DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Marin ima 7 kocaka od glinamola. Volumen najveće kocke je 64 cm^3. Dvije kocke imaju duljine bridova za 1 cm kraće od brida najveće kocke, a preostale kocke imaju duljine bridova za 2 cm kraće od brida najveće kocke. Marin zgnječi glinamol od svih 7 kocaka i oblikuje kvadar. Na koliko različitih načina može oblikovati kvadar kojemu su duljine bridova izražene prirodnim brojevima u centimetrima?

Rješenje.
Volumen najveće kocke je 64 cm^3.

Volumen kocke jednak je $a \cdot a \cdot a$ gdje je a duljina brida kocke.

$64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ što znači da je duljina brida najveće kocke 4 cm.

Dvije manje kocke imaju duljinu brida 3 cm, pa je njihov volumen $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ cm^3.

Najmanje kocke imaju duljinu brida 2 cm, pa je njihov volumen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cm^3.

Ukupni volumen svih 7 kocaka iznosi $64 + 2 \cdot 27 + 4 \cdot 8 = 150$ cm^3 pa i volumen kvadra iznosi 150 cm^3.

$V = a \cdot b \cdot c$ (volumen kvadra jednak je umnošku duljina njegovih bridova iz jednog vrha) pa je potrebno pronaći sve kombinacije triju prirodnih brojeva čiji je umnožak 150.

$\boldsymbol{a}$	1	1	1	1	1	1	2	2	3	5
$\boldsymbol{b}$	1	2	3	5	6	10	3	5	5	5
$\boldsymbol{c}$	150	75	50	30	25	15	25	15	10	6

Marin može oblikovati kvadar na 10 različitih načina.

2. Marta, Ana i Ivan izmjenjuju se u bacanju igraće kockice. Prva baca Marta, onda Ana pa Ivan. Nakon toga opet Marta i tako dalje u krug istim redom. Svaki od njih, kada je njegov red, baca kockicu jednom, sve dok ne dobije prvu „šesticu“. Nakon što dobije svoju prvu „šesticu“, igrač u svakom sljedećem bacanju, do kraja igre, kockicu baca više puta. Marta baca kockicu četiri, Ana šest, a Ivan osam puta. Igra je završila nakon 27 krugova. Kockica je ukupno bačena 152 puta. Koliko puta su kockicu mogle bacati Marta i Ana ako je Ivan bacio kockicu ukupno 48 puta?

Rješenje.
Svatko od njih troje je došao na red 27 puta.
Da su svi bacali kockicu samo jednom, bilo bi ukupno 81 bacanje.
Preostalih $152 - 81 = 71$ bacanja kockice napravili su dodatnim bacanjima.

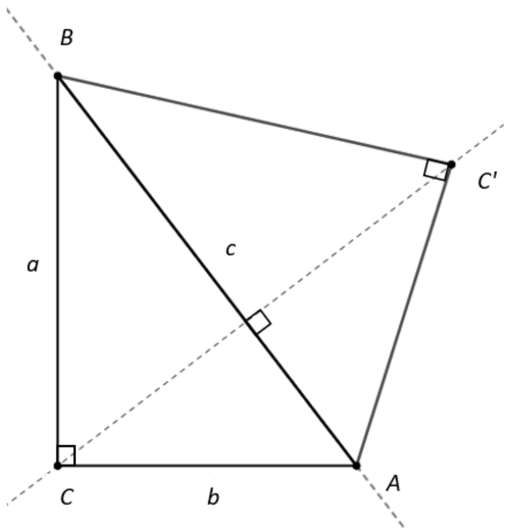
Ivan je bacao 48 puta, znači $48 - 27 = 21$ dodatnih bacanja.
Preostalih $71 - 21 = 50$ bacanja kockica napravile su Marta i Ana dodatnim bacanjima.
Ako je Marta u x krugova bacala tri dodatna bacanja, a Ana u y krugova pet dodatnih bacanja onda vrijedi $3x + 5y = 50$.
Brojevi x i y moraju biti prirodni brojevi ili 0, a y manji ili jednak 10 pa jednadžbu možemo riješiti pomoću tablice:

y (Ana)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x (Marta)	-	15	-	-	10	-	-	5	-	-	0

Ako je Ana dodatno bacala u jednom krugu onda je Marta dodatno bacala u 15 krugova.
Ana je tada bacala $27 + 1 \cdot 5 = 32$ puta, a Marta $27 + 15 \cdot 3 = 72$ puta.
Ako je Ana dodatno bacala u 4 kruga onda je Marta dodatno bacala u 10 krugova.
Ana je tada bacala $27 + 4 \cdot 5 = 47$ puta, a Marta $27 + 10 \cdot 3 = 57$ puta.
Ako je Ana dodatno bacala u 7 krugova onda je Marta dodatno bacala u 5 krugova.
Ana je tada bacala $27 + 7 \cdot 5 = 62$ puta, a Marta $27 + 5 \cdot 3 = 42$ puta.
Ako je Ana dodatno bacala u 10 krugova onda Marta nije dodatno bacala.
Ana je tada bacala $27 + 10 \cdot 5 = 77$ puta, a Marta $27 + 0 \cdot 3 = 27$ puta.

3. Duljina stranice $\overline{AC}$ pravokutnog trokuta ΔABC s pravim kutom u vrhu C jednaka je $\frac{3}{4}$ duljine stranice $\overline{BC}$, a duljina stranice $\overline{AB}$ za 25 % je veća od duljine stranice $\overline{BC}$. Spajanjem trokuta ΔABC i njegove osnosimetrične slike s obzirom na pravac AB nastaje lik opsega 16.8 cm. Koliki je opseg trokuta ΔABC?

Rješenje.



Duljina stranice $\overline{AC}$ jednaka je $\frac{3}{4}$ duljine stranice $\overline{BC}$, što zapisujemo
$|AC| = 0.75 \cdot |BC|$ ili $b = 0.75 \cdot a$.
Duljina stranice $\overline{AB}$ za 25 % je veća od duljine stranice $\overline{BC}$, pa je
$|AB| = |BC| + 25$ % od $|BC| = (1 + 0.25) \cdot |BC| = 1.25 \cdot |BC|$ ili $c = 1.25 \cdot a$.

Lik koji nastaje osnom simetrijom trokuta *ABC* s obzirom na pravac *AB* je sukladni pravokutni trokut *BAC'*.
Spajanjem ta dva pravokutna trokuta nastaje četverokut *BCAC'*.
Točka *C'* osnosimetrična je slika točke *C* s obzirom na pravac *AB* pa točke *B* i *A* leže na simetrali dužine $\overline{CC'}$.
Prema svojstvu simetrale dužine svaka je točka koja leži na njoj jednako udaljena od rubnih točaka dužine pa vrijedi $|AC| = |AC'|$ i $|BC| = |BC'|$.
Zaključujemo da četverokut *BCAC'* ima dva para sukladnih stranica pa zbroj duljina njegovih stranica iznosi

$2 \cdot a + 2 \cdot b = 16.8$ cm

$2 \cdot a + 2 \cdot 0.75a = 16.8$

$2 \cdot a + 1.5 \cdot a = 16.8$

$3.5 \cdot a = 16.8$

$a = 16.8 : 3.5$

$a = 4.8$ cm

$b = 0.75 \cdot a$

$b = 0.75 \cdot 4.8$

$b = 3.6$ cm

$c = 1.25 \cdot a$

$c = 1.25 \cdot 4.8$

$c = 6$ cm

Opseg trokuta *ABC* iznosi 4.8 + 3.6 + 6 = 14.4 cm.

4. Koliki je zbroj svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva kojima su sve znamenke neparne?

Prvo rješenje.
Na svakom dekadskom mjestu (od tisućica do jedinica) mogu se naći neparne znamenke $1, 3, 5, 7$ i 9.
Ako na mjesto znamenke tisućica stavimo 1, na preostala 3 mjesta možemo staviti bilo koju od 5 neparnih znamenaka pa imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ brojeva koji počinju znamenkom 1.
Također imamo 125 brojeva kojima je na mjestu tisućica znamenka $3, 5, 7$ ili 9.
Zaključujemo da se svaka od 5 znamenaka pojavljuje 125 puta na dekadskom mjestu tisućica, pa vrijednost zbroja svih tisućica iznosi $125 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 1000 = 125 \cdot 25 \cdot 1000$.
Isto se ponavlja na svakom dekadskom mjestu pa je
vrijednost zbroja svih stotica $125 \cdot 25 \cdot 100$,
vrijednost zbroja svih desetica $125 \cdot 25 \cdot 10$, a
vrijednost zbroja svih jedinica $125 \cdot 25 \cdot 1$.
Zbroj svih brojeva je stoga $125 \cdot 25 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 3125 \cdot 1111 = 3\,471\,875$.

Drugo rješenje.
Na svakom dekadskom mjestu (od tisućica do jedinica) mogu se naći neparne znamenke $1, 3, 5, 7$ i 9.
Svi četveroznamenkasti prirodni brojeva kojima su sve znamenke neparne čine niz:

$$1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1131, 1133, \ldots, 9991, 9993, 9995, 9997, 9999$$

u kojem su brojevi poredani od najmanjeg prema najvećem.
Uočimo da tih brojeva ima $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ jer se na svakom dekadskom mjestu može pojaviti bilo koja od 5 neparnih znamenki.
Također uočimo da se mogu upariti brojevi:
1111 i 9999,
1113 i 9997,
1115 i 9995,
1117 i 9993,
1119 i 9991,
1131 i 9979 itd.
Zbroj brojeva u svakom paru iznosi $11\,110$, a takvih parova ima 312.
Jedini broj koji nema para je 5555.
Stoga je zbroj svih tih brojeva jednak
$312 \cdot 11\,110 + 5555 = 3\,466\,320 + 5555 = 3\,471\,875$.

5. Zbroj godina obitelji koju čine otac, majka, dvije sestre blizanke i sin je 81. Otac je 4 godine stariji od majke. Za 4 godine broj očevih godina bit će dvostruko veći od zbroja godina njegove djece. Razlika u godinama sestara i brata je tri godine. Odredi broj godina svakog člana obitelji.

Rješenje.
Označimo s a očeve godine, b majčine godine, c godine blizanki i d sinove godine.
Vrijedi $a + b + 2c + d = 81$.
Za 4 godine otac će imati $a + 4$ godina, jedna blizanka $c + 4$ godina, druga blizanka $c + 4$ godina, a sin $d + 4$ godina pa vrijedi
$2 \cdot (2 \cdot (c + 4) + d + 4) = a + 4$
$2 \cdot (2c + d + 12) = a + 4$
Dijeljenjem jednadžbe s dva dobije se
$2c + d + 12 = 0.5a + 2$
$2c + d = 0.5a - 10$
Iz uvjeta zadatka imamo da je otac 4 godine stariji od majke, dakle $b = a - 4$.
Uvrštavanje dobivenih izraza u jednadžbu $a + b + 2c + d = 81$ dobivamo:
$a + (a - 4) + (0.5a - 10) = 81$
$2.5a = 81 + 14$
$2.5a = 95$
$a = 95 : 2.5$
$a = 38$. Otac ima 38 godina.
$b = 38 - 4 = 34$. Majka ima 34 godine.
Razlika u godinama sestara i brata je 3 pa imamo dvije mogućnosti:
sestre su 3 godina starije od brata ili brat je 3 godine stariji od sestara.

<u>1. slučaj</u>
Sestre blizanke su 3 godina starije od brata, $d = c - 3$.
Uvrštavanjem vrijednosti u $a + b + 2c + d = 81$ dobivamo:
$38 + 34 + 2c + c - 3 = 81$
$3c + 69 = 81$
$3c = 81 - 69$

$3c = 12$
$c = 12 : 3$
$c = 4$
$d = 4 - 3 = 1$
Sestre blizanke imaju 4 godine, a sin 1 godinu.

<u>2. slučaj</u>
Brat je 3 godine stariji od sestara, $d = c + 3$.
Uvrštavanjem vrijednosti u jednadžbu $a + b + 2c + d = 81$ dobivamo:
$38 + 34 + 2c + c + 3 = 81$
$3c + 75 = 81$
$3c = 81 - 75$
$3c = 6$
$c = 6 : 3$
$c = 2$
$d = 2 + 3 = 5$
Sestre blizanke imaju 2 godine, a sin 5 godina.

Otac ima 38 godina, majka 34 godine, sestre blizanke 4 godine, a sin 1 godinu
ili otac ima 38 godina, majka 34 godine sestre blizanke 2 godine, a sin 5 godina.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zbroj prve i zadnje znamenke peteroznamenkastog broja s međusobno različitim znamenkama jednak je umnošku preostale tri znamenke. Koliko ima takvih brojeva?

Rješenje.
Neka je $\overline{abcde}$ peteroznamenkasti broj s međusobno različitim znamenkama.

$a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a \neq 0$.

Najmanji mogući zbroj $a + e$ je 1 (znamenke 1 i 0), a najveći 17 (znamenke 8 i 9).
Prema uvjetu zadatka je $a + e = b \cdot c \cdot d$.
Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13 i 17 ne mogu se prikazati kao umnošci triju različitih znamenaka pa je $a + e \in \{6, 8, 10, 12, 14, 15, 16\}$.

Promotrimo slučajeve:

1) $a + e = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$
U ovom slučaju postoji 1 mogućnost: $(a, e) = (6,0)$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $1 \cdot 6 = 6$.

2) $a + e = 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4$
U ovom slučaju postoje 3 mogućnosti: $(a, e) \in \{(8,0), (5,3), (3,5)\}$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $3 \cdot 6 = 18$.

3) $a + e = 10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$
U ovom slučaju postoje 4 mogućnosti: $(a, e) \in \{(7,3), (3,7), (6,4), (4,6)\}$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $4 \cdot 6 = 24$.

4) $a + e = 12 = 1 \cdot 2 \cdot 6$
U ovom slučaju postoji 6 mogućnosti: $(a, e) \in \{(9,3), (3,9), (8,4), (4,8), (7,5), (5,7)\}$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $6 \cdot 6 = 36$.

5) $a + e = 12 = 1 \cdot 3 \cdot 4$
U ovom slučaju postoje 2 mogućnosti: $(a, e) \in \{(7,5), (5,7)\}$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $2 \cdot 6 = 12$.

6) $a + e = 14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$
U ovom slučaju postoje 4 mogućnosti: $(a, e) \in \{(9,5), (5,9), (8,6), (6,8)\}$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $4 \cdot 6 = 24$.

7) $a + e = 15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$
U ovom slučaju postoje 4 mogućnosti: $(a, e) \in \{(9,6), (6,9), (8,7), (7,8)\}$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $4 \cdot 6 = 24$.

8) $a + e = 16 = 1 \cdot 2 \cdot 8$
U ovom slučaju postoje 2 mogućnosti: $(a, e) \in \{(9,7), (7,9)\}$.
Znamenke b, c, d mogu se izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina pa je brojeva tog oblika $2 \cdot 6 = 12$.

Brojeva traženog oblika ima ukupno: $6 + 18 + 24 + 36 + 12 + 24 + 24 + 12 = 156$.

Napomena:
Razmatranje može započeti i idejom da je najmanji umnožak triju različitih znamenaka (različitih od 0) jednak 6, a najveći 16 (određen zbrojem dviju različitih znamenaka, mora biti manji od 17).

2. Broj ekipa školske rukometne lige veći je od 18 i manji od 30. Tijekom sezone svaka ekipa sa svakom preostalom ekipom odigra po dvije utakmice, jednu kao „domaćin“ i jednu kao „gost“. U posljednjoj je sezoni 35 % ukupnog broja utakmica završilo pobjedom gostujuće ekipe. Odredi najmanji i najveći mogući broj utakmica u kojima je pobijedila gostujuća ekipa.

Rješenje.
Neka je n broj rukometnih ekipa u ligi. Tada je $18 < n < 30$.

Tijekom sezone odigra se $n(n-1)$ utakmica, a utakmica u kojima je pobijedila gostujuća ekipa bilo je

$$35\ \% \cdot n(n-1) = \frac{7}{20} n(n-1).$$

Kako $\frac{7}{20} n(n-1)$ mora biti prirodan broj, umnožak $n(n-1)$ mora biti djeljiv s 20.

S obzirom da su n i $n-1$ uzastopni prirodni brojevi, oni su različite parnosti.

Stoga slijedi: n je djeljiv s 20 ili $n-1$ je djeljiv s 20 ili je jedan od njih djeljiv s 5, a drugi s 4.

Jedini prirodan broj n za koji je $18 < n < 30$, a koji je djeljiv s 20 je broj 20 pa je $n = 20$.

Jedini prirodan broj $n-1$ u zadanom intervalu koji je djeljiv s 20 je broj 20 pa je $n = 21$.

Jedini prirodni brojevi n i $n-1$ u zadanom intervalu takvi da je jedan od njih djeljiv s 5, a drugi s 4 su $n = 25$ i $n - 1 = 24$ pa je $n = 25$.

Tablično:

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$n-1$	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Prema tome, $n \in \{20, 21, 25\}$.

Najmanji mogući broj utakmica u kojima je pobijedila gostujuća ekipa dobije se za $n = 20$, a najveći za $n = 25$.

Najmanji mogući broj utakmica u kojima je pobijedila gostujuća ekipa je $\frac{7}{20} \cdot 20 \cdot 19 = 133$, a najveći $\frac{7}{20} \cdot 25 \cdot 24 = 210$.

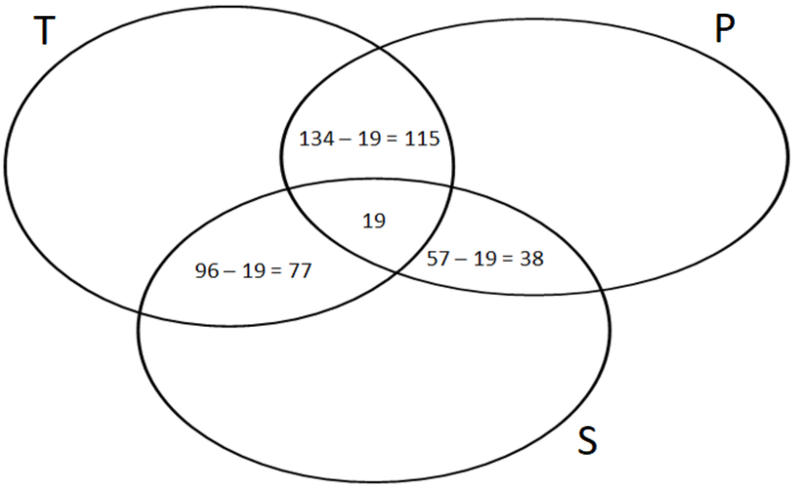
3. Koliko ima cijelih brojeva koji nisu djeljivi ni sa 3 ni sa 5 ni sa 7, a čija je apsolutna vrijednost manja od 2022?

Rješenje.
Cijeli brojevi čija je apsolutna vrijednost manja od 2022 su $-2021, -2020, \dots, 0, \dots, 2020, 2021$. Takvih je prirodnih brojeva 2021.

Odredit ćemo koliko ima prirodnih brojeva koji su manji od 2022, a koji nisu djeljivi ni s 3 ni s 5 ni sa 7 i dobiveni broj pomnožiti s 2.

Brojevi koji su djeljivi s 3, 5 i 7 višekratnici su broja $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Budući da 2021 : 105 daje 19 i ostatak 26, zaključujemo da je 19 prirodnih brojeva manjih od 2022 koji su djeljivi sa 105.
Brojevi koji su djeljivi s 5 i 7 višekratnici su broja $5 \cdot 7 = 35$. Budući da 2021 : 35 daje 57 i ostatak 26, zaključujemo da je 57 prirodnih brojeva manjih od 2022 koji su djeljivi s 35.
Brojevi koji su djeljivi s 3 i 7 višekratnici su broja $3 \cdot 7 = 21$. Budući da 2021 : 21 daje 96 i ostatak 5, zaključujemo da je 96 prirodnih brojeva manjih od 2022 koji su djeljivi s 21.
Brojevi koji su djeljivi s 3 i 5 višekratnici su broja $5 \cdot 3 = 15$. Budući da 2021 : 15 daje 134 i ostatak 11, zaključujemo da su 134 prirodna broja manja od 2022 koja su djeljiva s 15.

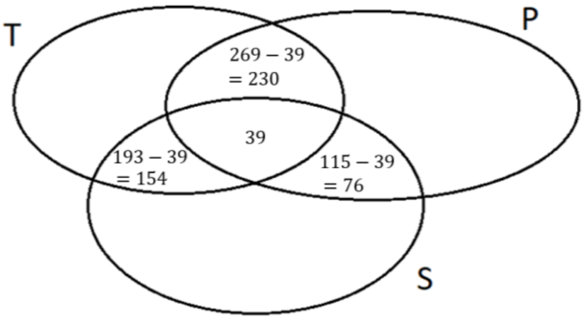
Neka je T skup višekratnika broja 3, P skup višekratnika broja 5 i S skup višekratnika broja 7.
To se može prikazati Vennovim dijagramom:

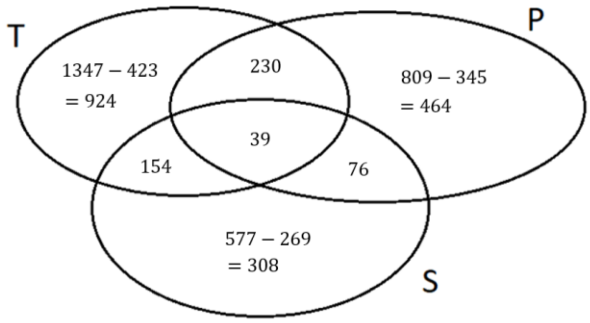


Budući da 2021 : 3 daje 673 i ostatak 2, zaključujemo da su 673 prirodna broja manja od 2022 koja su djeljiva s 3.
Budući da 2021 : 5 daje 404 i ostatak 1, zaključujemo da su 404 prirodna broja manja od 2022 koja su djeljiva s 5.
Budući da 2021 : 7 daje 288 i ostatak 5, zaključujemo da je 288 prirodnih brojeva manjih od 2022 koji su djeljivi sa 7.

Prirodnih brojeva koji su djeljivi s 3, 5 ili 7 manjih od 2022 ima
462 + 232 + 154 + 19 + 77 + 38 + 115 = 1097.
Prirodnih brojeva koji nisu djeljivi ni s 3 ni s 5 ni sa 7 manjih od 2022 ima 2021 – 1097 = 924.
Cijelih brojeva čija je apsolutna vrijednost manja od 2022, a koji nisu djeljivi ni s 3 ni s 5 ni sa 7 ima $924 \cdot 2 = 1848$.

Napomena:
Moguće je u svakom koraku promatrati broj cijelih brojeva, umjesto broja prirodnih brojeva s traženim svojstvom.

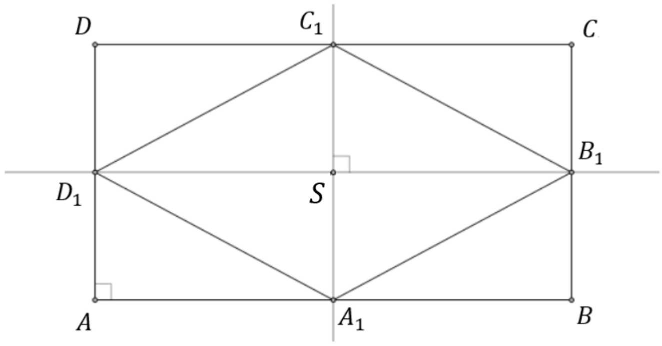




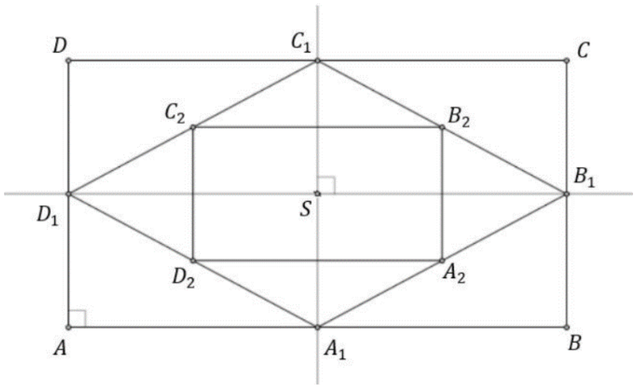
Cijelih brojeva čija je apsolutna vrijednost manja od 2022, a koji nisu djeljivi ni s 3 ni s 5 ni sa 7 ima $4043 - (924 + 230 + 464 + 154 + 39 + 76 + 308) = 1848$.

4. Na stranicama pravokutnika $ABCD$ istaknuta su polovišta, redom, A_1, B_1, C_1 i D_1. Potom su na stranicama četverokuta $A_1B_1C_1D_1$ istaknuta polovišta, redom, A_2, B_2, C_2 i D_2 koja su vrhovi četverokuta $A_2B_2C_2D_2$. Postupak je nastavljen tako da su svakom tako dobivenom četverokutu označena polovišta stranica i te su točke vrhovi novog četverokuta. Dokaži da je četverokut $A_7B_7C_7D_7$ romb. Izračunaj površinu četverokuta $A_7B_7C_7D_7$ ako je zbroj površina četverokuta $A_4B_4C_4D_4$, $A_5B_5C_5D_5$ i $A_6B_6C_6D_6$ jednak 189.

Rješenje.



Pravokutnik $ABCD$ je osnosimetričan lik s obzirom na simetrale svojih stranica pa četverokut $A_1B_1C_1D_1$ određen polovištima njegovih stranica ima okomite dijagonale koje se raspolavljaju, odnosno četverokut $A_1B_1C_1D_1$ je romb.



Pokažimo da je četverokut $A_2B_2C_2D_2$ pravokutnik.
Uočimo trokut $\Delta A_1B_1D_1$. Dužina $\overline{D_2A_2}$ je srednjica tog trokuta pa vrijedi:
$\overline{D_2A_2} \parallel \overline{D_1B_1}$ i $|D_2A_2| = \frac{1}{2}|D_1B_1|$.
Na isti način u trokutu $\Delta A_1B_1C_1$vrijedi:
$\overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_1C_1}$ i $|A_2B_2| = \frac{1}{2}|A_1C_1|$.
Zbog simetrije romba isti zaključci vrijede za preostale dvije stranice četverokuta $A_2B_2C_2D_2$.
Dakle, susjedne stranice četverokuta $A_2B_2C_2D_2$ paralelne su dijagonalama romba (koje su međusobno okomite) pa je taj četverokut pravokutnik.

Nastavljanjem postupka iz uvjeta zadatka svaki od četverokuta $A_1B_1C_1D_1$, $A_3B_3C_3D_3$, $A_5B_5C_5D_5$, … bit će romb, a svaki od četverokuta $A_2B_2C_2D_2$, $A_4B_4C_4D_4$, $A_6B_6C_6D_6$, … bit će pravokutnik. Prema tome, četverokut $A_7B_7C_7D_7$ je romb.

Neka je P površina pravokutnika *ABCD*, a P_1, P_2, P_3, … , redom, površine četverokuta $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, … .

Dijagonale romba $A_1B_1C_1D_1$sukladne su stranicama pravokutnika $ABCD$. Površina romba jednaka je polovini umnoška duljina njegovih dijagonala pa je $P_1 = \frac{1}{2}P$.

Kako je $|D_2A_2| = \frac{1}{2}|D_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|A_2B_2| = \frac{1}{2}|A_1C_1| = \frac{1}{2}|BC|$ slijedi da je $P_2 = \frac{1}{4}P$.

Analogno zaključujemo da je površina svakog sljedećeg četverokuta dva puta manja od površine prethodnog četverokuta.
Iz uvjeta zadatka vrijedi

$$P_4 + P_5 + P_6 = 189.$$

Kako je $P_4 = \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{16}P$, $P_5 = \frac{1}{2}\cdot P_4 = \frac{1}{32}P$, $P_6 = \frac{1}{2}P_5 = \frac{1}{64}P$,
slijedi:

$$\frac{1}{16}P + \frac{1}{32}P + \frac{1}{64}P = 189$$

$$\frac{7}{64}P = 189$$

$$P = 189 \cdot \frac{64}{7}$$

$$P = 1728$$

Tada je:

$$P_7 = \frac{1}{2}P_6 = \frac{1}{128}P$$

$$P_7 = \frac{1}{128}\cdot 1728$$

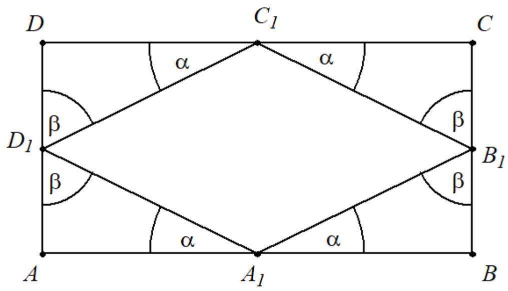
$$P_7 = 13.5$$

Napomena:

Dokazati da je četverokut $A_1B_1C_1D_1$ romb može se i na sljedeći način.

Neka su $|AB| = a$ i $|BC| = b$ duljine stranica pravokutnika *ABCD*.

Neka su veličine kutova u ΔD_1AA_1:
$|\measuredangle D_1A_1A| = \alpha$ i $|\measuredangle AD_1A_1| = \beta$.



Trokuti ΔD_1AA_1, ΔA_1BB_1, ΔB_1CC_1 i ΔCDD_1su međusobno sukladni prema poučku *S-K-S* $(\frac{a}{2}, 90°, \frac{b}{2})$.

Iz njihove sukladnosti slijedi $|A_1B_1| = |B_1C_1| = |C_1D_1| = |D_1A_1|$

i $|\measuredangle D_1A_1A| = |\measuredangle BA_1B_1| = |\measuredangle B_1C_1C| = |\measuredangle DC_1D_1| = \alpha$,
$|\measuredangle A_1B_1B| = |\measuredangle CB_1C_1| = |\measuredangle C_1D_1D| = |\measuredangle AD_1A_1| = \beta$.

Nadalje je $|\measuredangle B_1A_1D_1| = |\measuredangle D_1C_1B_1| = 180° - 2\alpha$ i $|\measuredangle C_1B_1A_1| = |\measuredangle A_1D_1C_1| = 180° - 2\beta$.

Prema tome, četverokut $A_1B_1C_1D_1$ je romb (sukladne stranice i sukladni nasuprotni kutovi).

5. Duljine stranica trokuta prirodni su brojevi. Duljina jedne stranice je 100, a preostale su dvije kraće od nje. Koliko ima takvih, međusobno nesukladnih, trokuta?

Rješenje.
Neka su a, b, $c \in \mathbb{N}$ duljine stranica trokuta i neka je $c = 100$.

Tada je (zbog nejednakosti trokuta):

$a + b > 100$, $a + 100 > b$, tj. $b - a < 100$ i $b + 100 > a$, tj. $a - b < 100$.

Prema uvjetu zadatka je $a, b < 100$.

Prvi način:
Za odabranu vrijednost duljine a, $a < 100$, ispisat ćemo sve mogućnosti za duljinu b tako da trokuti budu nesukladni. Zbog $a + b > 100$, $a + b$ mora biti barem 101, a zbog $a, b < 100$ je $a + b$ najviše 198.

a	99	98	97	…	52	51
mogući duljine b	2 3 4 5 ⋮ 99	3 4 5 ⋮ 98	4 5 ⋮ 97	…	49 ⋮ 52	50 51
broj trokuta	**98**	**96**	**94**	**…**	**4**	**2**

Broj trokuta koji zadovoljavaju uvjet zadatka je (primjenom Gaussove dosjetke)
$98 + 96 + 94 + \ldots + 50 + \cdots + 4 + 2 = 24 \cdot 100 + 50 = 2450$.

Drugi način:
Ispisat ćemo sve mogućnosti za duljine a i b, redom, prema njihovom zbroju.
Zbog $a + b > 100$, $a + b$ mora biti barem 101, a zbog $a, b < 100$ je $a + b$ najviše 198.

$a + b$	mogući duljine a i b							**broj trokuta**
101	99, 2	98, 3	97, 4	…		52, 49	51, 50	**99 – 50 = 49**
102	99, 3	98, 4	97, 5	…		52, 50	51, 51	**99 – 50 = 49**
103	99, 4	98, 5	97, 6	…		52, 51		**99 – 51 = 48**
104	99, 5	98, 6	97, 7	…		52, 52		**99 – 51 = 48**
105	99, 6	98, 7	97, 8	…	53, 52			**99 – 52 = 47**
106	99, 7	98, 8	97, 9	…	53, 53			**99 – 52 = 47**
…								
195	99, 96	98, 97						**99 – 97 = 2**
196	99, 97	98, 98						**99 – 97 = 2**
197	99, 98							**1**
198	99, 99							**1**

Broj trokuta koji zadovoljavaju uvjet zadatka je (primjenom Gaussove dosjetke)
$2 \cdot (49 + 48 + 47 + \cdots + 2 + 1) = 2 \cdot [(49 \cdot 50) : 2] = 2 \cdot 1225 = 2450$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neki troznamenkasti broj poveća se za 27 ako znamenke jedinica i desetica zamijene mjesta, a isti se broj smanji za 450 ako zamijene mjesta znamenke stotica i desetica. Što će se dogoditi s tim brojem ako mjesta zamijene znamenke stotica i jedinica?

Rješenje.
Neka troznamenkasti broj ima oblik $\overline{abc}$.
Zamijene li mjesta znamenke jedinica i desetica dobivamo jednadžbu:
$\overline{acb} = \overline{abc} + 27$
$100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 27$
$10c + b = 10b + c + 27$
$9c = 9b + 27 \quad /: 3$
$c = b + 3$
Ako znamenke stotica i desetica zamijene mjesta dobivamo jednadžbu:
$\overline{abc} = \overline{bac} + 450$
$100a + 10b + c = 100b + 10a + c + 450$
$100a + 10b = 100b + 10a + 450$
$90a = 90b + 450 \quad /: 90$
$a = b + 5$
Dalje možemo nastaviti na tri načina.

Prvi način:
Računamo razliku početnog broja $\overline{abc}$ i broja $\overline{cba}$.
$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + b)$
$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$
$= 99a - 99c$
$= 99(a - c)$
Uvrštavanjem $a = b + 5$ i $c = b + 3$, dobije se:
$\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$
$= 99(b + 5 - b - 3)$
$= 99 \cdot 2 = 198$
Očito je $\overline{abc} > \overline{cba}$, što znači da će se zamjenom mjesta znamenki stotica i jedinica početni troznamenkasti broj smanjiti za 198.

Drugi način:
Početni broj je
$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 100(b + 5) + 10b + (b + 3) = 111b + 503.$
Ako stotica i jedinica zamijene mjesta dobije se broj

$\overline{cba} = 100c + 10b + a = 100(b + 3) + 10b + (b + 5) = 111b + 305.$
Sad je očito da je $\overline{abc} > \overline{cba}$, a kako je
$\overline{abc} - \overline{cba} = 111b + 503 - 111b - 305 = 198,$
zaključujemo da se u tom slučaju početni broj smanjio za 198.

Treći način:
Kako su a i c znamenke i $a \neq 0$, onda vrijedi:
$0 < a \leq 9$ i $0 \leq c \leq 9 \Rightarrow 0 < b + 5 \leq 9$ i $0 \leq b + 3 \leq 9.$
To znači da vrijedi: $-5 < b \leq 4,\ -3 \leq b \leq 6$ i $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
iz čega zaključujemo da je $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Odredimo sad sve brojeve $\overline{abc}$ i $\overline{cba}$ za koje je:
$c = b + 3$, $a = b + 5$ i $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b	c	a	$\overline{abc}$	$\overline{cba}$	$\overline{abc} - \overline{cba}$
0	3	5	503	305	198
1	4	6	614	416	198
2	5	7	725	527	198
3	6	8	836	638	198
4	7	9	947	749	198

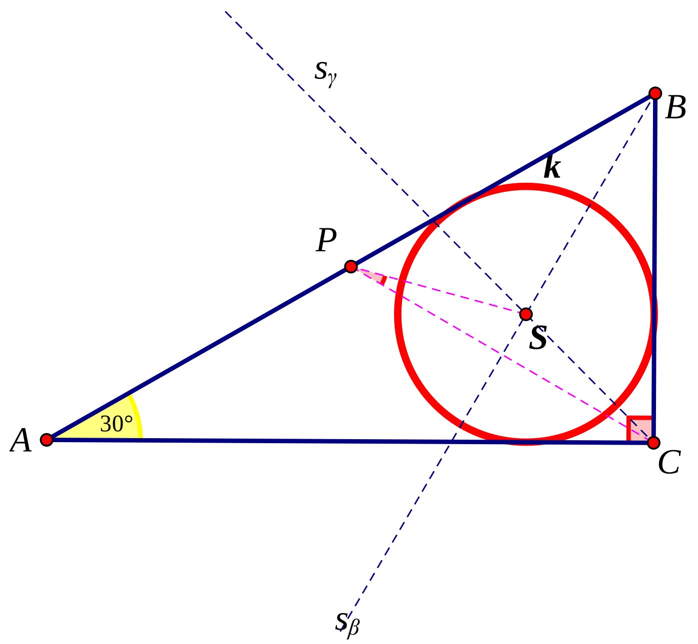
U svakom od pet slučajeva vrijedi isto: $\overline{abc} > \overline{cba}$ i $\overline{abc} - \overline{cba} = 198.$
Dakle, ako znamenke stotica i jedinica zamijene mjesta, broj se smanji za 198.

2. Matej je član biciklističkog kluba te svakodnevno vozi bicikl do susjednog grada udaljenog 40 km. U subotu se do tog grada i nazad Matej vozio 3 sata i 12 minuta. U nedjelju je, zbog radova na cesti, Matej do tog grada bicikl vozio 12 minuta duže nego dan prije. Iz istog je razloga u povratku išao okolnim putem te je, vozeći subotnjom prosječnom brzinom, prešao 15 km više. Za koliko posto se u nedjelju smanjila njegova prosječna brzina u odnosu na onu subotnju?

Rješenje.
Svakoga dana Matej prijeđe $40 + 40 = 80$ km.
U subotu je tu udaljenost prešao za $3\frac{12}{60} = 3\frac{1}{5}$ sata, odnosno za 3.2 sata.
Njegova subotnja prosječna brzina je $80 : 3.2 = 25$ km/h.
U nedjelju je, vozeći prema gradu, prešao 40 km za $1.6 + 0.2 = 1.8$ sata.
U povratku je prešao $40 + 15 = 55$ km,
a za to mu je trebalo $55 : 25 = 2.2$ sata.
Ukupno je prešao $40 + 55 = 95$ km za $1.8 + 2.2 = 4$ sata.
U nedjelju mu je prosječna brzina bila $95 : 4 = 23.75$ km/h.
Prosječna brzina je manja za 1.25 km/h,
što je smanjenje od $1.25 : 25 = 5$ %.

3. Veličina jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta ΔABC iznosi $30°$. Ako je točka P polovište hipotenuze $\overline{AB}$, a točka S središte tom trokutu upisane kružnice, kolika je veličina kuta $\angle SPC$?

Rješenje.
Skica:



Iz uvjeta zadatka-vrijedi da je $|\angle ACB| = 90°$ i $|\angle BAC| = 30°$.
Tada je $|\angle CBA| = 60°$, te $|\angle ACS| = |\angle SCB| = 45°$.
Točka P je polovište hipotenuze, odnosno središte kružnice opisane trokutu ΔABC, a to znači da je $|PA| = |PB| = |PC|$ iz čega slijedi da je trokut ΔPCA jednakokračan, pa je $|\angle ACP| = |\angle PAC| = 30°$.
Kako je kut $\angle BPC$ vanjski kut trokuta ΔPCA, vrijedi $|\angle BPC| = 30° + 30° = 60°$, a zbog $|PB| = |PC|$ zaključujemo da je trokut ΔCPB jednakostraničan.
Pravac BS je simetrala kuta $\angle CBP$ jednakostraničnog trokuta ΔCPB pa je $BS \perp PC$, a to znači da je pravac BS i simetrala stranice $\overline{PC}$ trokuta ΔCPB.
Kako točka S pripada simetrali dužine $\overline{PC}$, prema poučku o simetrali dužine vrijedi $|SP| = |SC|$, a to znači da je trokut ΔCPS jednakokračan pa je $|\angle SPC| = |\angle PCS|$.
Budući da vrijedi $|\angle ACP| + |\angle PCS| + |\angle SCB| = |\angle ACB|$ uvrštavanjem poznatih veličina kutova slijedi da je $30° + |\angle PCS| + 45° = 90°$, odnosno $|\angle PCS| = 15°$.
Kako je $|\angle SPC| = |\angle PCS|$, onda je i $|\angle SPC| = 15°$.

4. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je zbroj znamenaka broja
$$m \cdot (m + 3n)$$
jednak 2022.

Prvo rješenje.
Broj kojem je zbroj znamenaka 2022 djeljiv je s 3 (jer je broju 2022 zbroj znamenaka 6), ali nije djeljiv s 9.
Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi m i n koji udovoljavaju uvjetima zadatka.
Tada broj $m \cdot (m + 3n)$ mora biti djeljiv s 3. No, kako brojevi m i $m + 3n$ daju iste ostatke pri dijeljenju s 3, jer je njihova razlika djeljiva s 3, to znači da su oba ta broja djeljiva s 3.

Dalje zaključujemo da je njihov umnožak djeljiv s 9 što je kontradikcija s uvjetom da je zbroj znamenaka tog broja jednak 2022.

Drugo rješenje.
Broj kojem je zbroj znamenaka 2022 djeljiv je s 3, ali ne i s 9.
Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi m i n koji udovoljavaju uvjetima zadatka.
Tada je broj $m \cdot (m + 3n) = m^2 + 3mn$ djeljiv s 3.
Kako je $3mn$ djeljiv s 3, tada i m^2 mora biti djeljiv s 3.
Onda je i sam broj m djeljiv s 3.
Broj m je, dakle, oblika $3k$, $k \in N$.
Tada je $m \cdot (m + 3n) = m^2 + 3mn = (3k)^2 + 3 \cdot 3kn = 9k^2 + 9kn$.
Budući da su oba pribrojnika djeljiva s 9, tada je s 9 djeljiv i broj $m \cdot (m + 3n)$.
Kako taj broj, zbog zbroja znamenaka 2022, nije djeljiv s 9, zaključujemo da polazna pretpostavka ne vrijedi, odnosno da traženi brojevi m i n ne postoje.

Treće rješenje.
Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi m i n tako da je zbroj znamenaka broja $m\,(m + 3n)$ jednak 2022. U tom slučaju, broj $m\,(m + 3n)$ je djeljiv s 3 jer je 2022 : 3 = 674.
Kako je 3 prost broj, onda barem jedan od faktora umnoška $m\,(m + 3n)$treba biti djeljiv s 3 da bi umnožak bio djeljiv s 3. Razlikujemo dva slučaja:

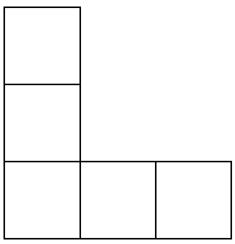
1. Ako je faktor m djeljiv s 3, onda je $m = 3k, k \in \mathbb{N}$.

Sada je $m + 3n = 3k + 3n = 3(m + n)$ pa je umnožak $m(m + 3n) = 3k \cdot 3(k + n) = 9k(k + n)$ djeljiv s 9. No zbroj znamenaka tog broja nije djeljiv s 9 (2022 : 9 = 224 i 6 ostatak) pa zaključujemo da takvi m i n ne postoje.

2. Ako je faktor $(m + 3n)$ djeljiv s 3, onda je nužno broj m djeljiv s 3, tj. $m = 3k$.

No onda je umnožak $m\,(m + 3n) = 3k\,(3k + 3n) = 9k\,(k + n), k, n \in \mathbb{N}$ djeljiv s 9, što je, kao i u prethodnom slučaju, nemoguće jer zbroj znamenaka tog broja nije djeljiv s 9. Dakle, takvi m i n ne postoje.

5. Svako polje ploče 10×10 bojimo u jednu od n boja. Na tu ploču postavljamo pločicu oblika kao na slici koja se sastoji od pet polja 1×1, uz uvjet da postavljena pločica prekriva točno 5 polja ploče. Odredi najmanji prirodni broj n za koji postoji bojanje takvo da, kako god postavili pločicu, polja koja ona prekriva su obojana različitim bojama.



Rješenje.
Pločicu od pet polja traženog oblika nazovimo *L-pločica.*
Na ploči 10×10 postoji kvadrat 3×3 koji je udaljen od ruba ploče za barem jedan redak i barem jedan stupac.
Uočimo da se u takvom kvadratu 3×3 bilo koja dva izabrana polja mogu prekriti L-pločicom.

Ako je $n \leq 8$, u takvom kvadratu 3×3 od devet polja barem dva moraju biti obojana istom bojom, pa postoji i položaj L-pločice u kojem ona prekriva dva polja iste boje.
Ako je $n = 9$, obojimo ploču na sljedeći način:

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

(različiti brojevi predstavljaju različite boje)
U takvom bojanju bilo koji kvadrat 3×3 je obojan u 9 različitih boja, pa kako god postavili L-pločicu, ona ne može prekrivati polja obojana u različite boje.
Zato je traženi broj $n = 9$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 10. – 12. svibnja 2022.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Nađi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva koji zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$x(y+z)=10$$
$$y(z+x)=11$$
$$z(x+y)=17$$

Prvo rješenje.
Imamo

$$xy+xz=10$$
$$yz+xy=11$$
$$xz+yz=17.$$

Zbrajanjem ove tri jednadžbe dobivamo

$$2(xy+yz+zx)=38,$$

odnosno

$$xy+yz+zx=19.$$

Sada imamo

$$xy=xy+yz+zx-(xz+yz)=19-17=2,$$
$$yz=xy+yz+zx-(xy+xz)=19-10=9$$

i

$$xz=xy+yz+zx-(xy+yz)=19-11=8.$$

Iz toga slijedi $(xyz)^2=2\cdot 9\cdot 8=144$, pa je $xyz=12$ ili $xyz=-12$. Konačno imamo

$$x=\frac{xyz}{yz}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$
$$y=\frac{xyz}{xz}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$
$$z=\frac{xyz}{xy}=\frac{12}{2}=6,$$

odnosno

$$x=\frac{xyz}{yz}=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3}$$
$$y=\frac{xyz}{xz}=\frac{-12}{8}=-\frac{3}{2}$$
$$z=\frac{xyz}{xy}=\frac{-12}{2}=-6.$$

Rješenja su uređene trojke:

$$\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2},6\right),\qquad \left(-\frac{4}{3},-\frac{3}{2},-6\right).$$

Drugo rješenje.
Iz

$$x(y+z)=10$$
$$y(z+x)=11$$
$$z(x+y)=17$$

slijedi:

$$xy+xz=10$$
$$yz+yx=11$$
$$zx+zy=17.$$

Supstituiramo:

$$xy=a$$
$$xz=b$$
$$yz=c.$$

Tada je:

$$a+b=10$$
$$c+a=11$$
$$b+c=17.$$

Od treće jednadžbe oduzmemo drugu:

$$b-a=6.$$

Zbrojimo dobivenu jednadžbu s prvom:

$$a+b=10$$
$$\underline{b-a=6}$$
$$2b=16$$
$$b=8.$$

Dalje je $a=2$ i $c=9$.
Vrijedi:

$$xy=2$$
$$xz=8$$
$$yz=9.$$

Drugu jednadžbu podijelimo s prvom:

$$\frac{z}{y}=4,$$

odnosno

$$z=4y.$$

Uvrstimo u treću:

$$y\cdot 4y=9$$
$$y^2=\frac{9}{4}$$
$$y_{1,2}=\pm\frac{3}{2}.$$

Iz prve jednadžbe slijedi

$$x=\frac{2}{y},$$

odnosno

$$x_{1,2}=\pm\frac{4}{3}.$$

Iz $z=4y$ slijedi

$$z_{1,2} = 4 \cdot \left(\pm\frac{3}{2}\right) = \pm 6.$$

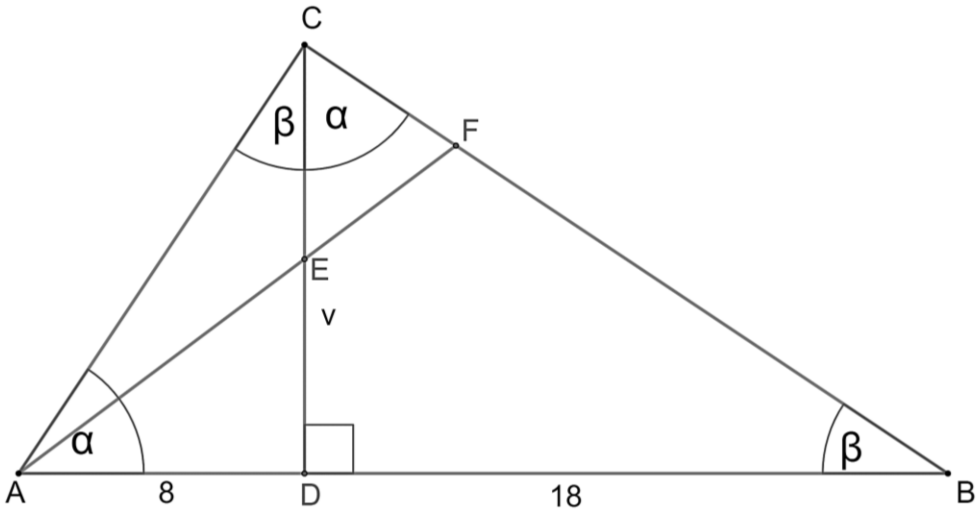
Rješenja su uređene trojke:

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 6\right), \qquad \left(-\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}, -6\right).$$

2. U pravokutnom trokutu ΔABC visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na dva dijela tako da je $|AD| = 8$ i $|DB| = 18$. Neka je E polovište visine $\overline{CD}$. Pravac AE siječe katetu $\overline{BC}$ u točki F. Izračunaj duljinu dužine $\overline{EF}$.

Rješenje.

Istaknimo kutove kako bismo uočili slične trokute.



$\Delta ADC \sim \Delta DBC \sim \Delta ABC$ jer svi imaju jedan pravi kut i veličine šiljastih kutova su im jednake.
Označimo duljinu visine na hipotenuzu s v.

Budući da je $\Delta ADC \sim \Delta DBC$, vrijedi:

$v : 18 = 8 : v$

$v^2 = 144$

$v = 12$ cm.

Budući da je E polovište visine, zaključujemo da je $|DE| = 12 : 2 = 6$.

Označimo li duljinu dužine $\overline{AE}$ s x, onda je prema Pitagorinom poučku:

$x^2 = 8^2 + 6^2$

$x^2 = 64 + 36$

$x^2 = 100$

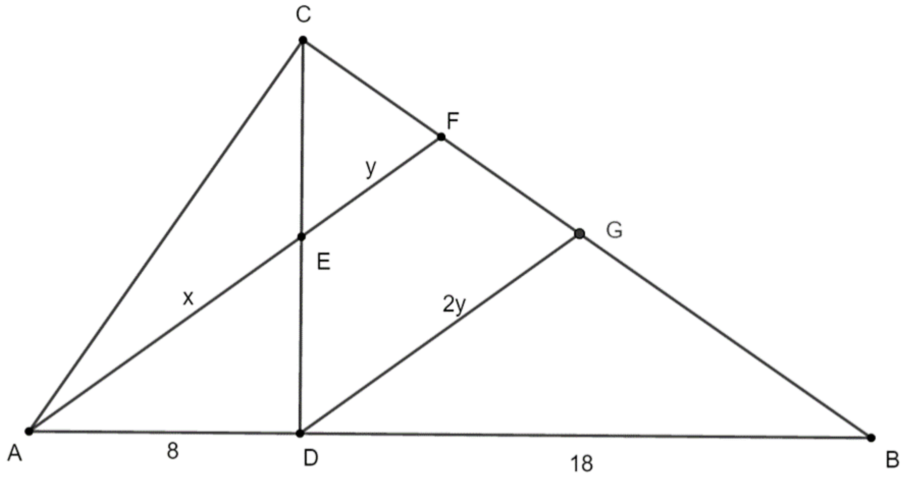
$x = 10$ cm.

Označimo duljinu dužine $\overline{EF}$ s y.

Nacrtajmo paralelu s pravcem AF kroz točku D. Neka je točka G presjek te paralele i stranice $\overline{BC}$.

Trokuti ΔCEF i ΔCDG su slični po K-K teoremu (jer imaju zajednički kut pri vrhu C, a $|\angle CFE| = |\angle CGD|$ jer su to šiljasti kutovi uz presječnicu).

Budući da je $|DC| = 2|EC|$ (jer je E polovište dužine $\overline{CD}$), zaključujemo da je koeficijent sličnosti jednak 2, pa je duljina dužine $\overline{DG}$ jednaka $2y$.



Uočavamo da zbog paralelnosti dužina $\overline{AF}$ i $\overline{DG}$ imamo još jedan par sličnih trokuta,
$\Delta ABF \sim \Delta DBG$,
pa vrijedi:

$(x+y):2y = (8+18):18$

$(10+y):2y = 26:18$

$180+18y = 52y$

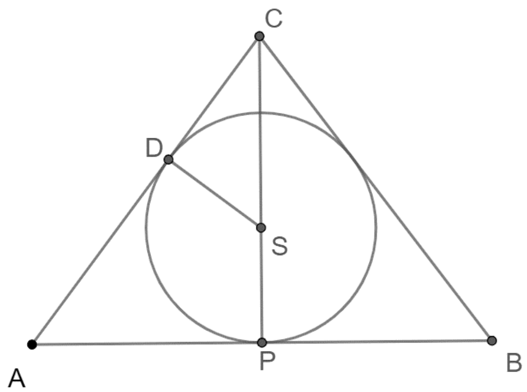
$180 = 52y - 18y$

$180 = 34y$

$y = \frac{180}{34} = \frac{90}{17}$ cm.

3. Omjer duljine osnovice jednakokračnog trokuta i polumjera tom trokutu upisane kružnice iznosi 4 : 1. Koliki je omjer površine trokuta i upisanog mu kruga?

Prvo rješenje.



Označimo s S središte trokutu upisane kružnice, s P polovište osnovice $\overline{AB}$ i s D dirałište kružnice s krakom $\overline{AC}$. Označimo s r polumjer trokutu upisane kružnice. Tada je prema uvjetu zadatka $|AP| = 2r$. Kako su trokuti ΔAPS i ΔASD sukladni (po S-S-K poučku), onda je i $|AD| = 2r$.

Označimo i duljinu kraka s b.

Trokuti ΔAPC i ΔSDC su slični (po K-K poučku) i zato imamo

$$2 = \frac{2r}{r} = \frac{v}{b-2r} = \frac{b}{v-r}.$$

Odatle slijedi $v = 2(b-2r)$ i $b = 2(v-r)$.

Uvrštavanjem b u prvu jednadžbu dobivamo $v = 2(2v-2r-2r) = 4v-8r$ odakle slijedi

$$v = \frac{8r}{3}.$$

Površina trokuta ΔABC je

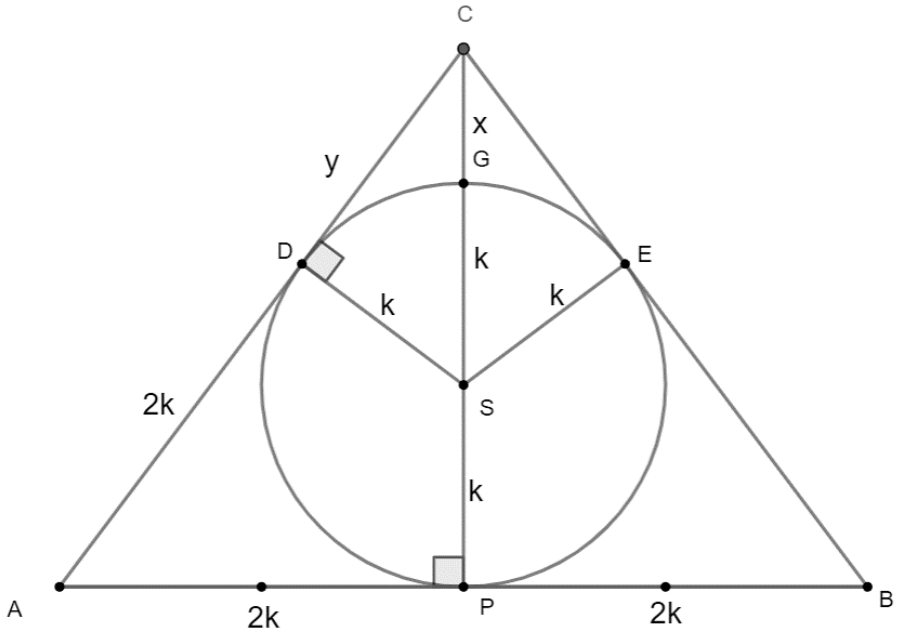
$$P_1 = \frac{4r \cdot \frac{8}{3}r}{2} = \frac{16}{3}r^2.$$

Površina upisanog kruga je $P_2 = r^2\pi$.

Traženi omjer je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{16}{3\pi}.$$

Drugo rješenje.



Duljinu osnovice $\overline{AB}$ označimo a, polumjer upisane kružnice s r te dirališta s D, E i P.

Budući da je $a : r = 4 : 1$, postoji broj k takav da je $a = 4k$ i $r = k$.

Visina $\overline{CP}$ na osnovicu siječe upisanu kružnicu u točki G i ima nožište u točki P, polovištu osnovice, pa zaključujemo da je $|AP| = 2k$.

Kako se središte upisane kružnice nalazi na simetrali kuta $\angle BAC$, prema svojstvu simetrale je $|AP| = |AD| = 2k$.

Označimo duljinu dužine $\overline{CG}$ s x i duljinu dužine $\overline{CD}$ s y.

$\Delta APC \sim \Delta CDS$ po poučku K-K (jedan kut im je zajednički i jedan kut im je pravi), pa prema tome vrijedi:

$y : (x + 2k) = k : 2k$

$2ky = k(x + 2k)$

$2y = x + 2k$

$x = 2y - 2k$

ΔCDS je pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak:

$(x+k)^2 = y^2 + k^2$.

Slijedi supstitucija $x = 2y - 2k$.

$(2y-2k+k)^2 = y^2 + k^2$

$(2y-k)^2 = y^2 + k^2$

$4y^2 - 4ky + k^2 = y^2 + k^2$

$3y^2 - 4ky = 0$

$y(3y-4k) = 0$

$3y = 4k$

$y = \frac{4}{3}k,$

pa je $x = 2 \cdot \frac{4}{3}k - 2k = \frac{8}{3}k - 2k = \frac{2}{3}k$.

Visina na osnovicu ΔABC je $v = 2r + x = 2k + \frac{2}{3}k = \frac{8}{3}k$, pa je površina trokuta

$P = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{4k \cdot \frac{8}{3}k}{2} = \frac{16}{3}k^2.$

Površina kruga je $P = r^2\pi = k^2\pi$.

Omjer površina je $\frac{\frac{16}{3}k^2}{k^2\pi} = \frac{16}{3\pi}.$

4. Dokaži da je površina svakog pravokutnog trokuta, kojem su duljine stranica prirodni brojevi, prirodan broj djeljiv s 6.

Rješenje.

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta čije su duljine stranica prirodni brojevi.

Kako je površina pravokutnog trokuta jednaka $\frac{a \cdot b}{2}$, potrebno je dokazati da je duljina jedne od kateta djeljiva s 3 i duljina jedne od njih djeljiva s 4.

Dokažimo najprije da je barem jedna duljina katete djeljiva s 3.

Pretpostavimo suprotno.

Kvadrat broja koji nije djeljiv s 3 je broj oblika $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 + 2) + 1, k \in N$, dakle, daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 pa zato $a^2 + b^2$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 što ne može biti kvadrat prirodnog broja (on daje ostatke 0 ili 1 pri dijeljenju s 3) pa smo time došli do kontradikcije i dokazali tvrdnju.

Slično, zaključujemo da barem jedna duljina katete mora biti paran broj. Jer ako su obje duljine kateta neparne, kvadrati tih brojeva su oblika $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1, k \in N,$ dakle, daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4 pa zato $a^2 + b^2$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4 što ne može biti kvadrat prirodnog broja (on daje ostatke 0 ili 1 pri dijeljenju s 4).

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je a paran.

Slijedi da su b i c iste parnosti.

Dodatno pretpostavimo da su b i c neparni. Tada iz

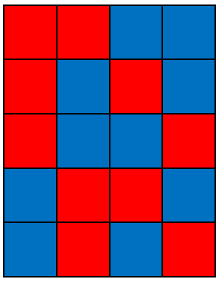
$a^2 = c^2 - b^2 = (2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 4\big(k(k+1) - l(l+1)\big),\ \ k, l \in N$ zaključujemo da je a^2 djeljiv s 8, jer su $k(k+1)$ i $l(l+1)$ parni kao umnožak dva uzastopna broja pa a mora biti djeljiv s 4.

Ako su b i c parni, onda dijelimo $a^2 + b^2 = c^2$ s 4 i time dobivamo $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ i tada, ako je jedan od prirodnih brojeva $\frac{a}{2}$ ili $\frac{b}{2}$ neparan, svodimo problem na prethodni slučaj (da oba ne mogu biti neparna već smo pokazali); ako su opet oba parni, to znači da je jedan od brojeva a i b djeljiv s 4.

Time smo dokazali tvrdnju zadatka.

5. Odredi najveći prirodni broj n za koji se svako polje pravokutne ploče $5 \times n$ može obojiti u jednu od dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.

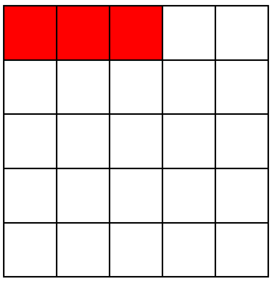
Rješenje.
Neka je $n = 4$. Obojimo ploču na sljedeći način:



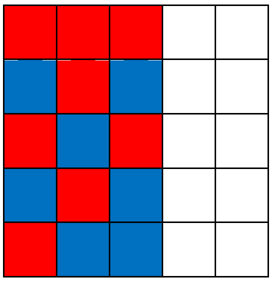
Vidimo da ne možemo odabrati dva retka i dva stupca tako da su u njihovim presjecima sva polja obojana istom bojom.

Dokažimo da se, za svako bojanje ploče 5×5 mogu naći dva retka i dva stupca takva da su četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca obojana istom bojom.

Promotrimo prvi redak. Barem tri polja u tom retku moraju biti obojana istom bojom, recimo da je to crvena. Uočimo tri stupca koja u prvom retku imaju crveno polje. Možemo pretpostaviti da su to prva tri stupca.



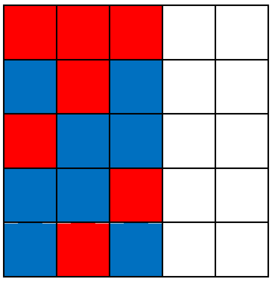
Ako u nekom preostalom retku tih stupaca imamo dva crvena polja, dobili smo dva retka i dva stupca takva da su četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca obojana istom bojom. Na primjer:



Dakle, pretpostavimo da u svakom preostalom retku tog stupca moramo imati najviše jedno crveno polje. No tada u svim tim recima imamo po dva plava polja.

Ona mogu biti ili u prva dva stupca ili u prvom i trećem ili u drugom i trećem.

Primjer:



No, to znači da se jedna takva „pozicija" mora ponoviti pa smo opet dobili dva retka i dva stupca takva da su četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca obojana istom bojom, u ovom slučaju plavom bojom.

U ploči $5 \times n$, gdje je $n > 5$, uvijek možemo odabrati dio 5×5 te ploče za koji smo pokazali da uvijek možemo naći četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca obojana istom bojom.

Zato je $n = 4$ najveći n za koji se svako polje pravokutne ploče $5 \times n$ može obojiti u jednu od dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.