



## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe

Zagreb, 23. svibnja 2022.

1. Neka su  $a, b, c, d$  realni brojevi takvi da je

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 10, \\ ab + bc + cd + da &= 25, \\ abc + bcd + cda + dab &= 50.\end{aligned}$$

Dokaži da je tada  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 30$ .

2. Odredi sve prirodne brojeve  $m$  i  $n$  za koje je pravokutnu ploču s  $m$  redaka i  $n$  stupaca moguće obojiti tako da vrijede sljedeća tri uvjeta:

- u svakom retku broj crnih polja jednak je broju bijelih polja;
- ako se stupac i redak sijeku na bijelom polju, onda taj stupac i redak imaju jednak broj bijelih polja;
- ako se stupac i redak sijeku na crnom polju, onda taj stupac i redak imaju jednak broj crnih polja.

3. Neka su  $ABCD$  i  $AEFG$  pravokutnici takvi da su točke  $B, E, D, G$  na istom pravcu (tim redom). Neka je točka  $T$  sjecište pravaca  $BC$  i  $GF$  te neka je točka  $H$  sjecište pravaca  $DC$  i  $EF$ . Dokaži da su točke  $A, H$  i  $T$  kolinearne.

4. Nađi sve prirodne brojeve  $m$  i  $n$  takve da postoje prirodni brojevi  $x$  i  $y$  za koje je

$$x^2 + y^2 + 3xy = 11 \cdot 5^m \cdot 3^n.$$

Za takve prirodne brojeve  $m$  i  $n$ , odredi sve  $x$  i  $y$  koji zadovoljavaju gornju jednadžbu u ovisnosti o  $m$  i  $n$ .

**Vrijeme rješavanja: 4 sata**

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.**