

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

5. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnog rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Marin ima 7 kocaka od glinamola. Volumen najveće kocke je 64 cm^3 . Dvije kocke imaju duljine bridova za 1 cm kraće od brida najveće kocke, a preostale kocke imaju duljine bridova za 2 cm kraće od brida najveće kocke. Marin zgnječi glinamol od svih 7 kocaka i oblikuje kvadar. Na koliko različitih načina može oblikovati kvadar kojemu su duljine bridova izražene prirodnim brojevima u centimetrima?
2. Marta, Ana i Ivan izmjenjuju se u bacanju igraće kockice. Prva baca Marta, onda Ana pa Ivan. Nakon toga opet Marta i tako dalje u krug istim redom. Svaki od njih, kada je njegov red, baca kockicu jednom, sve dok ne dobije prvu „šesticu“. Nakon što dobije svoju prvu „šesticu“, igrač u svakom sljedećem bacanju, do kraja igre, kockicu baca više puta. Marta baca kockicu četiri, Ana šest, a Ivan osam puta. Igra je završila nakon 27 krugova. Kockica je ukupno bačena 152 puta. Koliko puta su kockicu mogle bacati Marta i Ana ako je Ivan bacio kockicu ukupno 48 puta?
3. Duljina stranice \overline{AC} pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ s pravim kutom u vrhu C jednaka je $\frac{3}{4}$ duljine stranice \overline{BC} , a duljina stranice \overline{AB} za 25 % je veća od duljine stranice \overline{BC} . Spajanjem trokuta $\triangle ABC$ i njegove osnosimetrične slike s obzirom na pravac AB nastaje lik opsega 16.8 cm. Koliki je opseg trokuta $\triangle ABC$?
4. Koliki je zbroj svih četveroznamenastih prirodnih brojeva kojima su sve znamenke neparne?
5. Zbroj godina obitelji koju čine otac, majka, dvije sestre blizanke i sin je 81. Otac je 4 godine stariji od majke. Za 4 godine broj očevih godina bit će dvostruko veći od zbroja godina njegove djece. Razlika u godinama sestara i brata je tri godine. Odredi broj godina svakog člana obitelji.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

6. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnog rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Zbroj prve i zadnje znamenke peteroznamenkastog broja s međusobno različitim znamenkama jednak je umnošku preostale tri znamenke. Koliko ima takvih brojeva?
2. Broj ekipa školske rukometne lige veći je od 18 i manji od 30. Tijekom sezone svaka ekipa sa svakom preostalom ekipom odigra po dvije utakmice, jednu kao „domaćin“ i jednu kao „gost“. U posljednjoj je sezoni 35 % ukupnog broja utakmica završilo pobjedom gostujuće ekipe. Odredi najmanji i najveći mogući broj utakmica u kojima je pobijedila gostujuća ekipa.
3. Koliko ima cijelih brojeva koji nisu djeljivi ni sa 3 ni sa 5 ni sa 7, a čija je apsolutna vrijednost manja od 2022?
4. Na stranicama pravokutnika $ABCD$ istaknuta su polovišta, redom, A_1 , B_1 , C_1 i D_1 . Potom su na stranicama četverokuta $A_1B_1C_1D_1$ istaknuta polovišta, redom, A_2 , B_2 , C_2 i D_2 koja su vrhovi četverokuta $A_2B_2C_2D_2$. Postupak je nastavljen tako da su svakom tako dobivenom četverokutu označena polovišta stranica i te su točke vrhovi novog četverokuta. Dokaži da je četverokut $A_7B_7C_7D_7$ romb. Izračunaj površinu četverokuta $A_7B_7C_7D_7$ ako je zbroj površina četverokuta $A_4B_4C_4D_4$, $A_5B_5C_5D_5$ i $A_6B_6C_6D_6$ jednak 189.
5. Duljine stranica trokuta prirodni su brojevi. Duljina jedne stranice je 100, a preostale su dvije kraće od nje. Koliko ima takvih, međusobno nesukladnih, trokuta?

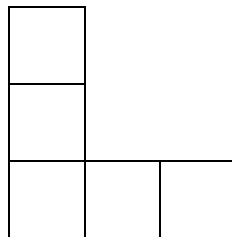
DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

7. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnog rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Neki troznamenkasti broj poveća se za 27 ako znamenke jedinica i desetica zamijene mjesta, a isti se broj smanji za 450 ako zamijene mjesta znamenke stotica i desetica. Što će se dogoditi s tim brojem ako mjesta zamijene znamenke stotica i jedinica?
2. Matej je član biciklističkog kluba te svakodnevno vozi bicikl do susjednog grada udaljenog 40 km. U subotu se do tog grada i nazad Matej vozio 3 sata i 12 minuta. U nedjelju je, zbog radova na cesti, Matej do tog grada bicikl vozio 12 minuta duže nego dan prije. Iz istog je razloga u povratku išao okolnim putem te je, vozeći subotnjom prosječnom brzinom, prešao 15 km više. Za koliko posto se u nedjelju smanjila njegova prosječna brzina u odnosu na onu subotnju?
3. Veličina jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ iznosi 30° . Ako je točka P polovište hipotenuze \overline{AB} , a točka S središte tom trokutu upisane kružnice, kolika je veličina kuta $\angle SPC$?
4. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je zbroj znamenaka broja $m \cdot (m + 3n)$ jednak 2022.
5. Svako polje ploče 10×10 bojimo u jednu od n boja. Na tu ploču postavljamo pločicu oblika kao na slici koja se sastoji od pet polja 1×1 , uz uvjet da postavljena pločica prekriva točno 5 polja ploče. Odredi najmanji prirodni broj n za koji postoji bojanje takvo da, kako god postavili pločicu, polja koja ona prekriva su obojana različitim bojama.



DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

8. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnog rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Nađi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva koji zadovoljavaju sustav jednažbi:

$$x(y + z) = 10$$

$$y(z + x) = 11$$

$$z(x + y) = 17$$

2. U pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ visina \overline{CD} na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na dva dijela tako da je $|AD| = 8$ i $|DB| = 18$. Neka je E polovište visine \overline{CD} . Pravac AE siječe katetu \overline{BC} u točki F . Izračunaj duljinu dužine \overline{EF} .
3. Omjer duljine osnovice jednakokračnog trokuta i polumjera tom trokutu upisane kružnice iznosi $4 : 1$. Koliki je omjer površine trokuta i upisanog mu kruga?
4. Dokaži da je površina svakog pravokutnog trokuta, kojem su duljine stranica prirodni brojevi, prirodan broj djeljiv s 6.
5. Odredi najveći prirodni broj n za koji se svako polje pravokutne ploče $5 \times n$ može obojiti u jednu od dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.