadaju istoj kružnici.

Rješenje.

SLIKA!!

Zadatak 4.

Funkcija $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definira se na sljedeći način:

$$U(n) = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 1, \\ \alpha_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{p_k}, & \text{za } n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}, \text{gdje su } p_1, \ldots, p_k \text{ međusobno} \\ & \text{različiti prosti brojevi i } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Za $m \in \mathbb{N}$ neka je $U^{(m)}(n) = U(U(\ldots U(n) \ldots))$, pri čemu se U primjenjuje m puta.

Dokaži da za svaki prirodni broj A postoji prirodni broj B takav da je $U^{(m)}(A) = B$ za beskonačno mnogo prirodnih brojeva m.

Rješenje.

Za prirodan broj n, definiramo potpuno aditivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ tako da je $f(p) = p$ za svaki prost broj p i $f(mn) = f(m) + f(n)$ za sve prirodne brojeve m i n.

Dokažimo da je $f(U(n)) \leqslant f(n)$ za svaki prirodan broj n.

Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ onda je $f(U(n)) = \sum p_i f(\alpha_i)$, dok je $f(n) = \sum p_i \alpha_i$. Sad je dovoljno dokazati $f(k) \leqslant k$ za svaki prirodan broj k. Za to koristimo nejednakost $xy \geqslant x + y$ za sve prirodne brojeve $x, y \geqslant 2$. Naime, onda za bilo kojih r prostih brojeva $p_1, \ldots, p_r$ vrijedi

$$f(p_1 p_2 \ldots p_r) = p_1 + \ldots + p_r \leqslant p_1 p_2 + p_3 + \ldots + p_r \leqslant \ldots \leqslant p_1 p_2 \ldots p_r,$$

pa je tvrdnja dokazana, a onda je dokazana i tvrdnja $f(U(n)) \leqslant f(n)$.

Kako za svaki k postoji najviše konačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $f(n) \leqslant k$, zaključujemo da niz $(U^j(n))_j$ mora poprimiti neku vrijednost beskonačno puta.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 29. svibnja 2021.

Zadatak 1.

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija sa svojstvima:

(a) Postoji realan broj M takav da je $|f(x)| \leqslant M$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) Za svaki realan broj x vrijedi

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)=f\left(x\right)+f\left(x+\frac{5}{6}\right).$$

Pokaži da je funkcija f periodična, odnosno da postoji pozitivan realan broj T takav da je $f(x+T)=f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

Primijetimo da je

$$f(x)-f(x+\frac{1}{2})=f(x+\frac{1}{3})-f(x+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}),\forall x \in \mathbb{R}$$

pa vidimo da je $g(x):=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ periodična s periodom $\frac{1}{3}$.

Pokažimo da je f periodična s periodom 1.

$$f(x)-f(x+1)=g(x)+g(x+\frac{1}{2})$$

Posebno $h(x):=f(x)-f(x+1)$ je periodična s periodom 1. Slično vidimo

$$f(x)-f(x+2)=h(x)+h(x+1)=2h(x)=2\left(f(x)-f(x+1)\right)$$

Pokažimo matematičkom indukcijom da je $f(x)-f(x+n)=n\left(f(x)-f(x+1)\right),\forall x \in \mathbb{R},\forall n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja je očita za $n=1$. Pretpostavimo da vrijedi za neki n. Tada za $n+1$ imamo

$$\begin{aligned}
f(x)-f(x+n+1)&=f(x)-f(x+n)+f(x+n)-f(x+1)\\
&=n\left(f(x)-f(x+1)\right)+h(x+n)\\
&=n\left(f(x)-f(x+1)\right)+h(x)\\
&=(n+1)\left(f(x)-f(x+1)\right),
\end{aligned}$$

čime je korak indukcije dokazan.

Budući da je f omeđena funkcija, postoji pozitivan realan broj M takav da je $|f(x)| \leqslant M$ za svaki realan broj x. Onda nužno vrijedi i $|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)|+|f(y)| \leqslant 2M$ za sve realne brojeve x, y.

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ takav da $f(x) \neq f(x+1)$. Tada postoji prirodan broj n takav da je $|f(x)-f(x+n)=n|f(x)-f(x+1)|>2M$ pa dolazimo do kontradikcije, odnosno takav x ne može postojati. Zaključujemo da je f periodična funkcija s periodom 1.

Zadatak 2.

Za permutaciju $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ kažemo da je *uravnotežena* ako vrijedi

$$a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \dots \leqslant na_n.$$

Neka $S(n)$ označava broj uravnoteženih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

Odredi $S(20)$ i $S(21)$.

Rješenje.

Neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)$ uravnotežena permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$. Pokažimo da nužno vrijedi jedna od sljedeće dvije tvrdnje

(a) $a_n = n$,

(b) $a_{n-1} = n$ i $a_n = n - 1$.

Neka je $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takav da je $a_k = n$. Pretpostavimo da je $k < n - 1$.

Pretpostavimo još da je $a_n = k$. Tada imamo

$$kn = ka_k \leqslant (k+1)a_{k+1} \leqslant \dots \leqslant na_n = nk$$

Zaključujemo da su sve nejednakosti u gornjem identetu u stvari jednakosti. Sada zbog $(k+1)a_{k+1} = nk$ slijedi da $k + 1$ dijeli n, a zbog $(n-1)a_{n-1} = nk$ slijedi da $n - 1$ dijeli k, pa imamo nejednakosti $n \geqslant k + 1 \geqslant n - 1 + 1 = n$. Iz toga dobivamo $k = n - 1$, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, $a_n \neq k$.

Neka je $j \in \{k + 1, ..., n - 1\}$. Vrijedi

$$ja_j \geqslant ka_k = nk > jk,$$

pa je $a_j > k$.

Također, $na_n \geqslant ka_k = nk$ pa zbog toga što $a_n \neq k$ zaključujemo da je $a_n > k$, a i $a_k = n > k$. Sada je $a_j > k$, za sve $j \in \{k, k + 1, ..., n\}$, odnosno postoji $n - k + 1$ različit broj iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ koji je strogo veći od k, čime dolazimo do kontradikcije. Zaključujemo da vrijedi $k \geqslant n - 1$.

Ukoliko je $k = n - 1$ imamo $(n-1)n = (n-1)a_{n-1} \leqslant na_n$ pa je nužno $a_n = n - 1$. Time je tvrdnja dokazana.

Primijetimo da uravnotežene permutacije takve da je $a_n = n$ upravo odovaraju uravnoteženim permutacijama skupa $\{1, 2, ..., n - 1\}$, a uravnotežene permutacije takve da je $a_{n-1} = n$ i $a_n = n - 1$ odgovaraju uravnoteženim permutacijama skupa $\{1, 2, ..., n - 2\}$. Zbog ovoga dobivamo rekurzivnu relaciju

$$S(n + 2) = S(n + 1) + S(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Lako vidimo $S(1) = 1$ i $S(2) = 2$, pa u konačno mnogo koraka dobivamo $S(20) = 10946$ i $S(21) = 17711$.

Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ konveksni četverokut čije se dijagonale sijeku u točki E. Pravci AB i CD sijeku se u točki P, a pravci AD i BC u točki Q. Neka je X sjecište kružnica opisanih trokutima EBC i EDA različito od E, a Y sjecište kružnica opisanih trokutima EAB i ECD različito od E. Konačno, neka je W sjecište kružnica opisanih trokutima PBC i PDA različito od P. Dokaži da su trokuti WQY i WXP slični.

Rješenje.

SLIKA!!

Neka su A', B', C', D' polovišta dužina AB, BC, CD, DA redom.

Točka W je središte spiralne sličnosti koja prevodi trokut $\triangle A'B'D'$ u $\triangle PCD$.

Također, W je središte spiralne sličnosti koja prevodi trokut $\triangle D'A'C'$ u $\triangle QBC$.

Iz te dvije tvrdnje imamo $\triangle WDP \sim \triangle WD'A' \sim \triangle WQB$.

Također vrijedi $\triangle WRD \sim \triangle WBC$.

Iz tih sličnosti dobivamo $\sphericalangle QWY = \sphericalangle QWB + \sphericalangle BWY = \sphericalangle RWD + \sphericalangle DWX = \sphericalangle RWX$ i imamo sljedeće omjere:

$$\frac{|WR|}{|WD|} = \frac{|WB|}{|WQ|} \quad \text{te} \quad \frac{|WD|}{|WX|} = \frac{|WY|}{|WB|}.$$

Množenjem tih omjera dobivamo

$$\frac{|WR|}{|WX|} = \frac{|WY|}{|WQ|}.$$

Slijedi $\triangle WRX \sim \triangle WYQ$, što smo i htjeli dokazati.

Zadatak 4.

Neka $d(n)$ označava broj pozitivnih djelitelja broja n, a $s(n)$ zbroj svih pozitivnih djelitelja broja n. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je

$$4s(n) = 3d(n)^2 + 1.$$

Prvo rješenje.

Očito je $n = 1$ rješenje. Nadalje promatramo $n > 1$. Budući da je lijeva strana jednakosti parna, i desna mora biti parna pa zaključujemo da je $d(n)$ neparan, odnosno da je n potpun kvadrat. Neka je m prirodan broj takav da je $n = m^2$. Ako je k djelitelj od n, onda je i $\frac{n}{k}$ djelitelj od n, pa zaključujemo da m^2, uz m, ima $\frac{d(n)-1}{2}$ djelitelja većih od m i $\frac{d(n)-1}{2}$ djelitelja manjih od m. Budući da postoji samo $m-1$ prirodnih brojeva manjih od m, zaključujemo da je $\frac{d(n)-1}{2} \leqslant m-1$, odnosno

$$d(n) \leqslant 2m - 1$$

Jednakost vrijedi samo ako su svi brojevi $1, 2, ..., m$ djelitelji od n.

S druge strane, $s(n)$ možemo ograditi odozdo. Sve djelitelje koji nisu $1, m$ i m^2 možemo upariti te po AG nejednakosti slijedi $k + \frac{n}{k} \geqslant 2m$. Dobivamo

$$s(n) \geqslant 1 + m^2 + (d(n) - 2)m$$

Primijetimo da jednakost vrijedi ako i samo ako se u svakoj primijenjenoj AG nejednakosti postiže jednakost, a to je moguće samo ako je $d(n) = 3$. Koristeći pokazane nejednakosti, dobivamo

$$\begin{aligned}
4(1 + m^2 + (d(n) - 2)m) &\leqslant 4s(n) \\
&= 3d(n)^2 + 1 \\
&\leqslant 3(2m - 1)d(n) + 1 \\
&= 4md(n) + (2m - 3)d(n) + 1 \\
&\leqslant 4md(n) + (2m - 3)(2m - 1) + 1 \\
&= 4(1 + m^2 + (d(n) - 2)m).
\end{aligned}$$

Vidimo da u svim iskorištenim nejednakostima nužno vrijedi jednakost, odnosno nužno je $d(n) = 3$. Uvrštavanjem vidimo da je $s(n) = 7$, pa provjerom za $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ vidimo da je 4 jedino rješenje uz 1.

Dakle, rješenja su 1 i 4.

Drugo rješenje.

Isto kao u prvom rješenju primijetimo da je $d(n)$ neparan, odnosno da je n kvadrat prirodnog broja. Označimo li redom djelitelje od n sa $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{d(n)} = n$, možemo primijetiti da je $d_i \cdot d_{d(n)+1-i} = n$ za svaki $i \in \{1, 2, ..., d(n)\}$. Sada primjenom AG nejednakosti na svaki od tih parova dobivamo

$$4s(n) = 2\left((d_1 + d_{d(n)} + (d_2 + d_{d(n)-1}) + \ldots + (d_{d(n)} + d_1)\right) \geqslant 4d(n)\sqrt{n} \geqslant 3d(n)\sqrt{n} + 1$$

odnosno, kako je $4s(n) = 3d(n) + 1$, dobivamo

$$d(n) \geqslant \sqrt{n}.$$

Budući da je n kvadrat prirodnog broja, znamo da ima zapis sljedećeg oblika u rastavu na proste faktore:

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{2k_i}.$$

Zaključujemo da je $d(n) = \prod_{i=1}^{m}(2k_i + 1)$ i $\sqrt{n} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$.

Prethodna nejednakost postaje

$$\prod_{i=1}^{m}(2k_i + 1) \geqslant \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$$

odnosno

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{2k_i + 1}{p_i^{k_1}} \geqslant 1.$$

Promatrajmo izraz $\frac{2k+1}{p^k}$, gdje je k prirodan broj, a p prost broj. Očito za dva prosta broja $p < q$ vrijedi $\frac{2k+1}{p^k} > \frac{2k+1}{q^k}$. Također, imamo

$$\frac{2k + 1}{p^k} \leqslant \frac{2k + 3}{p^{k+1}} \Leftrightarrow p(2k + 1) \geqslant 2k + 3 \Leftrightarrow (p - 1)(2k + 1) \geqslant 2,$$

što vrijedi za sve p i k, pa vidimo da je $\frac{2k+1}{p^k}$ padajuće kako k raste

Ako n ima prost faktor p veći od 3, onda je pripadni faktor $\frac{2k+1}{p^k}$ manji ili jednak $\frac{2\cdot 1+1}{5} = \frac{3}{5}$.

Za prost faktor 3, pripadni faktor je manji ili jednak $\frac{2\cdot 1+1}{3} = 1$.

Za prost faktor 2, pripadni faktor je manji ili jednak $\frac{3}{2}$. Zaključujemo da n nema prosti faktor veći od 3. Nadalje, ako je eksponent uz 2 od n veći od 4, pripadni faktor je manji ili jednak $\frac{7}{8}$, što je nemoguće.

Također, ako je eksponent uz 3 od n veći od 2, pripadni faktor je manji ili jednak $\frac{5}{9}$, što je opet nemoguće.

Zaključujemo da je $n \in \{2^{2a}3^{2b} \mid a \leqslant 2, b \leqslant 1\}$. Direktnom provjerom svih 6 od tih mogućnosti dobivamo da su jedino $n = 1$ i $n = 4$ rješenja.