HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe

Zagreb, 23. svibnja 2022.

Zadatak 1.

Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da je

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=10, \\ ab+bc+cd+da&=25, \\ abc+bcd+cda+dab&=50. \end{aligned}$$

Dokaži da je tada $a^2+b^2+c^2+d^2=30$.

Rješenje.

Dane jednakosti zapišimo u obliku

$$\begin{aligned} (a+c)+(b+d)&=10 \\ (a+c)\cdot(b+d)&=25 \\ ac(b+d)+bd(a+c)&=50. \end{aligned}$$

Brojevi $a+c$ i $b+d$ imaju pozitivan zbroj i pozitivan umnožak, pa su pozitivni. Iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine (AG-nejednakost) slijedi

$$(a+c)\cdot(b+d) \leqslant \left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2.$$

No, zbog danih uvjeta obje strane ove nejednakosti jednake su 25.

Poznato je da je u AG-nejednakosti ispunjena jednakost ako i samo ako su brojevi jednaki, pa zaključujemo da vrijedi $a+c=b+d$.

Slijedi $a+c=b+d=5$, pa iz posljednje jednakosti dobivamo $ac+bd=10$.

Sada možemo odrediti zbroj kvadrata promatranih brojeva:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2(a^2+c^2+2ac)&-2ac+(b^2+d^2+2bd)-2bd \\ &=(a+c)^2+(b+d)^2-2(ac+bd) \\ &=5^2+5^2-2\cdot 10=30. \end{aligned}$$

Napomena: Dokaz da je $a+c=b+d$ možemo provesti bez AG-nejednakosti. Zbog

$$(a+c)^2+(b+d)^2=(a+c+b+d)^2-2(a+c)\cdot(b+d)=10^2-2\cdot 25=50$$

vrijedi

$$(a+c-b-d)^2=(a+c)^2-2(a+c)(b+d)+(b+d)^2=50-2\cdot 25=0,$$

iz čega slijedi zaključak.

Zadatak 2.

Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je pravokutnu ploču s m redaka i n stupaca moguće obojiti tako da vrijede sljedeća tri uvjeta:

- u svakom retku broj crnih polja jednak je broju bijelih polja;
- ako se stupac i redak sijeku na bijelom polju, onda taj stupac i redak imaju jednak broj bijelih polja;
- ako se stupac i redak sijeku na crnom polju, onda taj stupac i redak imaju jednak broj crnih polja.

Rješenje.

Budući da je broj crnih i bijelih polja u svakom retku jednak, n mora biti paran i pišemo $n = 2k$.

Promotrimo prvi stupac. Ako u tom stupcu nema bijelih polja, onda m mora biti jednak k jer su sva polja crna i mora ih biti onoliko koliko ih ima u svakom retku. Slično, ako u tom stupcu nema crnih polja, onda je $m = k$.

Jedan primjer koji pokazuje da bilo koji par oblika $(m, n) = (k, 2k)$ zadovoljava sve uvjete možemo napraviti tako da sva polja u prvih k stupaca obojimo u crno, a sva polja u zadnjih k stupaca obojimo u bijelo.

Pretpostavimo da u prvom stupcu imamo barem jedno crno i barem jedno bijelo polje. Tada u tom stupcu mora biti točko k crnih i točno k bijelih polja, pa je $m = 2k$.

Da par oblika $(m, n) = (2k, 2k)$ zadovoljava sve uvjete za proizvoljan prirodni broj k možemo vidjeti, na primjer, tako da ploču obojimo šahovski ili tako da ploču podijelimo na četiri kvadrata $k \times k$, te da sva polja gornjeg-lijevog i donjeg-desnog kvadrata obojimo crno, a preostala bijelo.

Zadatak 3.

Neka su $ABCD$ i $AEFG$ pravokutnici takvi da su točke B, E, D, G na istom pravcu (tim redom). Neka je točka T sjecište pravaca BC i GF te neka je točka H sjecište pravaca DC i EF. Dokaži da su točke A, H i T kolinearne.

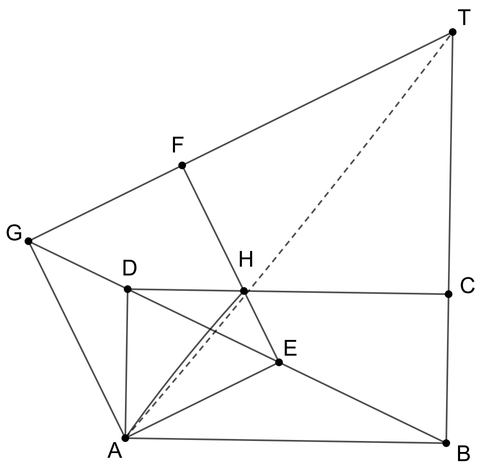
Rješenje.

Četverokut čija su dva nasuprotna kuta prava je tetivni četverokut. Takvi su npr. četverokuti $AEHD$ i $ABTG$.

Također uočavamo nekoliko parova paralelnih pravaca, npr. $AG \parallel EF$ i $AD \parallel BT$. Koristit ćemo jednakost odgovarajućih kutova uz presječnicu paralelnih pravaca.

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle TAD &= \sphericalangle ATB \quad \text{(kutovi uz presječnicu } AT\text{)}\\
&= \sphericalangle AGB \quad \text{(tetivni četverokut } ABTG\text{)}\\
&= \sphericalangle AGE \quad \text{(kolinearnost točaka } G, B, E\text{)}\\
&= \sphericalangle FEG \quad \text{(kutovi uz presječnicu } GE\text{)}\\
&= \sphericalangle HED\\
&= \sphericalangle HAD \quad \text{(tetivni četverokut } AEHD\text{)}
\end{aligned}$$



Iz jednakosti kutova $\sphericalangle TAD = \sphericalangle HAD$ zaključujemo da se polupravci AH i AT podudaraju, tj. da su točke A, H i T kolinearne.

Zadatak 4.

Nađi sve prirodne brojeve m i n takve da postoje prirodni brojevi x i y za koje je

$$x^2 + y^2 + 3xy = 11 \cdot 5^m \cdot 3^n.$$

Za takve prirodne brojeve m i n, odredi sve x i y koji zadovoljavaju gornju jednadžbu u ovisnosti o m i n.

Rješenje.

Budući da je n prirodan bro desna strana jednakosti je djeljiva s 3, a budući da je izraz $3xy$ također djeljiv s 3, zaključujemo da izraz $x^2 + y^2$ mora biti djeljiv s 3.

Kvadrati prirodnih brojeva pri dijeljenju s 3 daju ostatke 0 ili 1. Ostatak 0 daju kvadrati brojeva koji su djeljivi s 3, a ostatak 1 daju kvadrati brojeva koji nisu djeljivi s 3 (tj. koji daju ostatak 1 ili 2 pri dijeljenju s 3).

Zbog toga izraz $x^2 + y^2$ može biti djeljiv s 3 samo ako su i x i y djeljivi s 3. No, tada je lijeva strana jednadžbe djeljiva s 9 pa n mora biti barem 2.

Zapišemo li $x = 3x'$ i $y = 3y'$, te uvrstimo i podijelimo jednakost s 9 dobivamo

$$x'^2 + y'^2 + 3x'y' = 11 \cdot 5^m \cdot 3^{n-2}.$$

Ovaj način zaključivanja možemo ponavljati sve dok na desnoj strani jednakosti imamo djeljitelj 3. Također, iz prethodnih argumenata slijedi da desna strana ne može biti djeljiva s 3, a da nije djeljiva s 9. Dakle, u svakom koraku dijelimo s 9 sve dok je desna strana djeljiva s 3. To pokazuje da n mora biti paran broj.

Označimo $n = 2k$ za prirodni broj k. Tada je $x = 3^k \cdot a$ i $y = 3^k \cdot b$ za prirodne brojeve a i b. Mora vrijediti

$$a^2 + b^2 + 3ab = 11 \cdot 5^m.$$

Uočimo da vrijedi $a^2 + b^2 + 3ab = (a-b)^2 + 5ab$, pa jednakost zapravo glasi

$$(a-b)^2 + 5ab = 11 \cdot 5^m.$$

Zaključujemo da $(a-b)^2$ mora biti djeljivo s 5. Budući da je 5 prost broj, iz toga slijedi da 5 dijeli $a-b$, pa je $(a-b)^2$ zapravo djeljivo s 25.

Ako je $m \geqslant 2$, onda je desna strana jednakosti također djeljiva s 25, pa zaključujemo da $5ab$ mora biti djeljivo s 25, tj. 5 dijeli ab. Dakle, 5 dijeli barem jedan od brojeva a i b, ali znamo da oni daju isti ostatak pri dijeljenju s 5 pa zaključujemo da 5 dijeli i a i b.

Sada možemo zaključivati slično kao kod djeljivosti s 5 i dijeliti jednakost sa 25 sve dok na desnoj strani ili nemamo faktor 5 ili imamo samo jedan faktor 5. Prvi slučaj se dogodi ako je m paran broj, a drugi ako je n neparan.

Time smo sveli problem na dva slučaja. Ako je m paran broj, zapisujemo $m = 2\ell$, $a = 5^\ell \cdot c$ i $b = 5^\ell \cdot d$, te rješavamo jednadžbu

$$c^2 + d^2 + 3cd = 11.$$

Brojevi c i d su prirodni, pa ne mogu biti veći od 2 (jer bi izraz na lijevoj strani bio veći od 11), a ispisivanjem svih mogućnosti vidimo da su jedine mogućnosti $c = 1$, $d = 2$ ili $c = 2$, $d = 1$.

Dakle, za paran $m = 2\ell$ i paran $n = 2k$, rješenja su

$$(x, y) = (3^k \cdot 5^\ell, 2 \cdot 3^k \cdot 5^\ell), \qquad (x, y) = (2 \cdot 3^k \cdot 5^\ell, 3^k \cdot 5^\ell).$$

Ako je m neparan broj, zapisujemo $m = 2\ell - 1$, $a = 5^{\ell-1} \cdot c$ i $b = 5^{\ell-1} \cdot d$, te rješavamo jednadžbu

$$c^2 + d^2 + 3cd = 55.$$

U ovom slučaju također brojevi c i d ne mogu veći od 6 jer za $c > 6$ vrijedi $c^2 + 3cd > 36 + d^2 + 18d \geqslant 36 + 1 + 18 = 55$. Sada ispisujemo sve mogućnosti $c, d \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, te provjeramo kad je $c^2 + d^2 + 3cd = 55$. To je moguće jedino ako je $c = 1$ i $d = 6$ ili $c = 6$ i $d = 1$.

Dakle, za neparan $m = 2\ell - 1$ i paran $n = 2k$, rješenja su

$$(x, y) = (3^k \cdot 5^{ell-1}, 6 \cdot 3^k \cdot 5^{\ell-1}), \qquad (x, y) = (6 \cdot 3^k \cdot 5^{\ell-1}, 3^k \cdot 5^{\ell-1}).$$