

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

1. Zbroj dva broja je 6. Ako je zbroj njihovih kubova 90, koliki je zbroj njihovih kvadrata?
2. Kojom znamenkom završava broj $2^{2022} + 3^{2022} + 7^{2022}$?
3. Koliko ima peteroznamenkastih višekratnika broja 15 kojima su znamenke iz skupa $\{0, 1, 2\}$?
4. Na stranici \overline{AB} trokuta ABC dane su točke P i Q takve da vrijedi $|AP| = |PQ| = |QB|$. Na stranici \overline{BC} dana je točka R takva da je $|RC| = \frac{1}{3}|BC|$, a na stranici \overline{AC} točka S takva da je $|SC| = \frac{1}{3}|AC|$. Ako je površina četverokuta $PQRS$ jednaka 16 cm^2 , kolika je površina trokuta ABC ?
5. Zadana je jednadžba $\frac{x-a}{x^2-1} + \frac{a}{x^2+x} = \frac{x+a}{x^2-x}$. Odredite sve vrijednosti realnoga parametra a za koje ta jednadžba nema realnih rješenja.

* * *

6. Vlasnici hotela su na početku turističke sezone za 4000 kn kupili nove deke, plahte i jastučnice. Svaku su deku platili 120 kn, svaku plahtu 50 kn, a svaku jastučnicu 25 kn. Ako su kupili ukupno 100 artikala, koliko je kupljeno deka, koliko plahti, a koliko jastučnica? Kupili su barem jedan artikl od svake vrste.
7. Duljina osnovice jednakokravnog trokuta je 6 cm, a kosinus kuta uz osnovicu iznosi $\frac{5}{13}$. Odredite polumjer kružnice koja dodiruje oba kraka tog trokuta i njemu opisanu kružnicu.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

1. Ako su α i β šiljasti kutovi pravokutnog trokuta i $\sin \beta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, odredite $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
2. Odredite apsolutnu vrijednost razlike rješenja jednadžbe

$$x(10a - 5x + 6) = (5a + 1)(a + 1), \quad a \in \mathbf{R}.$$

3. Neka je $f(x)$ funkcija za koju vrijedi $f\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = x^2 + x + 1$ te neka je funkcija $g(x)$ definirana s $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$. Odredite prirodno područje definicije funkcije $g(x)$.
4. Ana je na putovanju po Europi i trenutno se nalazi u jednoj europskoj metropoli. Svakoj od četiri prijateljice poslala je poruku o trenutnoj lokaciji. Tamari je rekla da je trenutno u Parizu ili Londonu, Ivi da je u Beču ili Pragu, Sanja je dobila poruku da se nalazi u Rimu, a Višnji je rekla da nije u Beču. Također je rekla da samo jedna od njih ima točnu informaciju, te da se nalazi u jednom od spomenutih gradova. Koja prijateljica ima točnu informaciju i gdje se nalazi Ana? Je li rješenje jedinstveno? Obrazložite.
5. U paralelogramu $ABCD$ kut s vrhom u točki B je 120° i stranica AD tri puta je dulja od stranice AB . Na stranici BC odabrana je točka E , a na stranici AD točka F tako da je $ABEF$ romb. Koliki je kosinus kuta EAC ?

* * *

6. U pravokutnom trokutu duljine svih stranica su dvoznamenkasti prirodni brojevi. Ako broju koji je duljina jedne katete zamijenimo znamenke jedinica i desetica dobit ćemo duljinu hipotenuze tog trokuta. Odredite duljine stranica trokuta.
7. Na grafu funkcije $f(x) = -x^2 + 2022x$ plavom su bojom označene sve cjelobrojne točke (x, y) za koje je $y \geq -2023$. Na osi apscisa crvenom su bojom označene sve cjelobrojne točke $(x, 0)$ takve da je $a < x < b$, $f(a) = f(b) = 0$. Koliko ima različitih trokuta kojima su vrhovi dvije plave točke i jedna crvena točka?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

1. Odredite sve realne brojeve a za koje postoji realan broj x takav da je

$$\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin^3 x + \sin^3 x = a^2 - 3.$$

2. Odredite nultočke funkcije $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_2(18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1) - 2x - 1$.

3. U trokutu ABC vrijedi $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ i $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Odredite mjere preostala dva kuta trokuta ABC .

4. Zadana je kvadratna mreža dimenzija 20×20 . U jedno polje te mreže upisana je nula. U preostala polja treba upisati prirodne brojeve tako da razlika brojeva u susjednim poljima bude najviše 5. Susjednim poljima smatramo polja koja imaju zajedničku stranicu. Dokažite da postoje barem tri takva polja u koja je upisan isti broj.

5. U uspravni stožac upisana je kugla polumjera 1. Izvodnica zatvara s bazom stošca kut od 60° . Stožac je presječen ravninom koja je paralelna s bazom stošca i dodiruje kuglu. Kolika je površina presjeka te ravnine i stošca?

* * *

6. Riješite sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \geq \sin x, \\ |x| - \frac{\pi}{2} \leq \cos x. \end{cases}$$

7. Odredite sve cijele brojeve a za koje su rješenja jednadžbe $x^2 - (3 + a)x + 3a + 3 = 0$ također cijeli brojevi. Koji su to brojevi?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

1. Za koje je vrijednosti realnoga broja x zbroj trećega i petoga člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2^x} + 2^{\frac{-x+1}{2}}\right)^n$ jednak 135 ako je zbroj binomnih koeficijenata posljednja tri člana toga razvoja jednak 22?
2. Polumjer osnovke, izvodnica i visina uspravnog stošca u nekom su poretku tri uzastopna člana rastućega aritmetičkog niza. Ako je površina osnovna presjeka stošca 300 cm^2 , koliki je njegov obujam?
3. Ako je $z + z^{-1} = 2 \cos 5^\circ$, koliko je $(z^{2022} - z^{-2022})^{2022}$?
4. Ako je $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + a) \left(\frac{1}{x} + b\right)$ neparna funkcija i $f(a^2) + f(a) = \frac{35}{6}$, odredite realne brojeve a i b .
5. Odredite sve prirodne brojeve $y > 1$ koji zadovoljavaju jednadžbu $\log_{\sin x} y - 3 \log_y \sqrt{\sin x} = \frac{1}{2}$, pri čemu je $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

* * *

6. Dizalo u jednoj vožnji može prevesti najviše osmero ljudi. Jedanaest stanara, među kojima su i dvojica posvađanih, čeka dizalo i svi idu na isti kat. Kolika je vjerojatnost da će se u dizalu naći posvađani stanari ako se svi stanari trebaju prevesti dizalom u minimalnom broju vožnji?
7. U jednakostraničnom trokutu ABC točka D je na stranici \overline{AB} , točka E na stranici \overline{BC} i točka F na stranici \overline{AC} . Pri tome je $|AD| = 3$, $|CE| = 2$ i $\sphericalangle DFE = 60^\circ$. Ako je površina trokuta DEF jednaka $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, odredite površinu trokuta ABC .

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.